OPERUM NEWTONI

TOMUS SECUNDUS.

ISAACI NEWTONI
OPERA
QUÆ EXSTANT OMNIA.

COMMENTARIIS ILLUSTRABAT

SAMUEL HORSLEY, LL. D. R. S. S.

REVERENDO ADMODUM IN CHRISTO PATRI

ROBERTO EPISCOPO LONDINENSI A SACRIS.

LONDINI:

EXCUDEBAT JOANNES NICHOLS.

M DCC LXXIX.

PHILOSOPHIÆ

NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA.

IN HOC TOMO CONTINENTUR

Principiorum Libri Priores duo, De Motu Corporum.

IN

VIRI PRÆSTANTISSIMI

ISAACI NEWTONI

OPUS HOCCE

MATHEMATICO-PHYSICUM

SECULI GENTISQUE NOSTRÆ DECUS EGREGIUM.

EN tibi norma poli, & divæ libramina molis,
Computus en Jovis; & quas, dum primordia rerum
Pangeret, omniparens leges violare creator
Noluit, atque operum quæ fundamenta locârit.
Intima panduntur victi penetralia cæli,
Nec latet extremos quæ vis circumrotat orbes.
Sol solio residens ad se jubet omnia prono
Tendere descensu, nec recto tramite currus
Sidereos patitur vastum per inane moveri;
Sed rapit immotis, se centro, singula gyris.
Jam patet, horrificis quæ sit via flexa cometis;
Jam non miramur barbati phænomena astri.
Discimus hinc tandem quâ causâ argentea Phœbe
Passibus haud æquis graditur; cur subdita nulli
Hactenus Astronomo numerorum fræna recuset;
Cur remeant Nodi, curque Auges progrediuntur.
Discimus & quantis refluum vaga Cynthia pontum
Viribus impellit, fessis dum fluctibus ulvam
Deserit, ac nautis suspectas nudat arenas;
Alternis vicibus suprema ad littora pulsans.
Quæ toties animos veterum torsere sophorum,
Quæque scholas frustra rauco certamine vexant,

Obvia conſpicimus, nubem pellente Matheſi.
Jam dubios nullâ caligine prægravat error,
Queis ſuperûm penetrare domos, atque ardua cæli
Scandere, ſublimis genii conceſſit acumen.
Surgite mortales, terrenas mittite curas;
Atque hinc cæligenæ vires dignoſcite mentis,
A pecudum vitâ longe lateque remotæ.
Qui ſcriptis juſſit tabulis compeſcere cædes,
Furta & adulteria, & perjuræ crimina fraudis;
Quive vagis populis circundare mœnibus urbes
Auctor erat; Cererisve beavit munere gentes;
Vel qui curarum lenimen preſſit ab uvâ;
Vel qui Niliacâ monſtravit arundine pictos
Conſociare ſonos, oculiſque exponere voces;
Humanam ſortem minus extulit: utpote pauca
Reſpiciens miſeræ tantùm ſolamina vitæ.
Jam verò ſuperis convivæ admittimur, alti
Jura poli tractare licet, jamque abdita cæcæ
Clauſtra patent terræ, rerumque immobilis ordo,
Et quæ præteriti latuerunt ſecula mundi.
Talia monſtrantem mecum celebrate camænis,
Vos ô cælicolûm gaudentes nectare veſci,
NEWTONUM clauſi reſerantem ſcrinia veri,
NEWTONUM Muſis charum, cui pectore puro
Phœbus adeſt, totoque inceſſit numine mentem:
Nec fas eſt propius mortali attingere divos.

EDM. HALLEY.

AUCTORIS

AUCTORIS PRÆFATIO AD LECTOREM.

CUM *Veteres* Mechanicam *(uti auctor eſt* Pappus) *in rerum naturalium inveſtigatione maximi fecerint; & Recentiores, miſſis formis ſubſtantialibus & qualitatibus occultis, phænomena naturæ ad leges mathematicas revocare aggreſſi ſint: Viſum eſt in hoc tractatu* Matheſin *excolere, quatenus ea ad* Philoſophiam *ſpectat.* Mechanicam *verò duplicem Veteres conſtituerunt:* rationalem, *quæ per demonſtrationes accuratè procedit, &* practicam. *Ad* practicam *ſpectant artes omnes manuales, à quibus utique* Mechanica *nomen mutuata eſt. Cùm autem artifices parùm accuratè operari ſoleant, fit ut* Mechanica *omnis à* Geometriâ *ita diſtinguatur, ut quicquid accuratum ſit ad* Geometriam *referatur, quicquid minùs accuratum ad* Mechanicam. *Attamen errores non ſunt artis, ſed artificum. Qui minùs accuratè operatur, imperfectior eſt Mechanicus, & ſi quis accuratiſſimè operari poſſet, hic foret Mechanicus omnium perfectiſſimus. Nam & linearum rectarum & circulorum deſcriptiones, in quibus* Geometria *fundatur, ad* Mechanicam *pertinent. Has lineas deſcribere* Geometria *non docet, ſed poſtulat. Poſtulat enim ut tiro eaſdem accuratè deſcribere priùs didicerit, quàm limen attingat* Geometriæ; *dein, quomodo per has operationes Problemata ſolvantur, docet; rectas & circulos deſcribere Problemata ſunt, ſed non Geometrica. Ex* Mechanicâ *poſtulatur horum ſolutio, in* Geometriâ *docetur ſolutorum uſus. Ac gloriatur* Geometria *quòd tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præſtet. Fundatur igitur* Geometria *in praxi mechanicâ, & nihil aliud eſt quàm* Mechanicæ univerſalis *pars illa, quæ artem menſurandi accuratè proponit ac demonſtrat. Cùm autem artes manuales in corporibus movendis præcipuè verſentur, fit*

ut

ut Geometria *ad Magnitudinem*, Mechanica *ad Motum vulgò referatur. Quo sensu* Mechanica Rationalis *erit scientia Motuum, qui ex viribus quibuscunque resultant, & Virium quæ ad motus quoscunque requiruntur, accuratè proposita ac demonstrata. Pars hæc* Mechanicæ *à Veteribus in* potentiis quinque *ad artes manuales spectantibus exculta fuit, qui gravitatem (cùm potentia manualis non sit) vix aliter quàm in ponderibus per potentias illas movendis considerârunt. Nos autem non Artibus sed Philosophiæ consulentes, deque potentiis non manualibus sed naturalibus scribentes, ea maximè tractamus, quæ ad Gravitatem, Levitatem, vim Elasticam, Resistentiam Fluidorum, & ejusmodi vires, seu attractivas, seu impulsivas, spectant: et ea propter, hæc nostra tanquam* Philosophiæ Principia Mathematica *proponimus. Omnis enim Philosophiæ difficultas in eo versari videtur, ut à phænomenis motuum investigemus vires Naturæ, deinde ab vis viribus demonstremus phænomena reliqua. Et huc spectant Propositiones generales, quas libro primo & secundo pertractivamus. In libro autem tertio exemplum hujus rei proposuimus per explicationem Systematis Mundani. Ibi enim, ex phænomenis cœlestibus, per Propositiones in libris prioribus mathematicè demonstratis, derivantur vires Gravitatis, quibus corpora ad Solem & Planetas singulos tendunt. Deinde ex his viribus per Propositiones etiam Mathematicas, deducuntur motus Planetarum, Cometarum, Lunæ & Maris. Utinam cætera Naturæ phænomena ex principiis mechanicis, eodem argumentandi generè, derivare liceret. Nam multa me movent, ut nonnihil suspicer ea omnia ex viribus quibusdam pendere posse, quibus corporum particulæ, per causas nondum cognitas, vel in se mutuò impelluntur & secundum figuras regulares cohærent, vel ab invicem fugantur & recedunt: quibus viribus ignotis, Philosophi hactenus Naturam frustra tentârunt. Spero autem quòd vel huic philosophandi modo, vel veriori alicui, principia hic posita lucem aliquam præbebunt.*

In his edendis, vir acutissimus & in omni Literarum genere eruditissimus Edmundus Halleius *operam navavit, nec solum typothetarum sphalmata correxit, & schemata incidi curavit, sed etiam auctor fuit, ut horum editionem aggrederer. Quippe cùm demonstratam à me figuram Orbium Cœlestium impetraverat, rogare non destitit, ut eandem cum* Societate Regali *communicarem, quæ deinde*

hortatibus & benignis suis auspiciis effecit, ut de eâdem in lucem emittendâ cogitare inciperem. At postquam motuum Lunarium inæqualitates aggressus essem, deinde etiam alia tentare cœpissem, quæ ad leges & mensuras Gravitatis & aliarum virium, & figuras à corporibus secundum datas quascunque leges attractis describendas, ad motus corporum plurium inter se, ad motus corporum in Mediis resistentibus, ad vires, densitates & motus Mediorum, ad orbes Cometarum & similia spectant, editionem in aliud tempus differendam esse putavi, ut cætera rimarer & unà in publicum darem. Quæ ad motus Lunares spectant (imperfecta cùm sint) in Corollariis Propositionis LXVI. *simul complexus sum, ne singula methodo prolixiore quàm pro rei dignitate proponere, & sigillatim demonstrare tenerer, & seriem reliquarum Propositionum interrumpere. Nonnulla serò inventa locis minùs idoneis inserere malui, quàm numerum Propositionum & citationes mutare. Ut omnia candidè legantur, & defectus in materiâ tam difficili non tam reprehendantur, quàm novis lectorum conatibus investigentur, & benignè suppleantur, enixè rogo.*

Dabam *Cantabrigiæ*, è Collegio *S. Trinitatis*, Maii 8, 1686.

IS. NEWTON.

AUCTORIS PRÆFATIO

IN

EDITIONEM SECUNDAM.

IN hâc secundâ Principiorum editione multa sparsim emendantur, & nonnulla adjiciuntur. In Libri Primi Sectione II. *inventio virium, quibus corpora in orbibus datis revolvi possint, facilior redditur & amplior. In Libri Secundi Sectione* VII. *Theoria Resistentiæ Fluidorum accuratiùs investigatur, & novis experimentis confirmatur. In Libro Tertio Theoria Lunæ & Præcessio Æquinoctiorum ex principiis suis pleniùs deducuntur, & Theoria Cometarum pluribus & accuratiùs computatis orbium exemplis confirmatur.*

Dabam *Londini*,
Mar. 28, 1713.

IS. NEWTON.

COTESII

COTESII PRÆFATIO

IN

EDITIONEM SECUNDAM.

NEWTONIANÆ Philosophiæ novam tibi, Lector benevole, diuque desideratam Editionem, plurimum nunc emendatam atque auctiorem exhibemus. Quæ potissimum contineantur in hoc Opere celeberrimo, intelligere potes ex indicibus adjectis: quæ vel addantur vel immutentur, ipsa te fere docebit Auctoris Præfatio. Reliquum est, ut adjiciantur nonnulla de Methodo hujus Philosophiæ.

Quæ Physicam tractandam susceperunt, ad tres fere classes revocari possunt. Extiterunt enim, qui singulis rerum speciebus Qualitates specificas & occultas tribuerint; ex quibus deinde corporum singulorum operationes, ignotâ quâdam ratione, pendere voluerunt. In hoc posita est summa doctrinæ Scholasticæ, ab *Aristotele* & Peripateticis derivatæ. Affirmant utique singulos effectus ex corporum singularibus naturis oriri; at unde sint illæ naturæ non docent; nihil itaque docent. Cúmque toti sint in rerum nominibus, non in ipsis rebus; sermonem quendam philosophicum censendi sunt adinvenisse, Philosophiam tradidisse non sunt censendi.

Alii ergo melioris diligentiæ laudem consequi sperârunt, rejectâ vocabulorum inutili farragine. Statuerunt itaque Materiam universam Homogeneam esse, omnem verò Formarum varietatem, quæ in corporibus cernitur, ex particularum componentium simplicissimis quibusdam & intellectu facillimis affectionibus oriri. Et rectè quidam progressio instituitur à simplicioribus ad magis composita, si particularum primariis illis affectionibus non alios tribuunt modos, quam quos ipsa tribuit Natura. Verùm ubi licentiam sibi assumunt, ponendi quascunque libet ignotas partium figuras & magnitudines, incertosque situs & motus: quin & fingendi Fluida quædam occulta, quæ corporum poros liberrimè permeent, omnipotente prædita subtilitate, motibusque occultis agitata; jam ad somnia delabuntur, neglectâ rerum constitutione verâ: quæ sanè frustra petenda est ex fallacibus conjecturis, cùm vix etiam per certissimas observationes investigari.

gari.

gari possit. Qui speculationum suarum fundamentum desumunt ab Hypothesibus; etiamsi deinde secundum leges Mechanicas accuratissime procedant; fabulam quidem, elegantem forte & venustam, fabulam tamen concinnare dicendi sunt.

Reliquitur adeo tertium genus, qui Philosophiam scilicet Experimentalem profitentur. Hi quidem ex simplicissimis quibus possunt principiis rerum omnium causas derivandas esse volunt: nihil autem Principii loco assumunt, quod nondum ex Phænomenis comprobatum fuerit. Hypotheses non comminiscuntur, neque in Physicam recipiunt, nisi ut quæstiones de quarum veritate disputetur. Duplici itaque methodo incedunt, Analytica & Synthetica. Naturæ vires legesque virium simpliciores ex selectis quibusdam phænomenis per analysin deducunt, ex quibus deinde per synthesin reliquorum constitutionem tradunt. Hæc illa est philosophandi ratio longè optima, quam præ cæteris merito amplectendam censuit celeberrimus Auctor noster. Hanc solam utique dignam judicavit, in quâ excolendâ atque adornandâ operam suam collocaret. Hujus igitur illustrissimum dedit exemplum, Mundani nempe Systematis explicationem è Theoriâ Gravitatis felicissimè deductam. Gravitatis virtutem universis corporibus inesse, suspicati sunt vel finxerunt alii: primus ille & solus ex apparentiis demonstrare potuit, & speculationibus egregiis firmissimum ponere fundamentum.

Scio equidem nonnullos magni etiam nominis viros, præjudiciis quibusdam plus æquo occupatos, huic novo principio ægrè assentiri potuisse, & certis incerta identidem prætulisse. Horum famam vellicare non est animus: tibi potius, benevole Lector, illa paucis exponere lubet, ex quibus tute ipse judicium non iniquum feras.

Igitur ut argumenti sumatur exordium à simplicissimis & proximis; dispiciamus paulisper qualis sit in Terrestribus natura Gravitatis, ut deinde tutius progrediamur ubi ad corpora Celæstia, longissimè à sedibus nostris remota, perventum fuerit. Convenit jam inter omnes Philosophos, corpora universa circumterrestria gravitare in Terram. Nulla dari corpora verè levia, jamdudum confirmavit experientia multiplex. Quæ dicitur Levitas Relativa, non est vera Levitas, sed apparens solummodò; & oritur à præpollente gravitate corporum contiguorum.

Porro, ut corpora universa gravitent in Terram, ita Terra vicissim in corpora æqualitater gravitat; gravitatis enim actionem esse mutuam & utrinque æqualem, sic ostenditur. Distinguatur Terræ totius moles in binas quascunque partes, vel æquales vel utcunque inæquales: jam si pondera partium non essent in se mutuo æqualia; cederet pondus minus majori, & partes conjunctæ pergerent rectâ moveri ad infinitum, versus plagam in quam tendit pondus majus: omnino contra experientiam. Itaque dicendum erit, pondera partium in æquilibrio esse constituta: hoc est, gravitatis actionem esse mutuam & utrinque æqualem.

Pondera corporum, æqualiter à centro Terræ distantium, sunt ut quantitates materiæ in corporibus. Hoc utique colligitur ex æquali acceleratione corporum omnium, è quiete per ponderum vires cadentium: nam vires quibus inæqualia corpora æqualiter accelerantur, debent esse proportionales quantitatibus materiæ movendæ. Jam verò corpora universa cadentia æqualiter accelerari, ex eo patet, quòd in Vacuo *Boyliano* temporibus æqualibus æqualia spatia cadendo describunt, sublatâ scilicet Aëris resistentiâ: accuratiùs autem comprobatur per experimenta Pendulorum.

Vires attractivæ corporum, in æqualibus distantiis, sunt ut quantitates materiæ in corporibus. Nam cùm corpora in Terram & Terra vicissim in corpora momentis æqualibus gravitent; Terræ pondus in unumquodque corpus, seu vis quâ corpus Terram attrahit, æquabitur ponderi corporis ejusdem in Terram. Hoc autem pondus erat ut quantitas materiæ in corpore: itaque vis quâ corpus unumquodque Terram attrahit, sive corporis vis absoluta, erit ut eadem quantitas materiæ.

Oritur ergo & componitur vis attractiva corporum integrorum ex viribus attractivis partium: siquidem auctâ vel diminutâ mole materiæ, ostensum est, proportionaliter augeri vel diminui ejus virtutem. Actio itaque Telluris ex conjunctis partium actionibus conflari censenda erit; atque adeo corpora omnia Terrestria se mutuò trahere oportet viribus absolutis, quæ sint in ratione materiæ trahentis. Hæc est natura Gravitatis apud Terram: videamus jam qualis sit in Cælis.

Corpus omne perseverare in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare; Naturæ lex est ab omnibus recepta Philosophis. Inde verò sequitur, corpora quæ in Curvis moventur, atque adeo de lineis rectis Orbitas suas tangentibus jugiter abeunt, vi aliquâ perpetuò agente retineri in itinere curvilineo. Planetis igitur in orbibus curvis revolventibus necessariò aderit vis aliqua, per cujus actiones repetitas indesinenter à Tangentibus deflectantur.

Jam illud concedi æquum est, quod mathematicis rationibus colligitur & certissimè demonstratur; corpora nempe omnia, quæ moventur in lineâ aliquâ curvâ in plano descriptâ, quæque radio ducto ad punctum, vel quiescens vel utcunque motum, describunt areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeri à viribus quæ ad idem punctum tendunt. Cùm igitur in confesso sit apud Astronomos, Planetas primarios circum Solem, secundarios verò circum suos primarios, areas describere temporibus proportionales; consequens est ut vis illa, quâ perpetuo detorquentur à Tangentibus rectilineis, & in orbitis curvilineis revolvi coguntur, versus corpora dirigatur, quæ sita sunt in orbitarum centris. Hæc itaque vis non ineptè vocari potest, respectu quidem corporis revolventis, Centripeta; respectu autem corporis centralis, Attractiva; à quàcunque demum causâ oriri fingatur.

Quin & hæc quoque concedenda sunt, & mathematicè demonstrantur: si corpora plura motu æquabili revolvantur in circulis concentricis, & quadrata temporum periodicorum sint ut cubi distantiarum à centro communi; vires centripetas revolventium fore reciprocè ut quadrata distantiarum. Vel, si corpora revolvantur in orbitis quæ sunt Circulis finitimæ, & quiescant orbitarum Apsides; vires centripetas revolventium fore reciprocè ut quadrata

drata diſtantiarum. Obtinere caſum alterutrum in Planetis univerſis conſentiunt Aſtronomi. Itaque vires centripetæ Planetarum omnium ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum ab orbium centris. Si quis objiciat Planetarum, & Lunæ præſertim, Apſides non penitus quieſcere; ſed motu quodam lento ferri in conſequentia: reſponderi poteſt, etiamſi concedamus hunc motum tardiſſimum exinde profectum eſſe, quòd vis centripetæ proportio aberret aliquantum à duplicatâ, aberrationem illam per computum mathematicum inveniri poſſe & planè inſenſibilem eſſe. Ipſa enim ratio vis centripetæ lunaris, quæ omnium maximè turbari debet, paululum quidem duplicatam ſuperabit; ad hanc verò ſexaginta ferè vicibus propius accedet quàm ad triplicatam. Sed verior erit reſponſio, ſi dicamus hanc Apſidum progreſſionem, non ex aberratione à duplicatâ proportione, ſed ex aliâ prorſus diverſâ cauſâ oriri, quemadmodum egregiè commonſtratur in hâc Philoſophiâ. Reſtat ergo ut vires centripetæ, quibus Planetæ primarii tendunt verſus Solem & ſecundarii verſus primarios ſuos, ſint accuratè ut quadrata diſtantiarum reciprocè.

Ex iis quæ hactenus dicta ſunt, conſtat Planetas in orbitis ſuis retineri per vim aliquam in ipſos perpetuò agentem: conſtat vim illam dirigi ſemper verſus orbitarum centra: conſtat hujus efficaciam augeri in acceſſu ad centrum, diminui in receſſu ab eodem: & augeri quidem in eâdem proportione qua diminuitur quadratum diſtantiæ, diminui in eâdem proportione quâ diſtantiæ quadratum augetur. Videamus jam, comparatione inſtitutâ inter Planetarum vires centripetas & vim Gravitatis, annon ejuſdem fortè ſint generis. Ejuſdem verò generis erunt, ſi deprehendantur hinc & inde leges eædem, eædemque affectiones. Primo itaque Lunæ, quæ nobis proxima eſt, vim centripetam expendamus.

Spatia rectilinea, quæ à corporibus è quiete demiſſis dato tempore ſub ipſo motûs initio deſcribuntur, ubi à viribus quibuſcunque urgentur, proportionalia ſunt ipſis viribus: hoc utique conſequitur ex ratiociniis mathematicis. Erit igitur vis centripetæ Lunæ in orbitâ ſuâ revolvens, ad vim Gravitatis in ſuperficie Terræ, ut ſpatium, quod tempore quàm minimo deſcriberet Luna, deſcendendo per vim centripetam verſus Terram, ſi circulari omni motu privari fingeretur, ad ſpatium, quod eodem tempore quàm minimo deſcribet grave corpus in viciniâ Terræ, per vim Gravitatis ſuæ cadendo. Horum ſpatiorum prius æquale eſt arcûs, à Lunâ per idem tempus deſcripti, ſinui verſo; quippe qui Lunæ tranſlationem de Tangente, factam à vi centripetâ, metitur; atque adeo computari poteſt ex datis tum Lunæ tempore periodico, tum diſtantiâ ejus à centro Terræ. Spatium poſterius invenitur per experimenta Pendulorum, quemadmodum docuit *Hugenius*. Inito itaque calculo, ſpatium prius ad ſpatium poſterius, ſeu vis centripeta Lunæ, in orbitâ ſuâ revolventis, ad vim Gravitatis in ſuperficie Terræ, erit ut quadratum ſemidiametri Terræ ad orbitæ ſemidiametri quadratum. Eandem habet rationem, per ea quæ ſuperius oſtenduntur, vis centripeta Lunæ, in orbitâ ſuâ revolventis, ad vim Lunæ centripetam prope Terræ ſuperficiem. Vis itaque centripeta prope Terræ ſuperficiem æqualis eſt vi Gravitatis. Non ergo diverſæ ſunt vires, ſed una

atque

atque eadem: ſi enim diverſæ eſſent, corpora viribus conjunctis duplo celerius in Terram caderent quàm ex vi ſolâ Gravitatis. Conſtat igitur vim illam centripetam, quâ Luna perpetuò de Tangente vel trahitur vel impellitur, & in orbitâ retinetur, ipſam eſſe vim Gravitatis terreſtris ad Lunam uſque pertingentem. Et rationi quidem conſentaneum eſt, ut ad ingentes diſtantias illa ſeſe virtus extendat, cùm nullam ejus ſenſibilem imminutionem, vel in altiſſimis montium cacuminibus, obſervare licet. Gravitat itaque Luna in Terram: quin & actione mutuâ, Terra viciſſim in Lunam æqualiter gravitat: id quod abunde quidem confirmatur in hâc Philoſophiâ, ubi agitur de Maris Æſtu & Æquinoctorum Præceſſione, ab actione tum Lunæ tum Solis in Terram oriundis. Hinc & illud tandem edocemur, quâ nimirum lege vis Gravitatis decreſcat in majoribus à Tellure diſtantiis. Nam cùm Gravitatis non diverſa ſit à vi centripetâ Lunari, hæc verò ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ; diminuetur & Gravitas in eâdem ratione.

Progrediamur jam ad Planetas reliquos. Quoniam revolutiones primariorum circa Solem & ſecundariorum circa Jovem & Saturnum ſunt phænomena generis ejuſdem ac revolutio Lunæ circa Terram, quoniam porro demonſtratum eſt vires centripetas primariorum dirigi verſus centrum Solis, ſecundariorum verſus centra Jovis & Saturni, quemadmodum Lunæ vis centripeta verſus Terræ centrum dirigitur; adhæc, quoniam omnes illæ vires ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centris, quemadmodum vis Lunæ eſt ut quadratum diſtantiæ à Terræ: concludendum erit eandem eſſe naturam univerſis. Itaque ut Luna gravitat in Terram, & Terra viciſſim in Lunam; ſic etiam gravitabunt omnes ſecundarii in primarios ſuos, & primarii viciſſim in ſecundarios; ſic & omnes primarii in Solem, & Sol viciſſim in primarios.

Igitur Sol in Planetas univerſos gravitat, & univerſi in Solem. Nam ſecundarii dum primarios ſuos comitantur, revolvuntur interea circum Solem unà cum primariis. Eodem itaque argumento, utriuſque generis Planetæ gravitant in Solem, & Sol in ipſos. Secundarios verò Planetas in Solem gravitare, abunde inſuper conſtat ex inæqualitatibus lunaribus; quarum accuratiſſimam Theoriam, admirandâ ſagacitate patefactam, in Tertio hujus Operis Libro expoſitam habemus.

Solis virtutem attractivam quoquoverſum propagari ad ingentes uſque diſtantias, & ſeſe diffundere ad ſingulas circumjecti ſpatii partes, apertiſſimè colligi poteſt ex motu Cometarum; qui ab immenſis intervallis profecti feruntur in viciniam Solis, & nonnunquam adeo ad ipſum proximè accedunt, ut globum ejus, in periheliis ſuis verſantes, tantùm non contingere videantur. Horum Theoriam, ab Aſtronomis antehac fruſtra quæſitam, noſtro tandem ſeculo feliciter inventam & per obſervationes certiſſimè demonſtratam præſtantiſſimo noſtro Auctori debemus. Patet igitur Cometas in Sectionibus Conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, & radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales deſcribere. Ex hiſce verò phænomenis manifeſtum eſt & mathematicè comprobatur, vires illas, quibus Cometæ retinentur in orbitis ſuis, reſpicere Solem, &

eſſe

eſſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum ab ipſius centro. Gravitant itaque Cometæ in Solem: atque adeo Solis vis attractiva non tantùm ad corpora Planetarum, in datis diſtantiis, & in eodem ferè plano collocata, ſed etiam ad Cometas, in diverſiſſimis cælorum regionibus & in diverſiſſimis diſtantiis poſitos, pertingit. Hæc igitur eſt natura corporum gravitantium, ut vires ſuas edant ad omnes diſtantias in omnia corpora gravitantia. Inde verò ſequitur, Planetas & Cometas univerſos ſe mutuò trahere, & in ſe mutuò graves eſſe: quod etiam confirmatur ex perturbatione Jovis & Saturni, Aſtronomis non incognitâ, & ab actionibus horum Planetarum in ſe invicem oriundâ; quin & ex motu illo lentiſſimo Apſidum, qui ſuprà memoratus eſt, quique à cauſâ conſimili proficiſcitur.

Eo demum pervenimus ut dicendum ſit, & Terram & Solem & corpora omnia cæleſtia, quæ Solem comitantur, ſe mutuò attrahere. Singulorum ergo particulæ quæque minimæ vires ſuas attractivas habebunt, pro quantitate materiæ pollentes; quemadmodum ſuprà de Terreſtribus oſtenſum eſt. In diverſis autem diſtantiis, erunt & harum vires in duplicatâ ratione diſtantiarum reciprocè: nam ex particulis hâc lege trahentibus componi debere globos eâdem lege trahentes, mathematicè demonſtratur.

Concluſiones præcedentes huic innituntur Axiomati, quod à nullis non recipitur Philoſophis; Effectuum ſcilicet ejuſdem generis, quorum nempe quæ cognoſcuntur proprietates eædem ſunt, eaſdem eſſe Cauſas, & eaſdem eſſe proprietates quæ nondum cognoſcuntur. Quis enim dubitat, ſi Gravitas ſit cauſa deſcenſûs lapidis in *Europâ*, quin eadem ſit cauſa deſcenſûs in *Americâ?* Si Gravitas mutua fuerit inter lapidem & Terram in *Europâ*; quis negabit mutuam eſſe in *Americâ?* Si vis attractiva lapidis & Terræ componatur, in *Europâ*, ex viribus attractivis partium; quis negabit ſimilem eſſe compoſitionem in *Americâ?* Si attractio Terræ ad omnia corporum genera, & ad omnes diſtantias, propagetur in *Europâ*; quidni pariter propagari dicamus in *Americâ?* In hâc Regulâ fundatur omnis Philoſophia: quippe quâ ſublatâ nihil affirmare poſſimus de univerſis. Conſtitutio rerum ſingularum innoteſcit per Obſervationes & Experimenta: inde verò non niſi per hanc Regulam de rerum univerſarum naturâ judicamus.

Jam cùm gravia ſint omnia corpora, quæ apud Terram vel in Cælis reperiuntur, de quibus experimenta vel obſervationes inſtituere licet; omnino dicendum erit, Gravitatem corporibus univerſis competere. Et quemadmodum nulla concipi debent corpora, quæ non ſint Extenſa, Mobilia & Impenetrabilia; ita nulla concipe debere, quæ non ſint Gravia. Corporum Extenſio, Mobilitas, & Impenetrabilitas non niſi per experimenta innoteſcunt: eodem planè modo Gravitas innoteſcit. Corpora omnia de quibus obſervationes habemus, Extenſa ſunt & Mobilia & Impenetrabilia: & inde concludimus corpora univerſa, etiam illa de quibus obſervationes non habemus, Extenſa eſſe & Mobilia & Impenetrabilia. Ita corpora omnia ſunt

(a) Profecto ſi illud velit Coteſius, Gravitatem naturali quâdam neceſſitate corporibus omnibus quâ corpora ſunt ineſſe, ſicut horum quidque, extendi, moveri poſſe, penetrari (ut plerique exiſtimant) non poſſe naturali neceſſitate, quà corpora, illis ineſt, illud vult quod à mente Newtoni alieniſſimum eſt. (Vide Præfationem in Editionem Opticês Secundam. *To ſhew that I do not take Gravity for an eſſential Property of Bodies, I have added one Queſtion concerning its Cauſe.*)

ſunt Gravia, de quibus obſervationes habemus: & inde concludimus corpora univerſa, etiam illa de quibus obſervationes non habemus, Gravia eſſe. Si quis dicat corpora ſtellarum inerrantium non eſſe gravia, quandoquidem eorum gravitas nondum eſt obſervata; eodem argumento dicere licebit neque extenſa eſſe, nec mobilia, nec impenetrabilia, cùm hæ Fixarum affectiones nondum ſint obſervatæ. Quid opus eſt viribus? inter primarias qualitates corporum univerſorum vel Gravitas habebit locum; vel Extenſio, Mobilitas, & Impenetrabilitas non habebunt. Et Natura Rerum vel rectè explicabitur per corporum Gravitatem, vel non rectè explicabitur per corporum Extenſionem, Mobilitatem, & Impenetrabilitatem (a).

Audio nonnullos hanc improbare concluſionem, & de occultis qualitatibus neſcio quid muſſitare. Gravitatem ſcilicet Occultum eſſe quid, perpetuò argutari ſolent; occultas verò cauſas procul eſſe ablegandas à Philoſophiâ. His autem facilè reſpondetur; occultas eſſe cauſas, non illas quidem quarum exiſtentia per obſervationes clariſſimè demonſtratur, ſed his ſolùm quarum occulta eſt & ficta exiſtentia, nondum verò comprobata. Gravitas ergo non erit occulta cauſa motuum cæleſtium; ſiquidem ex phænomenis oſtenſum eſt, hanc virtutem reverâ exiſtere. Hi potius ad occultas fugiunt cauſas; qui neſcio quos Vortices, materiæ cujuſdam prorſus fictitiæ & ſenſibus omnino ignotæ, motibus iiſdem regendis præficiunt.

Ideone autem Gravitas occulta cauſa dicetur, eoque nomine rejicietur è Philoſophiâ, quòd cauſa ipſius Gravitatis occulta eſt & nondum inventa? Qui ſic ſtatuunt, videant nequid ſtatuant abſurdi, unde totius tandem Philoſophiæ fundamenta convellantur. Etenim cauſæ continuo nexu procedere ſolent à compoſitis ad ſimpliciora; ubi ad cauſam ſimpliciſſimam perveneris, jam non licebit ulterius progredi. Cauſæ igitur ſimpliciſſimæ nulla dari poteſt mechanica explicatio: ſi daretur enim, cauſa nondum eſſet ſimpliciſſima. Has tu proinde cauſas ſimpliciſſimas appellabis occultas, & exulare jubebis? Simul verò exulabunt & ab his proximè pendentes, & quæ ab illis porro pendent, uſque dum à cauſis omnibus vacua fuerit & probè purgata Philoſophia.

Sunt qui Gravitatem præter naturam eſſe dicunt, & Miraculum perpetuum vocant. Itaque rejiciendam eſſe volunt, cùm in Phyſicâ præternaturales cauſæ locum non habeant. Huic ineptæ prorſus objectioni diluendæ, quæ & ipſa Philoſophiam ſubruit univerſam, vix operæ pretium eſt immorari. Vel enim Gravitatem corporibus omnibus inditam eſſe negabunt, quod tamen dici non poteſt: vel eo nomine præter naturam eſſe affirmabunt, quod ex aliis corporum affectionibus, atque adeo ex cauſis Mechanicis, originem non habeat. Dantur certè primariæ corporum affectiones; quæ, quoniam ſunt primariæ, non pendent ab aliis. Viderint igitur annon & hæ omnes ſint pariter præter naturam, eoque pariter rejiciendæ: viderint verò qualis ſit deinde futura Philoſophia.

Nonnulli ſunt quibus hæc tota Phyſica celeſtis vel ideo minùs placet, quòd

quòd cum *Cartesii* dogmatibus pugnare, & vix conciliari posse videatur. His suâ licebit opinione frui; ex æquo autem agant oportet: non ergo denegabunt aliis eandem libertatem, quam sibi concedi postulant. NEWTONIANAM itaque Philosophiam, quæ nobis verior habetur, retinere & amplecti licebit, & causas sequi per phænomena comprobatas, potius quàm fictas & nondum comprobatas. Ad veram Philosophiam pertinet, rerum naturas ex causis verè existentibus derivare: eas verò leges quærere, quibus voluit summus Opifex hunc Mundi pulcherrimum ordinem stabilire; non eas quibus potuit, si ita visum fuisset. Rationi enim consonum est, ut à pluribus causis, ab invicem nonnihil diversis, idem possit effectus proficisci: hæc autem vera erit causa, ex quâ verè atque actu proficiscitur; reliquæ locum non habent in Philosophia verâ. In Horologiis automatis idem indicis horarii motus vel ab appenso Pondere, vel ab intus concluso Elatere, oriri potest. Quòd si oblatum Horologium reverâ sit instructum Pondere; ridebitur qui finget Elaterem, & ex hypothesi sic præproperè confictâ motum indicis explicare suscipiet: oportuit enim internam machinæ fabricam penitius perscrutari, ut ita motûs propositi principium verum exploratum habere possèt. Idem vel non absimile feretur judicium de Philosophis illis, qui materiâ quâdam subtilissimâ cælos esse repletos, hanc autem in Vortices indefinentur agi voluerunt. Nam si Phænomenis vel accuratissimè satisfacere possent ex hypothesibus suis; veram tamen Philosophiam tradidisse, & veras causas motuum cælestium invenisse nondum dicendi sunt; nisi vel has reverâ existere, vel saltem alias non existere demonstraverint. Igitur si ostensum fuerit, universorum corporum Attractionem habere verum locum in Rerum Naturâ; quinetiam ostensum fuerit, quâ ratione motus omnes cælestes abinde solutionem recipiant; vana fuerit & merito deridenda objectio, si quis dixerit eosdem motus per Vortices explicari debere, etiamsi id fieri posse vel maximè concesserimus. Non autem concedimus. Nequeunt enim ullo pacto Phænomena per Vortices explicari; quod ab Auctore nostro abunde quidem & clarissimis rationibus evincitur; ut somnis plus æquo indulgeant oporteat, qui ineptissimo figmento resarciendo, novisque porro commentis ornando, infelicem operam addicunt.

Si corpora Planetarum & Cometarum circa Solem deferantur à vorticibus; oportet corpora delata & vorticum partes proximè ambientes eâdem velocitate, eâdemque cursûs determinatione moveri, & eandem habere densitatem, vel eandem vim inertiæ pro mole materiæ. Constat verò Planetas & Cometas, dum versantur in iisdem regionibus cælorum, velocitatibus variis variâque cursûs determinatione moveri. Necessario itaque sequitur, ut Fluidi cælestis partes illæ, quæ sunt ad easdem distantias à Sole, revolvantur eodem tempore in plagas diversas, cum diversis velocitatibus: etenim aliâ opus erit directione & velocitate, ut transire possint Planetæ; aliâ, ut transire possint Cometæ. Quod cùm explicari nequeat; vel fatendum erit, universa corpora cælestia non deferri à materiâ vorticis; vel dicendum erit, eorundem motus repetendos esse non ab uno eodemque vortice, sed à pluribus, qui ab invicem diversi sint, idemque spatium Soli circumjectum pervadant.

Si

Si plures Vortices in eodem spatio contineri, & sese mutuò penetrare, motibusque diversis revolvi ponantur; quoniam hi motus debent esse conformes delatorum corporum motibus, qui sunt summè regulares, & peraguntur in Sectionibus Conicis nunc valde eccentricis, nunc ad Circulorum proximè formam accedentibus; jure quærendum erit, quî fieri possit, ut iidem integri conserventur, nec ab actionibus materiæ occursantis per tot secula quicquam perturbentur. Sane si motus hi fictitii sunt magis compositi & difficiliùs explicantur, quàm veri illi motus Planetarum & Cometarum; frustra mihi videntur in Philosophiam recipi: omnis enim causa debet esse effectu suo simplicior. Concessâ fabularum licentiâ, affirmaverit aliquis Planetas omnes & Cometas circumcingi Atmosphæris, adinstar Telluris nostræ; quæ quidem hypothesis rationi magis consentanea videbitur, quàm hypothesis Vorticum. Affirmaverit deinde has Atmosphæras, ex naturâ suâ, circa Solem moveri & Sectiones conicas describere; qui sane motus multo faciliùs concipi potest, quàm consimilis motus vorticum se invicem permeantium. Denique Planetas ipsos & Cometas circa Solem deferri ab Atmosphæris suis credendum esse statuat, &, ob repertas motuum cælestium causas, triumphum agat. Quisquis autem hanc fabulam rejiciendam esse putet, idem & alteram fabulam rejiciet: nam ovum non est ovo similius, quàm hypothesis Atmosphærarum hypothesi Vorticum.

Docuit *Galilæus*, lapidis projecti, & in Parabolâ moti, deflexionem à cursu rectilineo oriri à Gravitate lapidis in Terram, ab occultâ scilicet qualitate. Fieri tamen potest ut alius aliquis, nasi acutioris, Philosophus causam aliam comminiscatur. Finget igitur ille materiam quandam subtilem, quæ nec visu, nec tactu, neque ullo sensu percipitur, versari in regionibus, quæ proximè contingunt Telluris superficiem. Hanc autem materiam, in diversas plagas, variis & plerumque contrariis motibus ferri, & lineas Parabolicas describere contendet. Deinde verò lapidis deflexionem pulchrè sic expediet, & vulgi plausum merebitur. Lapis, inquiet, in Fluido illo subtili natat, & cursui ejus obsequendo, non potest non eandem unà semitam describere. Fluidum vero movetur in lineis Parabolicis; ergo lapidem in Parabolâ moveri necesse est. Quis nunc non mirabitur acutissimum hujusce Philosophi ingenium, ex causis Mechanicis, materiâ scilicet & motu, phænomena naturæ ad vulgi etiam captum præclarè deducentis? Quis verò non subsannabit bonum illum *Galilæum*, qui magno molimine mathematico qualitates occultas, è Philosophiâ feliciter exclusas, denuo revocare sustinuerit? Sed pudet nugis diutius immorari.

Summa rei huc tandem redit: Cometarum ingens est numerus; motus eorum sunt summè regulares, & easdem leges cum Planetarum motibus observant. Moventur in orbibus Conicis; hi orbes sunt valdè admodum eccentrici. Feruntur undique in omnes cælorum partes, & Planetarum regiones liberrimè pertranseunt, & sæpe contra signorum ordinem incedunt. Hæc phænomena certissimè confirmantur ex Observationibus Astronomicis: & per Vortices nequeunt explicari. Imò, ne quidem cum vorticibus Planetarum consistere possunt. Cometarum motibus omnino locus non erit; nisi materia illa fictitia penitus è cælis amoveatur.

Si

Si enim Planetæ circum Solem à Vorticibus devehuntur; vorticum partes, quæ proximè ambiunt unumquemque Planetam, ejusdem densitatis erunt ac Planeta; uti suprà dictum est. Itaque materia illa omnis, quæ contigua est orbis magni perimetro, parem habebit ac Tellus densitatem: quæ verò jacet intra orbem magnum atque orbem Saturni, vel parem vel majorem habebit. Nam ut constitutio vorticis permanere possit, debent partes minùs densæ centrum occupare, magis densæ longius à centro abire. Cùm enim Planetarum tempora periodica sint in ratione sesquiplicatâ distantiarum à Sole, oportet partium vorticis periodos eandem rationem servare. Inde verò sequitur, vires centrifugas harum partium fore reciprocè ut quadrata distantiarum. Quæ igitur majore intervallo distant à centro, nituntur ab eodem recedere minore vi: unde si minùs densæ fuerint, necesse est ut cedant vi majori, quâ partes centro propiores ascendere conantur. Ascendent ergo densiores, descendent minùs densæ, & locorum fiet invicem permutatio; donec ita fuerit disposita atque ordinata materia fluida totius vorticis, ut conquiescere jam possit in æquilibrio constituta. Si bina Fluida, quorum diversa est densitas, in eodem vase continentur; utique futurum est ut Fluidum, cujus major est densitas, majore vi gravitatis infimum petat locum: & ratione non absimili omnino dicendum est, densiores vorticis partes, majore vi centrifugâ, petere supremum locum. Tota igitur illa & multo maxima pars vorticis, quæ jacet extra Telluris orbem, densitatem habebit, atque adeo vim inertiæ, pro mole materiæ, quæ non minor erit quàm densitas & vis inertiæ Telluris: inde verò Cometis trajectis orietur ingens resistentia, & valdè admodum sensibilis; ne dicam, quæ motum eorundem penitus sistere atque absorbere posse merito videatur. Constat autem ex motu Cometarum prorsus regulari, nullam ipsos resistentiam pati, quæ vel minimum sentiri potest; atque adeo neutiquam in materiam ullam incursare, cujus aliqua sit vis resistendi, vel proinde cujus aliqua sit densitas seu vis inertiæ. Nam resistentia Mediorum oritur vel ab inertiâ materiæ fluidæ, vel à defectu lubricitatis. Quæ oritur à defectu lubricitatis, admodum exigua est; & sane vix observari potest in Fluidis vulgo notis, nisi valde tenacia fuerint adinstar Olei & Mellis. Resistentia quæ sentitur in Aëre, Aquâ, Hydrargyro, & hujusmodi Fluidis non tenacibus, ferè tota est prioris generis; & minui non potest per ulteriorem quemcunque gradum subtilitatis, manente Fluidi densitate vel vi inertiæ, cui semper proportionalis est hæc resistentia; quemadmodum clarissimè demonstratum est ab Auctore nostro in peregregiâ Resistentiarum Theoriâ, quæ paulo nunc accuratiùs exponitur, hâc secundâ vice, & per Experimenta corporum cadentium pleniùs confirmatur.

Corpora progrediendo motum suum Fluido ambienti paulatim communicant, & communicando amittunt, amittendo autem retardantur. Est itaque retardatio motui communicato proportionalis; motus verò communicatus, ubi datur corporis progredientis velocitas, est ut Fluidi densitas; ergo retardatio, seu Resistentia, erit ut eadem Fluidi densitas; neque ullo pacto tolli potest, nisi à Fluido, ad partes corporis posticas recurrente, restituatur motus amissus. Hoc autem dici non poterit, nisi impressio Fluidi in

in corpus ad partes posticas æqualis fuerit impressioni corporis in Fluidum ad partes anticas; hoc est, nisi velocitas relativa, quâ Fluidum irruit in corpus à tergo, æqualis fuerit velocitati quâ corpus irruit in Fluidum; id est, nisi velocitas absoluta Fluidi recurrentis duplo major fuerit, quàm velocitas absoluta Fluidi propulsi; quod fieri nequit. Nullo igitur modo tolli potest Fluidorum resistentia, quæ oritur ex eorundem densitate & vi inertiæ. Itaque concludendum erit; Fluidi cælestis nullam esse vim inertiæ, cùm nulla sit vis resistendi: nullam esse vim quâ motus communicetur, cùm nulla sit vis inertiæ: nullam esse vim quâ mutatio quælibet vel corporibus singulis, vel pluribus, inducatur, cùm nulla sit vis quâ motus communicetur; nullam esse omnino efficaciam, cùm nulla sit facultas mutationem quamlibet inducendi. Quidni ergo hanc hypothesin, quæ fundamento plane destituitur, quæque Naturæ Rerum explicandæ ne minimum quidem inservit, ineptissimam vocare liceat, & Philosopho prorsus indignam. Qui cælos materiâ fluidâ repletos esse volunt, hanc verò non inertem esse statuunt; hi verbis tollunt Vacuum, re ponunt. Nam cùm hujusmodi materia fluida ratione nullâ secerni possit ab inani spatio; disputatio tota fit de rerum nominibus, non de naturis. Quòd si aliqui sint adeo usque dediti materiæ, ut spatium à corporibus vacuum nullo pacto admittendum credere velint; videamus quò tandem oporteat illos pervenire.

Vel enim dicent hanc, quam confingunt, Mundi per omnia pleni constitutionem ex voluntate Dei profectam esse, propter eum finem, ut operationibus naturæ subsidium præsens haberi posset ab Æthere subtilissimo cuncta permeante & implente; quod tamen dici non potest, siquidem jam ostensum est ex Cometarum phænomenis, nullam esse hujus Ætheris efficaciam: vel dicent ex voluntate Dei profectam esse, propter finem aliquem ignotum; quod neque dici debet, siquidem diversa Mundi constitutio eodem argumento pariter stabiliri posset: vel denique non dicent ex voluntate Dei profectam esse, sed ex necessitate quâdam naturæ. Tandem igitur delabi oportet in fæces sordidas gregis impurissimi. Hi sunt qui somniant Fato universa regi, non Providentiâ; materiam ex necessitate suâ semper & ubique extitisse, infinitam esse & æternam. Quibus positis, erit etiam undiquaque uniformis: nam varietas formarum cum necessitate omnino pugnat. Erit etiam immota: nam si necessario moveatur in plagam aliquam determinatam, cum determinatâ aliquâ velocitate; pari necessitate movebitur in plagam diversam cum diversâ velocitate; in plagas autem diversas, cum diversis velocitatibus, moveri non potest; oportet igitur immotam esse. Neutiquam profecto potuit oriri Mundus, pulcherrimâ formarum & motuum varietate distinctus, nisi ex liberrimâ voluntate cuncta providentis & gubernantis Dei.

Ex hoc igitur fonte promanârunt illæ omnes quæ dicuntur Naturæ leges: in quibus multa sane sapientissimi consilii, nulla necessitatis apparent vestigia. Has proinde non ab incertis conjecturis petere, sed observando atque experiendo addiscere debemus. Qui veræ Physicæ principia legesque rerum, solâ mentis vi & interno rationis lumine fretum, invenire se posse confidit; hunc oportet vel statuere Mundum ex necessitate fuisse, Legesque propositas

propositas ex eâdem necessitate sequi; vel si per voluntatem Dei constitutus sit ordo Naturæ, se tamen, homuncionem misellum, quid optimum factu sit perspectum habere. Sana omnis & vera Philosophia fundatur in Phænomenis rerum: quæ si nos vel invitos & reluctantes ad hujusmodi principia deducunt, in quibus clarissimè cernuntur consilium optimum & dominium summum sapientissimi & potentissimi Entis; non erunt hæc ideo non admittenda principia, quod quibusdam forsan hominibus minùs grata sint futura. His vel Miracula vel Qualitates Occultæ dicantur, quæ displicent: verùm nomina malitiosè indita non sunt ipsis rebus vitio vertenda; nisi illud fateri tandem velint, utique debere Philosophiam in Atheismo fundari. Horum hominum gratiâ non erit labefactanda Philosophia, siquidem rerum ordo non vult immutari.

Obtinebit igitur apud probos & æquos judices præstantissima philosophandi ratio, quæ fundatur in Experimentis & Observationibus. Huic verò, dici vix poterit, quanta lux accedat, quanta dignitas, ab hoc Opere præclaro illustrissimi nostri Auctoris; cujus eximiam ingenii felicitatem, difficillima quæque Problemata enodantis, & ad ea porro pertingentis, ad quæ nec spes erat humanam mentem assurgere potuisse, merito admirantur & suspiciunt quicunque paulo profundiùs in hisce rebus versati sunt. Claustris ergo reseratis, aditum nobis aperuit ad pulcherrima rerum mysteria. Systematis Mundani compagem elegantissimam ita tandem patefecit, & penitius perspectandam dedit; ut nec ipse, si nunc revivisceret, Rex *Alphonsus* vel simplicitatem vel harmoniæ gratiam in eâ desideraret. Itaque Naturæ majestatem propiùs jam licet intueri, & dulcissimâ contemplatione frui; Conditorem verò ac Dominum universorum impensiùs colere & venerari, qui fructus est Philosophiæ multo uberrimus. Cæcum esse oportet, qui ex optimis & sapientissimis rerum structuris non statim videat Fabricatoris Omnipotentis infinitam sapientiam & bonitatem: insanum, qui profiteri nolit.

Extabit igitur eximium NEWTONI Opus adversus Atheorum impetus munitissimum præsidium: neque enim alicunde feliciùs, quàm ex hâc pharetrâ, contra impiam catervam tela deprompseris. Hoc sensit pridem, & in pereruditis concionibus anglicè latinéque editis, primus egregiè demonstravit Vir in omni Literarum genere præclarus, idemque bonarum Artium fautor eximius RICHARDUS BENTLEIUS, Sæculi sui & Academiæ nostræ magnum ornamentum, Collegii nostri *S. Trinitatis* Magister dignissimus & integerrimus. Huic ego me pluribus nominibus obstrictum fateri debeo: huic & tuas quæ debentur gratias, Lector benevole, non denegabis. Is enim, cùm à longo tempore celeberrimi Auctoris amicitiâ intimâ frueretur (quâ etiam apud Posteros censeri non minoris æstimat, quàm propriis scriptis quæ literato orbi in deliciis sunt inclarescere) amici simul famæ & scientiarum incremento consuluit. Itaque cùm exemplaria prioris Editionis rarissima admodum & immani pretio coëmenda superessent; suasit ille crebris efflagitationibus, & tantùm non objurgando perpulit denique Virum præstantissimum, nec modestiâ minùs quàm eruditione summâ insignem,

nem, ut novam hanc Operis Editionem, per omnia elimatam denuò & egregiis insuper accessionibus ditatam, suis sumptibus & auspiciis prodire pateretur. Mihi verò, pro jure suo, pensum non ingratum demandavit, ut quàm posset emendatè id fieri curarem.

Cantabrigiæ,
Maii 12, 1713.

ROGERUS COTES Collegii *S. Trinitatis* Socius,
Astronomiæ & Philosophiæ Experimentalis
Professor *Plumianus*.

AUCTORIS

AUCTORIS PRÆFATIO

IN

EDITIONEM TERTIAM.

IN Editione hâcce Tertiâ, quam Henricus Pemberton, M. D. *vir harum rerum peritissimus curavit, nonnulla in Libro Secundo de Resistentiâ Mediorum paulò fusiùs explicantur quàm antea, & adduntur Experimenta nova de Resistentiâ gravium quæ cadunt in Aëre. In Libro Tertio argumentum, quo Lunam in orbe suo per Gravitatem retineri probatur, paulo fusiùs exponitur: & novæ adduntur Observationes de proportione diametrorum Jovis ad invicem à D.* Poundio *factæ. Adduntur etiam observationes aliquot Cometæ illius qui anno* 1680 *apparuit, à D.* Kirk *mense Novembri in* Germaniâ *habitæ, quæ nuper ad manus nostras venerunt, & quarum ope constet quàm propè orbes Parabolici motibus Cometarum respondent. Et orbita Cometæ illius, computante* Halleio, *paulo accuratiùs determinatur quàm antea, idque in Ellipsi. Et ostenditur Cometam in hâc orbitâ Ellipticâ, per novem cælorum signa, non minus accuratè cursum peregisse, quàm solent Planetæ in orbitis Ellipticis per Astronomiam definitis moveri. Orbis etiam Cometæ qui anno* 1723 *apparuit, à D.* Bradleio *Astronomiæ apud* Oxonienses *Professore computatus adjicitur.*

Dabam *Londini*,
Jan. 12, 1725-6.

IS. NEWTON.

ARGU-

ARGUMENTA CAPITUM

LIBRI PRIMI PRINCIPIORUM.

	Definitiones.	Pag. 1
	Axiomata, sive Leges Motus.	13
SECT. I.	*De Methodo Rationum Primarum & Ultimarum.*	30
SECT. II.	*De inventione Virium Centripetarum.*	41
SECT. III.	*De motu corporum in Conicis Sectionibus eccentricis.*	68
SECT. IV.	*De inventione Orbium Ellipticorum, Parabolicorum & Hyperbolicorum ex Umbilico dato.*	87
SECT. V.	*De inventione Orbium ubi Umbilicus neuter datur.*	94
SECT. VI.	*De inventione Motuum in Orbibus datis.*	124
SECT. VII.	*De corporum Ascensu & Descensu rectilineo.*	139
SECT. VIII.	*De inventione Orbium in quibus corpora viribus quibuscunque centripetis agitata revolvuntur.*	153
SECT. IX.	*De Motu Corporum in Orbibus mobilibus, deque Motu Apsidum.*	161
SECT. X.	*De Motu corporum in Superficiebus datis, deque Funependulorum Motu reciproco.*	175
SECT. XI.	*De Motu corporum viribus centripetis se mutuò petentium.*	190
SECT. XII.	*De corporum Sphæricorum Viribus Attractivis.*	219
SECT. XIII.	*De corporum non Sphæricorum Viribus Attractivis.*	238
SECT. XIV.	*De Motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad singulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.*	254

ARGU-

ARGUMENTA CAPITUM

LIBRI SECUNDI PRINCIPIORUM.

SECT. I.	*De Motu corporum quibus resistitur in ratione Velocitatis.*	Pag. 262
SECT. II.	*De Motu corporum quibus resistitur in duplicatâ ratione velocitatis.*	273
SECT. III.	*De Motu corporum quibus resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ.*	306
SECT. IV.	*De corporum Circulari motu in Mediis resistentibus.*	319
SECT. V.	*De densitate & compressione Fluidorum, deque Hydrostaticâ.*	333
SECT. VI.	*De Motu & Resistentiâ corporum Funependulorum.*	348
SECT. VII.	*De Motu Fluidorum & Resistentiâ Projectilium.*	381
SECT. VIII.	*De Motu per Fluida propagato.*	431
SECT. IX.	*De Motu Circulari Fluidorum.*	447

PHILO-

PHILOSOPHIÆ NATURALIS

PRINCIPIA MATHEMATICA.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

Quantitas materiæ est mensura ejusdem orta ex illius densitate et magnitudine conjunctim.

AER densitate duplicatâ, in spatio etiam duplicato, fit quadruplus; in triplicato sextuplus. Idem intellige de nive & pulveribus per compressionem vel liquefactionem condensatis. Et par est ratio corporum omnium, quæ per causas quascunque diversimodè condensantur. Medii interea, si quod fuerit, interstitia partium liberè pervadentis, hîc nullam rationem habeo. Hanc autem quantitatem sub nomine Corporis, vel Massæ, in sequentibus passim intelligo. Innotescit ea per corporis cujusque

pondus:

DEFINITIONES.

pondus: nam ponderi proportionalem esse reperi per experimenta pendulorum accuratissimè instituta, uti posthac docebitur.

DEFINITIO II.

Quantitas motûs est mensura ejusdem orta ex velocitate et quantitate materiæ conjunctim.

Motus totius est summa motuum in partibus singulis; ideoque in corpore duplo majore, æquali cum velocitate, duplus est, & duplâ cum velocitate quadruplus.

DEFINITIO III.

Materiæ vis insita est potentia resistendi, quâ corpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Hæc semper proportionalis est suo corpori, neque differt quicquam ab inertiâ massæ, nisi in modo concipiendi. Per inertiam materiæ fit, ut corpus omne de statu suo, vel quiescendi, vel movendi, difficulter deturbetur. Unde etiam vis insita nomine significantissimo vis inertiæ dici possit. Exercet verò corpus hanc vim solummodo in mutatione statûs sui per vim aliam, in se impressam, factâ; estque exercitium illud sub diverso respectu & Resistentia & Impetus: Resistentia, quatenus corpus ad conservandum statum suum reluctatur vi impressæ; Impetus, quatenus corpus idem, vi resistentis obstaculi difficulter cedendo, conatur statum obstaculi illius mutare. Vulgus resistentiam quiescentibus & impetum moventibus tribuit: sed motus & quies, uti vulgo concipiuntur, respectu solo distinguuntur ab invicem; neque semper verè quiescunt, quæ vulgo tanquam quiescentia spectantur.

DEFINITIO IV.

Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Consistit hæc vis in actione solâ, neque post actionem permanet

DEFINITIONES.

net in corpore. Perseverat enim corpus in statu omni novo per solam vim inertiæ. Est autem vis impressa diversarum originum, ut ex ictu, ex pressione, ex vi centripetâ.

DEFINITIO V.

Vis centripeta est, quâ corpora versus punctum aliquod, tanquam ad centrum, undique trahuntur, impelluntur, vel utcunque tendunt.

Hujus generis est gravitas, quâ corpora tendunt ad centrum terræ; vis magnetica, quâ ferrum petit magnetem; & vis illa, quæcunque sit, quâ planetæ perpetuò retrahuntur à motibus rectilineis, & in lineis curvis revolvi coguntur. Lapis, in fundâ circumactus, à circumagente manu abire conatur; & conatu suo fundam distendit, eoque fortiùs quo celeriùs revolvitur; &, quamprimum dimittitur, avolat. Vim conatui illi contrariam, quâ funda lapidem in manum perpetuò retrahit, & in orbe retinet, quoniam in manum, ceu orbis centrum, dirigitur, Centripetam appello. Et par est ratio corporum omnium, quæ in gyrum aguntur. Conantur ea omnia à centris orbium recedere; & nisi adsit vis aliqua conatui isti contraria, quâ cohibeantur & in orbibus retineantur, quamque ideo Centripetam appello, abibunt in rectis lineis uniformi cum motu. Projectile, si vi gravitatis destitueretur, non deflecteretur in terram, sed in lineâ rectâ abiret in cœlos; idque uniformi cum motu, si modo aëris resistentia tolleretur. Per gravitatem suam retrahitur à cursu rectilineo, & in terram perpetuò flectitur; idque magis vel minùs pro gravitate suâ & velocitate motûs. Quo minor fuerit ejus gravitas pro quantitate materiæ, vel major velocitas quâcum projicitur, eo minùs deviabit à cursu rectilineo & longiùs perget. Si globus plumbeus, datâ cum velocitate secundum lineam horizontalem, à montis alicujus vertice, vi pulveris tormentarii projectus, pergeret in lineâ curvâ ad distantiam duorum milliarium, priusquam in terram decideret: hic duplâ cum velocitate quasi duplo longiùs pergeret, & decuplâ cum velocitate quasi decuplo longiùs: si modò aëris resistentia tolleretur. Et augendo velocitatem augeri posset pro lubitu distantia, in quam projiceretur, & minui

DEFINITIONES.

curvatura lineæ, quam defcriberet; ita ut tandem caderet ad diftantiam graduum decem, vel triginta, vel nonaginta; vel etiam ut terram totam circuiret; vel denique ut in cœlos abiret, & motu abeundi pergeret in infinitum. Et eâdem ratione, quâ projectile vi gravitatis in orbem flecti poffet, & terram totam circuire; poteft & luna, vel vi gravitatis, fi modò gravis fit, vel aliâ quâcunque vi, quâ in terram urgeatur, retrahi femper à curfu rectilineo terram verfus, & in orbem fuum flecti: & fine tali vi luna in orbe fuo retineri non poteft. Hæc vis, fi jufto minor effet, non fatis flecteret lunam de curfu rectilineo: fi jufto minor, plus fatis flecteret, ac de orbe terram verfus deduceret. Requiritur quippe, ut fit juftæ magnitudinis: & Mathematicorum eft invenire vim, quâ corpus in dato quovis orbe datâ cum velocitate accuratè retineri poffit; & viciffim invenire viam curvilineam, in quam corpus, è dato quovis loco datâ cum velocitate egreffum, à datâ vi flectatur. Eft autem vis hujus centripetæ quantitas trium generum, Abfoluta, Acceleratrix, & Motrix.

DEFINITIO VI.

Vis centripetæ quantitas abfoluta eft menfura ejufdem major vel minor pro efficaciâ caufæ eam propagantis à centro per regiones in circuitu.

Ut vis magnetica pro mole magnetis vel intenfione virtutis major in uno magnete, minor in alio.

DEFINITIO VII.

Vis centripetæ quantitas acceleratrix eft ipfius menfura velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.

Uti virtus magnetis ejufdem major in minori diftantiâ, minor in majori: vel vis gravitans major in vallibus, minor in cacuminibus altorum montium, atque adhuc minor (ut pofthac patebit) in majoribus diftantiis à globo terræ; in æqualibus autem diftantiis eadem undique, propterea quòd corpora omnia cadentia

(gravia an levia, magna an parva) fublatâ aëris refiftentiâ, æqualiter accelerat. DEFINITIONES.

DEFINITIO VIII.

Vis centripetæ quantitas motrix eft ipfius menfura proportionalis motui, quem dato tempore generat.

Uti pondus majus in majore corpore, minus in minore; & in corpore eodem majus prope terram, minus in cœlis. Hæc quantitas eft corporis totius Centripetentia, feu propenfio in centrum, & (ut ita dicam) pondus; & innotefcit femper per vim ipfi contrariam & æqualem, quâ defcenfus corporis impediri poteft.

Hafce virium quantitates, brevitatis gratiâ, nominare licet vires motrices, acceleratrices, & abfolutas; & diftinctionis gratiâ referre ad corpora centrum petentia, ad corporum loca, & ad centrum virium: nimirum vim motricem ad corpus, tanquam conatum totius in centrum ex conatibus omnium partium compofitum; & vim acceleratricem ad locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca fingula in circuitu diffufam, ad movenda corpora quæ in ipfis funt; vim autem abfolutam ad centrum, tanquam caufâ aliquâ præditum, fine quâ vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; five caufa illa fit corpus aliquod centrale (quale eft magnes in centro vis magneticæ, vel terra in centro vis gravitantis) five alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus duntaxat eft hic conceptus: nam virium caufas & fedes phyficas jam non expendo.

Eft igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motûs ex celeritate & ex quantitate materiæ; & vis motrix, ex vi acceleratrice & ex quantitate ejufdem materiæ conjunctim. Nam fumma actionum vis acceleratricis in fingulas corporis particulas eft vis motrix totius. Unde juxta fuperficiem terræ, ubi gravitas acceleratrix, feu vis gravitans, in corporibus univerfis eadem eft, gravitas motrix, feu pondus, eft ut corpus: at fi in regiones afcendatur ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritque femper ut corpus & gravitas acceleratrix conjunctim. Sic in regionibus ubi

DEFINITIONES. gravitas acceleratrix duplo minor eſt, pondus corporis, duplo vel triplo minoris, erit quadruplo vel ſextuplo minus.

Porro attractiones & impulſus eodem ſenſu acceleratrices & motrices nomino. Voces autem attractionis, impulſus, vel propenſionis cujuſcunque in centrum, indifferenter & pro ſe mutuò promiſcuè uſurpo; has vires non phyſicè ſed mathematicè tantùm conſiderando. Unde caveat lector, ne per hujuſmodi voces cogitet me ſpeciem vel modum actionis, cauſamve aut rationem phyſicam, alicubi definire; vel centris (quæ ſunt puncta mathematica) vires verè & phyſicè tribuere; ſi fortè aut centra trahere, aut vires centrorum eſſe dixero.

Scholium.

Hactenus voces minùs notas, quo ſenſu in ſequentibus accipiendæ ſint, explicare viſum eſt. Tempus, Spatium, Locus & Motus, ſunt omnibus notiſſima. Notandum tamen, quòd vulgus quantitates haſce non aliter quàm ex relatione ad ſenſibilia concipiat. Et inde oriuntur præjudicia quædam, quibus tollendis convenit eaſdem in Abſolutas & Relativas, Veras & Apparentes, Mathematicas & Vulgares diſtingui.

I. Tempus Abſolutum, verum, & mathematicum, in ſe & naturâ ſuâ, ſine relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioque nomine dicitur Duratio: Relativum, apparens, & vulgare eſt ſenſibilis & externa quævis durationis per motum menſura (ſeu accurata ſeu inæquabilis) quâ vulgus vice veri temporis utitur, ut hora, dies, menſis, annus.

II. Spatium Abſolutum, naturâ ſuâ ſine relatione ad externum quodvis, ſemper manet ſimilare & immobile: Relativum eſt Spatii hujus menſura, ſeu dimenſio quælibet mobilis, quæ à ſenſibus noſtris per ſitum ſuum ad corpora definitur, & à vulgo pro ſpatio immobili uſurpatur: uti dimenſio ſpatii ſubterranei, aërii vel cœleſtis definita per ſitum ſuum ad terram. Idem ſunt ſpatium abſolutum & relativum, ſpecie & magnitudine; ſed non permanent idem ſemper numero. Nam ſi terra, verbi gratiâ, moveatur, ſpatium aëris noſtri, quod relativè & reſpectu terræ ſemper manet idem, nunc erit una pars ſpatii abſoluti in quam aër tranſit, nunc alia pars ejus; & ſic abſolutè mutabitur perpetuò.

III. Locus

III. Locus eſt pars ſpatii quam corpus occupat; eſtque pro ratione ſpatii vel Abſolutus vel Relativus. Pars, inquam, ſpatii; non ſitus corporis, vel ſuperficies ambiens. Nam ſolidorum æqualium æquales ſemper ſunt loci; ſuperficies autem ob diſſimilitudinem figurarum ut plurimùm inæquales ſunt; ſitus verò propriè loquendo quantitatem non habent, neque tam ſunt loca quàm affectiones locorum. Motus totius idem eſt cum ſummâ motuum partium; hoc eſt, tranſlatio totius de ſuo loco eadem eſt cum ſummâ tranſlationum partium de locis ſuis; ideoque locus totius idem eſt cum ſummâ locorum partium, & propterea internus & in corpore toto. DEFINITIONES.

IV. Motus Abſolutus eſt tranſlatio corporis de loco abſoluto in locum abſolutum; Relativus, de relativo in relativum. Sic in navi, quæ velis paſſis fertur, relativus corporis locus eſt navigii regio illa, in quâ corpus verſatur; ſeu cavitatis totius pars illa, quam corpus implet, quæque adeo movetur unà cum navi: & quies relativa eſt permanſio corporis in eâdem illâ navis regione, vel parte cavitatis. At quies vera eſt permanſio corporis in eâdem parte ſpatii illius immoti, in quâ navis ipſa unà cum cavitate ſuâ & contentis univerſis, movetur. Unde ſi terra verè quieſcat, corpus, quod relativè quieſcit in navi, movebitur verè & abſolutè eâ cum velocitate, quâ navis movetur in terrâ. Sin terra etiam moveatur; orietur verus & abſolutus corporis motus, partim ex terræ motu vero in ſpatio immoto, partim ex navis motu relativo in terrâ. Et ſi corpus etiam moveatur relativè in navi; orietur verus ejus motus, partim ex vero motu terræ in ſpatio immoto, partim ex relativis motibus, tum navis in terrâ, tum corporis in navi: & ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in terrâ. Ut ſi terræ pars illa, ubi navis verſatur, moveatur verè in orientem cum velocitate partium 10010; & velis ventoque feratur navis in occidentem cum velocitate partium decem; nauta autem ambulet in navi orientem verſus cum velocitatis parte unâ: movebitur nauta verè & abſolutè in ſpatio immoto cum velocitatis partibus 10001 in orientem, & relativè in terrâ occidentem verſus cum velocitatis partibus novem.

Tempus Abſolutum à Relativo diſtinguitur in Aſtronomiâ per æquationem temporis vulgi. Inæquales enim ſunt dies naturales,

DEFINITIONES. les, qui vulgo tanquam æquales pro menſurâ temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Aſtronomi, ut ex veriore tempore menſurent motus cœleſtes. Poſſibile eſt, ut nullus ſit motus æquabilis, quo tempus accuratè menſuretur. Accelerari & retardari poſſunt motus omnes, ſed fluxus temporis abſoluti mutari nequit. Eadem eſt duratio ſeu perſeverantia exiſtentiæ rerum, ſive motus ſint celeres, ſive tardi, ſive nulli: proinde hæc à menſuris ſuis ſenſibilibus meritò diſtinguitur, & ex iiſdem colligitur per æquationem aſtronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis phænomenis neceſſitas, tum per experimentum horologii oſcillatorii, tum etiam per eclipſes ſatellitum Jovis evincitur.

Ut ordo partium temporis eſt immutabilis, ſic etiam ordo partium ſpatii. Moveantur hæ de locis ſuis, & movebuntur (ut ita dicam) de ſeipſis. Nam tempora & ſpatia ſunt ſui ipſorum & rerum omnium quaſi loca. In tempore quoad ordinem ſucceſſionis, in ſpatio quoad ordinem ſitûs, locantur univerſa. De illorum eſſentiâ eſt, ut ſint loca: & loca primaria moveri abſurdum eſt. Hæc ſunt igitur Abſoluta Loca; & ſolæ tranſlationes de his locis ſunt Abſoluti Motus.

Verùm quoniam hæ Spatii partes videri nequeunt, & ab invicem per ſenſus noſtros diſtingui; earum vice adhibemus menſuras ſenſibiles. Ex poſitionibus enim & diſtantiis rerum à corpore aliquo, quod ſpectamus ut immobile, definimus loca univerſa: deinde etiam & omnes motus æſtimamus cum reſpectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iiſdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum abſolutorum relativis utimur; nec incommodè in rebus humanis: in philoſophicis autem abſtrahendum eſt à ſenſibus. Fieri etenim poteſt, ut nullum reverâ quieſcat corpus, ad quod loca motuſque referantur.

Diſtinguuntur autem quies & motus abſoluti & relativi ab invicem per proprietates ſuas & cauſas & effectus. Quietis proprietas eſt, quòd corpora verè quieſcentia quieſcunt inter ſe. Ideoque cùm poſſibile ſit, ut corpus aliquod in regionibus Fixarum, aut longè ultrà, quieſcat abſolutè; ſciri autem non poſſit ex ſitu corporum ad invicem in regionibus noſtris, horumne aliquod ad lon-

longinquum illud datam poſitionem ſervet necne; quies vera ex horum ſitu inter ſe definiri nequit. DEFINITIONES.

Motûs proprietas eſt, quòd partes, quæ datas ſervant poſitiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam gyrantium partes omnes conantur recedere ab axe motûs, & progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium ſingularum. Motis igitur corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relativè quieſcunt. Et propterea motus verus & abſolutus definiri nequit per tranſlationem è viciniâ corporum, quæ tanquam quieſcentia ſpectantur. Debent enim corpora externa non ſolùm tanquam quieſcentia ſpectari, ſed etiam verè quieſcere. Alioquin incluſa omnia, præter tranſlationem è viciniâ ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros; &, ſublatâ illa tranſlatione, non verè quieſcent, ſed tanquam quieſcentia ſolummodo ſpectabuntur. Sunt enim ambientia ad incluſa, ut totius pars exterior ad partem interiorem, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, ſine tranſlatione de viciniâ corticis, ceu pars totius, movetur.

Præcedenti proprietati affinis eſt, quòd moto loco movetur unà locatum: ideoque corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci ſui motum. Motus igitur omnes, qui de locis motis fiunt, ſunt partes ſolummodo motuum integrorum & abſolutorum: & motus omnis integer componitur ex motu corporis de loco ſuo primo, & motu loci hujus de loco ſuo, & ſic deinceps; uſque dum perveniatur ad locum immotum, ut in exemplo nautæ ſuprà memorato. Unde motus integri & abſoluti non niſi per loca immota definiri poſſunt: & propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia ſuprà retuli. Loca autem immota non ſunt, niſi quæ omnia ab infinito in infinitum datas ſervant poſitiones ad invicem; atque adeo ſemper manent immota, ſpatiumque conſtituunt quod immobile appello.

Cauſæ, quibus motus veri & relativi diſtinguuntur ab invicem, ſunt vires in corpora impreſſæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur, niſi per vires in ipſum corpus motum impreſſas: at motus relativus generari & mutari poteſt, ſine viribus impreſſis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimantur in alia ſolùm corpora, ad quæ fit relatio; ut iis ceden-

tibus

DEFINITIONES. tibus mutetur relatio illa, in quâ hujus quies vel motus relativus consistit. Rursum motus verus à viribus in corpus motum impressis semper mutatur; at motus relativus ab his viribus non mutatur necessariò. Nam si eædem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, sic imprimantur, ut situs relativus conservetur, conservabitur relatio in quâ motus relativus consistit. Mutari igitur potest motus omnis relativus, ubi verus conservatur, & conservari ubi verus mutatur; & propterea motus verus in ejusmodi relationibus minimè consistit.

Effectus, quibus motus absoluti & relativi distinguuntur ab invicem, sunt vires recedendi ab axe motûs circularis. Nam in motu circulari nudè relativo, hæ vires nullæ sunt; in vero autem & absoluto, majores vel minores pro quantitate motûs. Si pendeat situla à filo prælongo, agaturque perpetuò in orbem, donec filum à contorsione admodum rigescat, dein impleatur aquâ, & unà cum aquâ quiescat; tum vi aliquâ subitaneâ agatur motu contrario in orbem, & filo se relaxante, diutius perseveret in hoc motu; superficies aquæ sub initio plana erit, quemadmodum ante motum vasis: at postquam vas, vi in aquam paulatim impressâ, effecit ut hæc quoque sensibiliter revolvi incipiat; recedet ipsa paulatim à medio, ascendetque ad latera vasis, figuram concavam induens, (ut ipse expertus sum) & incitatiore semper motu ascendet magis & magis, donec revolutiones in æqualibus cum vase temporibus peragendo quiescat in eodem relativè. Indicat hic ascensus conatum recedendi ab axe motûs, & per talem conatum innotescit & mensuratur motus aquæ circularis verus & absolutus, motuique relativo hic omnino contrarius. Initio, ubi maximus erat aquæ motus relativus in vase, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab axe: aqua non petebat circumferentiam ascendendo ad latera vasis, sed plana manebat, & propterea illius verus motus circularis nondum inceperat. Postea verò, ubi aquæ motus relativus decrevit, ascensus ejus ad latera vasis indicabat conatum recedendi ab axe; atque hic conatus monstrabat motum illius circularem verum perpetuò crescentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quiescebat in vase relativè. Quare conatus iste non pendet à translatione aquæ respectu corporum ambientium, & propterea motus circularis verus per tales translationes

lationes definiri nequit. Unicus est corporis cujusque revolventis motus verè circularis, conatui unico tanquam proprio & adæquato effectui respondens: motus autem relativi, pro variis relationibus ad externa, innumeri sunt; &, relationum instar, effectibus veris omnino destituuntur, nisi quatenus verum illum & unicum motum participant. Unde & in systemate eorum, qui cœlos nostros infra cœlos fixarum in orbem revolvi volunt, & planetas secum deferre; singulæ cœlorum partes, & planetæ, qui relativè quidem in cœlis suis proximis quiescunt, moventur verè. Mutant enim positiones suas ad invicem (secus quàm fit in verè quiescentibus) unàque cum cœlis delati participant eorum motus, &, ut partes revolventium totorum, ab eorum axibus recedere conantur. DEFINITIONES.

Quantitates relativæ non sunt igitur eæ ipsæ quantitates, quarum nomina præ se ferunt, sed sunt earum mensuræ illæ sensibiles (veræ an errantes) quibus vulgus, loco quantitatum mensuratarum, utitur. At si ex usu definiendæ sunt verborum significationes; per nomina illa Temporis, Spatii, Loci & Motûs propriè intelligendæ erunt hæ mensuræ sensibiles; & sermo erit insolens & purè mathematicus, si quantitates mensuratæ hîc intelligantur. Proinde vim inferunt sacris literis, qui voces hasce de quantitatibus mensuratis ibi interpretantur. Neque minùs contaminant Mathesin & Philosophiam, qui quantitates veras cum ipsarum relationibus & vulgaribus mensuris confundunt.

Motus quidem veros corporum singulorum cognoscere, & ab apparentibus actu discriminare, difficillimum est; propterea quòd partes spatii illius immobilis, in quo corpora verè moventur, non incurrunt in sensus. Causa tamen non est prorsus desperata. Nam argumenta desumi possunt, partim ex motibus apparentibus, qui sunt motuum verorum differentiæ; partim ex viribus, quæ sunt motuum verorum causæ & effectus. Ut si globi duo, ad datam ab invicem distantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum; innotesceret, ex tensione fili, conatus globorum recedendi ab axe motûs, & inde quantitas motus circularis computari posset. Deinde si vires quælibet æquales in alternas globorum facies, ad motum circularem augendum vel minuendum, simul imprimerentur; innotesceret, ex auctâ vel

DEFINITIONES. vel diminutâ fili tensione, augmentum vel decrementum motûs; & inde tandem inveniri possent facies globorum, in quas vires imprimi deberent, ut motus maximè augeretur; id est, facies posticæ, sive quæ in motu circulari sequuntur. Cognitis autem faciebus quæ sequuntur, & faciebus oppositis quæ præcedunt, cognosceretur determinatio motûs. In hunc modum inveniri posset & quantitas & determinatio motûs hujus circularis in vacuo quovis immenso, ubi nihil extaret externum & sensibile, quocum globi conferri possent. Si jam constituerentur in spatio illo corpora aliqua longinqua, datam inter se positionem servantia, qualia sunt stellæ fixæ in regionibus cœlorum: sciri quidem non posset, ex relativâ globorum translatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus esset motus. At si attenderetur ad filum, & deprehenderetur tensionem ejus illam ipsam esse, quam motus globorum requireret; concludere liceret motum esse globorum, & corpora quiescere; & tum demum, ex translatione globorum inter corpora, determinationem hujus motûs colligere. Motus autem veros ex eorum causis, effectibus, & apparentibus differentiis colligere, & contrà ex motibus, seu veris seu apparentibus, eorum causas & effectus, docebitur fusiùs in sequentibus. Hunc enim in finem tractatum sequentem composui.

AXIOMATA,

SIVE

LEGES MOTUS.

LEX I.

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud à viribus impressis cogitur statum suum mutare.

PROJECTILIA perseverant in motibus suis, nisi quatenus à resistentiâ aëris retardantur, & vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuò retrahunt sese à motibus rectilineis, non cessat rotari, nisi quatenus ab aëre retardatur. Majora autem planetarum & cometarum corpora motus suos & progressivos & circulares, in spatiis minùs resistentibus factos, conservant diutiùs.

LEX II.

Mutationem motûs proportionalem eſſe vi motrici impreſſæ, & fieri ſecundum lineam rectam quâ vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet; dupla duplum, tripla triplum generabit, ſive ſimul & ſemel, ſive gradatim & ſucceſſivè impreſſa fuerit. Et hic motus (quoniam in eandem ſemper plagam cum vi generatrice determinatur) ſi corpus antea movebatur, motui ejus vel conſpiranti additur, vel contrario ſubducitur, vel obliquo obliquè adjicitur, & cum eo ſecundum utriuſque determinationem componitur.

LEX III.

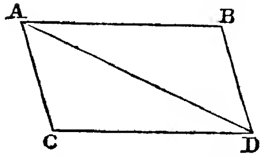
Actioni contrariam ſemper & æqualem eſſe reactionem: ſive corporum duorum actiones in ſe mutuò ſemper eſſe æquales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus à lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam & equus (ut ita dicam) æqualiter in lapidem: nam funis, utrinque diſtentus, eodem relaxandi ſe conatu urgebit equum verſus lapidem, ac lapidem verſus equum; tantumque impediet progreſſum unius, quantum promovet progreſſum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi ſuâ quomodocunque mutaverit, idem quoque viciſſim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem preſſionis mutatæ) ſubibit. His actionibus æquales fiunt mutationes, non velocitatum, ſed motuum; ſcilicet in corporibus non aliunde impeditis. Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, ſunt corporibus reciprocè proportionales. Obtinet etiam hæc lex in attractionibus, ut in ſcholio proximo probabitur.

COROL.

COROL. I.

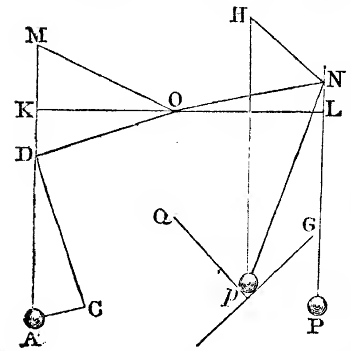
Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore deſcribere, quo latera ſeparatis.



Si corpus dato tempore, vi ſolâ M in loco A impreſſâ, ferretur uniformi cum motu ab A ad B; & vi ſolâ N in eodem loco impreſſa, ferretur ab A ad C; compleatur parallelogrammum ABDC, & vi utrâque feretur corpus illud, eodem tempore, in diagonali ab A ad D. Nam quoniam vis N agit ſecundum lineam AC ipſi BD parallelam, hæc vis, per legem II, nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam BD, à vi alterâ genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam BD, ſive vis N imprimatur, ſive non; atque ideo in fine illius temporis reperietur alicubi in lineâ illâ BD. Eodem argumento in fine temporis ejuſdem reperietur alicubi in lineâ CD: & idcirco in utriuſque lineæ concurſu, D, reperiri neceſſe eſt. Perget autem motu rectilineo ab A ad D, per legem I.

COROL. II.

Et hinc patet compoſitio vis directæ, AD, *ex viribus quibuſvis obliquis,* AB *&* BD; *& viciſſim reſolutio vis cujuſvis directæ,* AD, *in obliquas quaſcunque,* AB *&* BD. *Quæ quidem compoſitio & reſolutio abundè confirmatur ex Mechanicâ.*



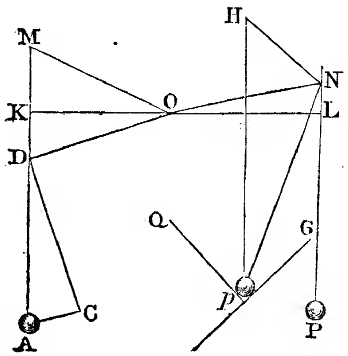
Ut ſi de rotæ alicujus ([a]) centro, O, exeuntes radii inæquales, OM, ON, filis MA, NP ſuſtineant pondera A & P, & quærantur vires ponderum ad movendam rotam: per centrum O agatur recta KOL, filis perpendiculariter occurrens in K & L; centroque O, & intervallorum OK, OL majore OL, deſcribatur circulus occurrens filo MA in D: & actæ rectæ OD pa-

([a]) Cujus rotæ planum ſuper plano horizontis ad perpendiculum erectum ſit.

rallela

rallela ſit AC, & perpendicularis DC. Quoniam nihil refert, utrum filorum puncta, K, L, D, affixa ſint an non affixa ad planum rotæ; pondera idem valebunt, ac ſi ſuſpenderentur à punctis K & L, vel D & L. Ponderis autem A exponatur vis tota per lineam AD, & hæc reſolvetur in vires AC, CD: quarum AC, trahendo radium OD directe à centro, nihil valet ad movendam rotam; vis autem altera DC, trahendo radium DO perpendiculariter, idem valet, ac ſi perpendiculariter traheret radium OL ipſi OD æqualem; hoc eſt, idem atque pondus P, ſi modò pondus illud ſit ad pondus A, ut vis DC ad vim DA, id eſt (ob ſimilia triangula ADC, DOK), ut OK ad OD, ſeu OL. Pondera igitur A & P, quæ ſunt reciprocè ut radii in directum poſiti, OK & OL, idem pollebunt, & ſic conſiſtent in æquilibrio: quæ eſt proprietas notiſſima Libræ, Vectis, & Axis in peritrochio. Sin pondus alterutrum ſit majus quàm in hâc ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major.

Quòd ſi pondus *p*, ponderi P æquale, partim ſuſpendatur filo N*p*, partim incumbat plano obliquo *p*G (b): agantur *p*H, NH, prior horizonti, poſterior plano *p*G perpendicularis; & ſi vis ponderis, *p*, deorſum tendens, exponatur per lineam *p*H, reſolvi poteſt hæc in vires *p*N, HN. Si filo *p*N perpendiculare eſſet planum aliquod *p*Q, ſecans planum alterum *p*G in lineâ ad horizontem parallelâ (c); & pondus *p* his planis *p*Q, *p*G ſolummodo incumberet; urgeret illud hæc plana viribus *p*N, HN, perpendiculariter; nimirum planum *p*Q vi *p*N, & planum *p*G vi HN. Ideoque ſi tollatur planum *p*Q, ut pondus tendat filum; quoniam filum, ſuſtinendo



(b) Quod planum rotæ ad perpendiculum ſecare intelligendum eſt.

(c) PLANUM *p*Q ſecare planum *p*G ſecundum rectam cum plano horizontis parallelam hoc modo oſtendimus.

Cùm recta N*p*, quæ jacet in plano rotæ, planum *p*Q ad perpendiculum inſiſtat, planum rotæ idem planum *p*Q ad perpendiculum ſecabit. (El. XI. 18.) Sed planum rotæ planum etiam *p*G ad perpendiculum ſecat (id enim poſitum eſt). Planorum igitur *p*G, *p*Q communis interſectio planum rotæ ad perpendiculum inſiſtit. (El. XI. 19.) Rurſum cùm planum horizontis & planum *p*G rotæ planum ad perpendiculum utrumque inſiſtant, communis illorum interſectio

tinendo pondus, jam vicem præſtat plani ſublati, tendetur illud eâdem vi *p*N, quâ planum antea urgebatur. Unde tenſio fili hujus obliqui erit ad tenſionem fili alterius perpendicularis PN, ut *p*N ad *p*H. Ideoque ſi pondus *p* ſit ad pondus A in ratione, quæ componitur ex ratione reciprocâ minimarum diſtantiarum filorum ſuorum *p*N, AM à centro rotæ, & ratione directâ *p*H ad *p*N; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atque ideo ſe mutuo ſuſtinebunt; ut quilibet experiri poteſt.

Pondus autem *p*, planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet Cunei inter corporis fiſſi facies internas: & inde vires Cunei & Mallei innoteſcunt: utpote cùm vis quâ pondus *p* urget planum *p*Q ſit ad vim, quâ idem, vel gravitate ſuâ vel ictu mallei, impellitur ſecundum lineam *p*H in plana, ut *p*N ad *p*H; atque ad vim, quâ urget planum alterum *p*G, ut *p*N ad NH. Sed & vis Cochleæ per ſimilem virium diviſionem colligitur; quippe quæ Cuneus eſt à Vecte impulſus. Uſus igitur corollarii hujus latiſſimè patet, & latè patendo veritatem ejus evincit; cùm pendeat ex jam dictis Mechanica tota, ab auctoribus diverſimodè demonſtrata. Ex hiſce enim facile derivantur vires machinarum, quæ ex rotis, tympanis, trochleis, vectibus, nervis tenſis & ponderibus directè vel obliquè aſcendentibus, cæteriſque potentiis mechanicis componi ſolent, ut & vires tendinum ad animalium oſſa movenda.

COROL. III.

Quantitas motûs quæ colligitur capiendo ſummam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter ſe.

Etenim actio eique contraria reactio æquales ſunt per legem III, ideoque per legem II æquales in motibus efficiunt muta-

terſectio rotæ planum ad perpendiculum inſiſtet. (El. XI. 19.) Planorum igitur, *p*G, *p*Q communis interſectio cum communi plani *p*G & horizontis interſectione parallela erit. Nempe cùm, ex iis quæ oſtendimus, utraque planum rotæ ad perpendiculum inſiſtat. Atque idcirco communis planorum *p*G, *p*Q interſectio cum plano horizontis parallela erit. Nam ſi occurreret ea plano horizontis, cùm in plano *p*G tota jaceat, concurſus ejus cum horizontis plano ad communem plani horizontis cum plano illo *p*G interſectionem neceſſariò eſſet. Atque ita concurrerent rectæ, quas parallelas eſſe inter ſe oſtendimus; quod abſurdum eſſet. Atque hinc conficitur Theorema haud inutile, neque indignum quod in elementis Geometriæ ſolidæ reponatur. "Si tria plana, quorum duo non ſunt inter ſe parallela, ſuper quarto quodam ad perpendiculum erecta ſint, duorum quorumlibet ex erectis communis interſectio cum tertio parallela erit."

tiones verſus contrarias partes. Ergo ſi motus fiunt ad eandem partem, quicquid additur motui corporis fugientis ſubducetur motui corporis inſequentis, ſic ut ſumma maneat eadem quæ priùs. Sin corpora obviam eant; æqualis erit ſubductio de motu utriuſque, ideoque differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem.

Ut ſi corpus ſphæricum A ſit triplo majus corpore ſphærico B, habeatque duas velocitatis partes; & B ſequatur in eâdem rectâ cum velocitatis partibus decem, ideoque motus ipſius A ſit ad motum ipſius B, ut ſex ad decem: ponantur motus illis eſſe partium ſex & partium decem, & ſumma erit partium ſexdecim. In corporum igitur concurſu, ſi corpus A lucretur motûs partes tres vel quatuor vel quinque, corpus B amittet partes totidem; ideoque perget corpus A poſt reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim, & B cum partibus ſeptem vel ſex vel quinque; exiſtente ſemper ſummâ partium ſexdecim, ut priùs. Si corpus A lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, ideoque progrediatur poſt concurſum cum partibus quindecim vel ſexdecim vel ſeptendecim vel octodecim; corpus B, amittendo tot partes quot A lucratur, vel cum unâ parte progredietur, amiſſis partibus novem; vel quieſcet, amiſſo motu ſuo progreſſivo partium decem; vel cum unâ parte regredietur, amiſſo motu ſuo & (ut ita dicam) unâ parte ampliùs; vel regredietur, cum partibus duabus, ob detractum motum progreſſivum partium duodecim. Atque ita ſummæ motuum conſpirantium 15+1 vel 16+0, & differentiæ contrariorum 17−1, & 18−2, ſemper erunt partium ſexdecim, ut ante concurſum & reflexionem. Cognitis autem motibus quibuſcum corpora poſt reflexionem pergent, invenietur cujuſque velocitas, ponendo eam eſſe ad velocitatem ante reflexionem, ut motus pòſt eſt ad motum antè. Ut in caſu ultimo, ubi corporis A motus erat partium ſex ante reflexionem, & partium octodecim poſtea, & velocitas partium duarum ante reflexionem; invenietur ejus velocitas partium ſex poſt reflexionem, dicendo, ut motûs partes ſex ante reflexionem ad motûs partes octodecim poſtea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem ad velocitatis partes ſex poſtea.

Quòd ſi corpora, vel non ſphærica, vel diverſis in rectis moventia

ventia incidant in ſe mutuò obliquè, & requirantur eorum motus poſt reflexionem; cognoſcendus eſt ſitus plani à quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concurſûs: dein corporis utriuſque motus (per Corol. II.) diſtinguendus eſt in duos; unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum: motus autem paralleli, propterea quòd corpora agant in ſe invicem ſecundum lineam huic plano perpendicularem, retinendi ſunt iidem poſt reflexionem atque antea; & motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ ſunt, ſic ut ſumma conſpirantium & differentia contrariorum maneat eadem quæ priùs. Ex hujuſmodi reflexionibus oriri etiam ſolent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos caſus in ſequentibus non conſidero, & nimis longum eſſet omnia huc ſpectantia demonſtrare.

COROL. IV.

Commune gravitatis centrum corporum duorum, vel plurium, ab actionibus corporum inter ſe, non mutat ſtatum ſuum vel motûs vel quietis; & propterea corporum omnium in ſe mutuò agentium (excluſis actionibus & impedimentis externis) commune centrum gravitatis vel quieſcit, vel movetur uniformiter in directum.

Nam ſi puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis, & diſtantia eorum dividatur in ratione datâ, punctum dividens vel quieſcit, vel progreditur uniformiter in lineâ recta. Hoc poſtea in lemmate XXIII ejuſque corollario demonſtratur, ſi punctorum motus fiant in eodem plano; & eâdem ratione demonſtrari poteſt, ſi motus illi non fiant in eodem plano. Ergo ſi corpora quotcunque moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis vel quieſcit, vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quòd linea horum corporum centra, in rectis uniformiter progredientia, jungens dividitur, ab hoc centro communi, in ratione datâ. Similiter & commune centrum horum duorum & tertii cujuſvis vel quieſcit, vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quòd ab eo dividitur diſtantia centri communis corporum duorum

rum

AXIOMATA, SIVE rum & centri corporis tertii, in datâ ratione. Eodem modo & commune centrum horum trium & quarti cujusvis vel quiescit, vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quòd ab eo dividitur distantia inter centrum commune trium & centrum quarti in datâ ratione; & sic in infinitum. Igitur in systemate corporum, quæ actionibus in se invicem, aliisque omnibus in se extrinsecus impressis, omnino vacant, ideoque moventur singula uniformiter in rectis singulis, commune omnium centrum gravitatis vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum.

Porro in systemate duorum corporum in se invicem agentium, cùm distantiæ centrorum utriusque à communi gravitatis centro sint reciprocè ut corpora; erunt motus relativi corporum eorundem, vel accedendi ad centrum illud, vel ad eodem recedendi, æquales inter se. Proinde centrum illud à motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atque ideo ab actionibus horum corporum inter se, nec promovetur nec retardatur, nec mutationem patitur in statu suo quoad motum vel quietem. In systemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis in se mutuò agentium commune gravitatis centrum, ob actionem illam, nullatenus mutat statum suum; & reliquorum, quibuscum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur; distantia autem horum duorum centrorum dividitur, à communi corporum omnium centro, in partes summis totalibus corporum, quorum sunt centra, reciprocè proportionales; ideoque centris illis duobus statum suum movendi vel quiescendi servantibus, commune omnium centrum servat etiam statum suum: manifestum est, quòd commune illud omnium centrum, ob actiones binorum corporum inter se, nunquam mutat statum suum quoad motum & quietem. In tali autem systemate actiones omnes corporum inter se, vel inter bina sunt corpora, vel ab actionibus inter bina compositæ; & propterea communi omnium centro mutationem, in statu motûs ejus vel quietis, nunquam inducunt. Quare cùm centrum illud, ubi corpora non agunt in se invicem, vel quiescit, vel in rectâ aliquâ progreditur uniformiter; perget idem, non obstantibus corporum actionibus inter se, vel semper quiescere, vel semper progredi uniformiter in directum; nisi à viribus in systema extrinsecus impressis deturbetur

LEGES MOTUS. turbetur de hoc statu. Est igitur systematis corporum plurium lex eadem, quæ corporis solitarii, quoad perseverantiam in statu motûs vel quietis. Motus enim progressivus, seu corporis solitarii, seu systematis corporum, ex motu centri gravitatis æstimari semper debet.

COROL. V.

Corporum dato spatio inclusorum iidem sunt motus inter se, sive spatium illud quiescat, sive moveatur idem uniformiter in directum sine motu circulari.

Nam differentiæ motuum tendentium ad eandem partem, & summæ tendentium ad contrarias, eædem sunt sub initio in utroque casu (ex hypothesi) & ex his summis vel differentiis oriuntur congressus & impetus, quibus corpora se mutuò feriunt. Ergo per legem II æquales erunt congressuum effectus in utroque casu; & propterea manebunt motus inter se, in uno casu, æquales motibus inter se in altero. Idem comprobatur experimento luculento. Motus omnes eodem modò se habent in navi, sive ea quiescat, sive moveatur uniformiter in directum.

COROL. VI.

Si corpora moveantur quomodocunque inter se, & à viribus acceleratricibus æqualibus secundum lineas parallelas urgeantur; pergent omnia eodem modo moveri inter se, ac si viribus illis non essent incitata.

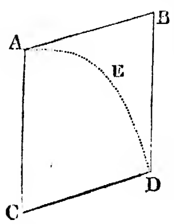
Nam vires illæ æqualiter (pro quantitatibus movendorum corporum) & secundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter (quoad velocitatem) movebunt per legem II, ideoque nunquam mutabunt positiones & motus eorum inter se.

Scholium.

Hactenus principia tradidi à Mathematicis recepta, & experientiâ multiplici confirmata. Per leges duas primas & corollaria duo prima *Galilæus* invenit descensum gravium esse in duplicatâ ratione

AXIOMATA, SIVE

ratione temporis, & motum Projectilium fieri in Parabolâ; conspirante experientiâ, nisi quatenus motus illi per aëris resistentiam aliquantulum retardantur. Corpore cadente, gravitas uniformis, singulis temporis particulis æqualibus æqualiter agendo, imprimit vires æquales in corpus illud, & velocitates æquales generat: & tempore toto vim totam imprimit, & velocitatem totam generat tempori proportionalem. Et spatia temporibus proportionalibus descripta, sunt ut velocitates & tempora conjunctim; id est, in duplicatâ ratione temporum. Et corpore sursum projecto, gravitas uniformis vires imprimit, & velocitates aufert, temporibus proportionales; ac tempora ascendendi ad altitudines summas sunt ut velocitates auferendæ, & altitudines illæ sunt ut velocitates ac tempora conjunctim; seu in duplicatâ ratione velocitatum. Et corporis, secundum rectam quamvis projecti, motus à projectione oriundus cum motu à gravitate oriundo componitur.



Ut si corpus A motu solo projectionis, dato tempore, describere posset rectam AB; & motu solo cadendi, eodem tempore, describere posset altitudinem AC: compleatur parallelogrammum ABDC, & corpus illud, motu composito, reperietur in fine temporis in loco D; & curva linea AED, quam corpus illud describet, erit Parabola, quam recta AB tangit in A, & cujus ordinata BD est ut AB*q*. Ab iisdem legibus & corollariis pendent demonstrata de tempori-

bus

(d) Sub finem Anni 1668. Vide Acta Philosophica.

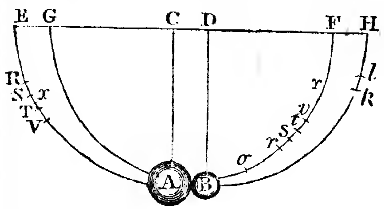
(e) HANC doctrinam Wallisius, brevibus primùm scriptis cum Societate Regiâ communicatam, postea in libro suo *De Motu*, anno 1671 in lucem edito, capite decimo tertio, fusè exposuit. Hugenius autem eleganter eandem & accuratè pertractavit in libro *de Motu Corporum ex percussione*, quem post mortem auctoris, anno 1703, cum Dioptricâ ac scriptis quibusdam aliis, in lucem emiserunt viri docti Burcherus de Volder & Bern Fullenius, quibus id negotii Hugenius testamento demandaverat.

(f) NEMPE cùm RV sit retardatio tota, quam motus corporis penduli, ex aëris renixu, oscillatione geminâ subierit; retardatio, quam vis eadem renitentis aëris, simplicis oscillationis spatio, corporis motui intulerit, hæc illius RV semissis erit. Sed simplicis illius oscillationis initium neque à puncto altissimo R sumendum est, unde corpus pendulum primùm demissum est, neque ab infimo V, quod post unam oscillationem redeundo illud attigerit; sed à puncto aliquo duorum R, V intermedio: quia majorem motûs retardationem, arcum oscillationis primæ ampliorem quàm angustiorem secundæ percurrendo, corpus subierit. Punctum autem illud intermedium proximè saltem ita definieris, si arcum ST, quartæ parti arcûs RV æqualem, in medio arcûs RV ita collocaveris, ut punctum arcûs ST medium ipsius RV medium occupet; unde ea fiet arcûs RT, in punctis S, T divisio, quam Newtonus fieri jussit. Arcum enim utrumque RV, ST punctum *x* medium dividat:

et

LEGES MOTUS.

bus oscillantium pendulorum, suffragante horologiorum experientiâ quotidianâ. Ex his iisdem, & lege tertiâ, *Christophorus Wrennus* eques auratus, *Johannes Wallisius S. T. D.* & *Christianus Hugenius*, ætatis superioris Geometrarum facilè principes, regulas congressuum & reflexionum duorum corporum seorsim invenerunt, & eodem fere tempore (d) cum *Societate Regiâ* communicârunt, inter se (quoad has leges) omnino conspirantes: & primus quidem *Wallisius*, deinde *Wrennus* & *Hugenius* inventum prodiderunt (e). Sed & veritas comprobata est à *Wrenno*, coram *Regiâ Societate*, per experimentum pendulorum: quod etiam *Clarissimus Mariottus* libro integro exponere mox dignatus est. Verum, ut hoc experimentum cum theoriis ad amussim congruat, habenda est ratio, cum resistentiæ aëris, tum etiam vis elasticæ concurrentium corporum. Pendeant corpora sphærica A, B filis parallelis & æqualibus AC, BD, à centris C, D. His centris & intervallis describantur semicirculi EAF, GBH, radiis CA, DB bisecti. Trahatur corpus A ad arcûs EAF punctum quodvis R, &, subducto corpore B, demittatur inde; redeatque, post unam oscillationem, ad punctum V. Est RV retardatio ex resistentiâ aëris (f). Hujus RV fiat ST pars quarta sita in medio; ita scilicet ut RS & TV æquentur, sitque RS ad ST ut 3 ad 2. Et ista ST exhibebit retardationem in descensu ab S ad A quàm proximè. Restituatur corpus B in lo-

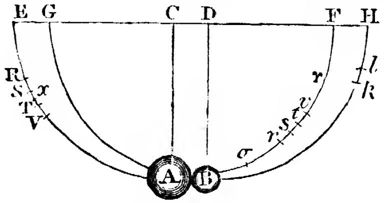


et sit ϒ punctum arcûs AF, quod primâ oscillatione, corpus pendulum, à puncto R demissum attigerit. Arcus tres RA, Aϒ, AV, erunt quàm proximè arithmetici: arcus autem tres RA, A*x*, AV arithmetici: arcus igitur A*x*, Aϒ inter se æquales erunt, cùm uterque duorum RA, AV simul sumptorum semissis sit. Præterea cùm RA, AV simul sumpti duplo arcûs Aϒ æquales sint, si addatur illis duplus arcus Aϒ, efficietur quadruplum arcûs Aϒ. Ergo arcus Aϒ vel illi æqualis A*x*, duorum Rϒ, ϒV simul sumptorum pars quarta erit. Duorum igitur Rϒ, ϒV, quos oscillatione geminâ corpus pendulum, ab R demissum, absolverit, horum inquam parte quartâ arcus SA paulo major, arcus TA paulo minor erit. Corpus igitur pendulum, à puncto S demissum, motûs retardationem, per arcum SA descendendo, parte quartâ retardationis RV paulo majorem subierit; & per arcum ipso TA angustiorem ad contrarias partes ascendendo, ejusdem RV parte quartâ tantundem fere minorem. Unde spatio oscillationis integræ, à puncto illo S inchoatæ, dimidiam ipsius RV retardationem corpus pendulum subierit. Et quanquam hujus dimidiâ, sive parte quartâ totius RV, major sit pars illa quæ lapsu per arcum SA impressa fuerit, ut minor sit corporis penduli in loco A velocitas quàm si de loco T per inane illud decidisset, tantilla tamen differentia erit, ut nullius prorsus sit momenti. Q. E. D.

cum:

cum ſuum. Cadat corpus A de puncto s, & velocitas ejus in loco reflexionis A, ſine errore ſenſibili, tanta erit, ac ſi in vacuo cecidiſſet de loco T. Exponatur igitur hæc velocitas per chordam arcûs TA. Nam velocitatem penduli, in puncto infimo, eſſe ut chordam arcûs, quem cadendo deſcripſit, propoſitio eſt Geometris notiſſima. Poſt reflexionem perveniat corpus A ad locum *s*, & corpus B ad locum *k*. Tollatur corpus B; & inveniatur locus *v*, à quo ſi corpus A demittatur, & poſt unam oſcillationem redeat ad locum *r*, ſit *st* pars quarta ipſius *rv* ſita in medio; ita videlicet ut *rs* & *tv* æquentur: & per chordam arcûs *t*A exponatur velocitas, quam corpus A proximè poſt reflexionem habuit in loco A. Nam *t* erit locus ille verus & correctus, ad quem corpus A, ſublatâ aeris reſiſtentiâ, aſcendere debuiſſet. Simili methodo corrigendus erit locus *k*, ad quem corpus B aſcendit, & inveniendus locus *l*, ad quem corpus illud aſcendere debuiſſet in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia, perinde ac ſi in vacuo conſtituti eſſemus. Tandem ducendum erit corpus A (ut ita dicam) in chordam arcûs TA, quæ velocitatem ejus exhibet, ut habeatur motus ejus in loco A, proximè ante reflexionem; deinde in chordam arcûs *t*A, ut habeatur motus ejus in loco A proximè poſt reflexionem. Et ſic corpus B ducendum erit in chordam arcûs B*l*, ut habeatur motus ejus proximè poſt reflexionem. Et ſimili methodo, ubi corpora duo ſimul demittuntur de locis diverſis, inveniendi ſunt motus utriuſque tam ante, quàm poſt reflexionem; & tum demum conferendi ſunt motus inter ſe, & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in pendulis pedum decem rem tentando, idque in corporibus tam inæqualibus quàm æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis ampliſſimis, puta pedum octo vel duodecim vel ſexdecim, concurrerent; reperi ſemper, ſine errore trium digitorum in menſuris, ubi corpora ſibi mutuò directè occurrebant, æquales eſſe mutationes motuum corporibus in partes contrarias illatas, atque ideo actionem & reactionem ſemper eſſe æquales. Ut ſi corpus A incidebat in corpus B quieſcens cum novem partibus motûs, & amiſſis ſeptem partibus pergebat, poſt reflexionem, cum duabus; corpus B reſiliebat cum partibus iſtis ſeptem. Si corpora obviam

obviam ibant, A cum duodecim partibus & B cum ſex, & redibat A cum duabus; redibat B cum octo, factâ detractione partium quatuordecim utrinque. De motu ipſius A ſubducantur partes duodecim, & reſtabit nihil: ſubducantur aliæ partes duæ, & fiet motus duarum partium in plagam contrariam: & ſic de motu corporis B, partium ſex, ſubducendo partes quatuordecim, fient partes octo in plagam contrariam. Quòd ſi corpora ibant ad eandem plagam, A velociùs cum partibus quatuordecim, & B tardius cùm partibus quinque, & poſt reflexionem pergebat A cum quinque partibus; pergebat B cum quatuordecim, factâ tranſlatione partium novem de A in B. Et ſic in reliquis. A congreſſu & colliſione corporum nunquam mutabatur quantitas motûs, quæ ex ſummâ motuum conſpirantium, & differentiâ contrariorum, colligebatur. Nam errorem digiti unius & alterius in menſuris tribuerim difficultati peragendi ſingula ſatis accuratè. Difficile erat, tum pendula ſimul demittere, ſic ut corpora in ſe mutuò impingerent in loco infimo AB; tum loca *s*, *k* notare, ad quæ corpora aſcendebant poſt concurſum. Sed & in ipſis corporibus pendulis inæqualis partium denſitas, & textura aliis de cauſis irregularis, errores inducebant.



Porro nequis objiciat regulam, ad quam probandam inventum eſt hoc experimentum, præſupponere corpora vel abſolutè dura eſſe, vel ſaltem perfectè elaſtica, cujuſmodi nulla reperiuntur in compoſitionibus naturalibus; addo, quòd experimenta jam deſcripta ſuccedunt in corporibus mollibus æquè ac in duris, nimirum à conditione duritiei neutiquam pendentia. Nam ſi regula illa in corporibus non perfectè duris tentanda eſt, debebit ſolummodo reflexio minui, in certâ proportione pro quantitate vis elaſticæ. In theoriâ *Wrenni* & *Hugenii* corpora abſolutè dura redeunt ab invicem cum velocitate congreſſûs. Certiùs id affirmabitur de perfectè elaſticis (g). In imperfectè elaſticis velocitas

(g) Hisce credo Newtonus inſinuare voluit, aliud eſſe corporum duritiem, aliud vim reſiliendi; ac

tas reditûs minuenda eſt ſimul cum vi elaſticâ; propterea quòd vis illa (niſi ubi partes corporum ex congreſſu læduntur, vel extenſionem aliqualem quaſi ſub malleo patiuntur) certa ac determinata ſit, quantum ſentio, faciatque ut corpora redeant ab invicem cum velocitate relativâ, quæ ſit ad relativam velocitatem concurſûs in datâ ratione [h]. Id in pilis ex lanâ arctè conglomeratâ & fortiter conſtrictâ ſic tentavi. Primùm demittendo pendula & menſurando reflexionem, inveni quantitatem vis elaſticæ; deinde per hanc vim determinavi reflexiones in aliis caſibus concurſuum, & reſpondebant experimenta. Redibant ſemper pilæ ab invicem cum velocitate relativâ, quæ eſſet ad velocitatem relativam concurſûs ut 5 ad 9 circiter. Eâdem fere cum velocitate redibant pilæ ex chalybe: aliæ ex ſubere cum paulo minore: in vitreis autem proportio erat 15 ad 16 circiter. Atque hoc pacto lex tertia, quoad ictus & reflexiones, per theoriam comprobata eſt, quæ cum experientiâ planè congruit.

In attractionibus rem ſic breviter oſtendo. Corporibus duobus quibuſvis A, B ſe mutuò trahentibus, concipe obſtaculum quodvis interponi, quo congreſſus eorum impediatur. Si corpus alterutrum A magis trahitur verſus corpus alterum B, quàm illud alterum B in prius A, obſtaculum magis urgebitur preſſione corporis A, quàm preſſione corporis B; proindeque non manebit in æquilibrio. Prævalebit preſſio fortior, facietque ut ſyſtema corporum duorum & obſtaculi moveatur in directum in partes verſus B, motuque in ſpatiis liberis ſemper accelerato abeat in infinitum. Quod eſt abſurdum & legi primæ contrarium. Nam per legem primam debebit ſyſtema perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum; proindeque corpora æqualiter urgebunt obſtaculum, & idcirco æqualiter trahentur in invicem. Tentavi hoc in magnete & ferro. Si hæc in vaſculis

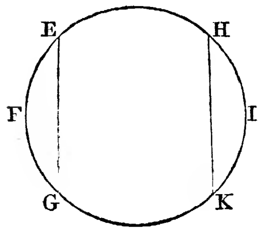
propriis

ac propterea quæ Wrennus & Hugenius de duris pronunciàrunt, cum eadem illi reſilientia intelligerent quæ dura, de iis potiùs affirmanda eſſe, quæ maximâ vi reſiliendi prædita ſint. Nimirum Newtonus cum Wallifio id *Durum* appellat "quod ictui nequaquam cedit: Id *Molle*, quod ictui ita cedit, ut priſtinam figuram amittat; ut Lutum, Cera, Plumbum, aliaque ſimilia quæ ictu deformantur: Id *Elaſticum*, quod utut ictui aliquantum cedat, ſe tamen in priſtinam formam ſuopte marte reſtituit" (Wallis, De Motu, Cap. XI. Prop. I. Schol.) Si igitur id ſit durum, quod ictui nequaquam cedat, hoc eſt cujus partes nullâ vi impreſſâ aut flecti aut ſeparari poſſint; certè potentiâ illâ inſitâ, quâ res, vi ſubitâ deformatæ, figuris ſuis reſtituuntur, & inter ſe colliſæ reſili-

unt;

propriis ſeſe contingentibus ſeorſim poſita, in aquâ ſtagnante juxtà fluitent; neutrum propellet alterum, ſed æqualitate attractionis utrinque ſuſtinebunt conatus in ſe mutuos, ac tandem in æquilibrio conſtituta quieſcent.

Sic etiam gravitas inter terram & ejus partes mutua eſt. Secetur terra FI, plano quovis EG, in partes duas EGF & EGI: & æqualia erunt harum pondera in ſe mutuò. Nam ſi plano alio HK, quod priori EG parallelum ſit, pars major EGI ſecetur in partes duas, EGHK & HKI, quarum HKI æqualis ſit parti priùs abſciſſæ EFG: manifeſtum eſt, quòd pars media EGKH, pondere proprio, in neutram partium extremarum propendebit; ſed inter utramque in æquilibrio, ut ita dicam, ſuſpendetur, & quieſcet. Pars autem extrema HKI toto ſuo pondere incumbet in partem mediam, & urgebit illam in partem alteram extremam EGF; ideoque vis, quâ partium HKI & EGKH ſumma, EGI, tendit verſus partem tertiam EGF, æqualis eſt ponderi partis HKI, id eſt ponderi partis tertiæ EGF. Et propterea pondera partium duarum EGI, EGF in ſe mutuò ſunt æqualia, uti volui oſtendere. Et niſi pondera illa æqualia eſſent, terra tota, in libero æthere fluitans, ponderi majori cederet; &, ab eo fugiendo, abiret in infinitum.



Ut corpora in concurſu & reflexione idem pollent, quorum velocitates ſunt reciprocè ut vires inſitæ: ſic, in movendis inſtrumentis mechanicis, agentia idem pollent, & conatibus contrariis ſe mutuò ſuſtinent, quorum velocitates, ſecundum determinationem virium æſtimatæ, ſunt reciprocè ut vires. Sic pondera æquipollent ad movenda brachia Libræ, quæ, oſcillante librâ, ſunt reciprocè ut eorum velocitates ſurſum & deorſum: hoc eſt, pondera, ſi rectâ aſcendunt & deſcendunt, æquipollent, quæ ſunt

unt; hâc, inquam, quod durum eſt prorſus carebit: adeoque, cùm nihil ſine cauſâ fiat, corporum durorum, ſi concurrerint, nulla videtur poſſe fieri reflexio. *Vide Le Sœur, & Jacquier ad locum.*

(h) FIGURIS utique corporum ſpecie & magnitudine datis. In diverſis corporum magnitudinibus, quorum figuræ inter ſe ſint ſimiles; differentiæ, quibus velocitates relativæ poſt congreſſum aberunt ab eâ quæ antè fuerat, laterum homologorum inter ſe proportiones ſervant: ſicut ſuadere exiſtimantur experimenta quædam Rizetti, quæ in Commentariis Academiæ Bononienſis memorantur. Hæc autem fide doctiſſimorum Patrum Le Sœur & Jacquier ipſe refero.

reciprocè

reciprocè ut punctorum, à quibus suspenduntur, distantiæ ab axe libræ; sin planis obliquis, aliisve admotis obstaculis, impedita ascendunt vel descendunt obliquè; æquipollent, quæ sunt reciprocè ut ascensus & descensus, quatenus facti secundum perpendiculum: idque ob determinationem gravitatis deorsum. Similiter in Trochleâ, seu Polyspasto, vis manûs funem directè trahentis, quæ sit ad pondus, vel directè, vel obliquè ascendens, ut velocitas ascensûs perpendicularis ad velocitatem manûs funem trahentis, sustinebit pondus. In Horologiis & similibus instrumentis, quæ ex rotulis commissis constructa sunt, vires contrariæ ad motum rotularum promovendum & impediendum, si sunt reciprocè ut velocitates partium rotularum, in quas imprimuntur, sustinebunt se mutuò. Vis Cochleæ ad premendum corpus est ad vim manûs manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii, eà in parte ubi à manu urgetur, ad velocitatem progressivam cochleæ versus corpus pressum. Vires, quibus Cuneus urget partes duas ligni fissi, sunt ad vim Mallei in cuneum, ut progressus cunei, secundum determinationem vis à malleo in ipsum impressæ, ad velocitatem quâ partes ligni cedunt cuneo, secundum lineas faciebus cunei perpendiculares. Et par est ratio machinarum omnium.

Harum efficacia & usus in eo solo consistit, ut diminuendo velocitatem augeamus vim, & contrà: unde solvitur in omni aptorum instrumentorum genere Problema, *Datum pondus datâ vi movendi*, aliamve datam resistentiam vi datâ superandi. Nam si machinæ ita formentur, ut velocitates agentis & resistentis sint reciprocè ut vires; agens resistentiam sustinebit: & majori cum velocitatum disparitate eandem vincet. Certè si tanta sit velocitatum disparitas, ut vincatur etiam resistentia omnis, quæ tam ex contiguorum & inter se labentium corporum attritione, quàm ex continuorum, & ab invicem separandorum cohæsione, & elevandorum ponderibus oriri solet; superata omni eâ resistentiâ, vis redundans accelerationem motûs sibi proportionalem, partim in partibus machinæ, partim in corpore resistente producet. Cæterùm Mechanicam tractare non est hujus instituti. Hisce volui tantùm ostendere, quàm late pateat quámque certa sit lex tertia motûs. Nam si æstimetur agentis actio ex ejus vi & velocitate

conjunctim; & similiter resistentis reactio æstimetur conjunctim ex ejus partium singularum velocitatibus & viribus resistendi ab earum attritione, cohæsione, pondere, & acceleratione oriundis; erunt actio & reactio, in omni instrumentorum usu, sibi invicem semper æquales. Et quatenus actio propagatur per instrumentum, & ultimò imprimitur in corpus omne resistens; ejus ultima determinatio determinationi reactionis semper erit contraria.

DE

MOTU CORPORUM

LIBER PRIMUS.

SECTIO I.

De methodo rationum primarum & ultimarum, cujus ope ſequentia demonſtrantur.

LEMMA I.

Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito conſtanter tendunt, & ante finem temporis illius propriùs ad invicem accedunt, quàm pro datâ quâvis differentiâ, fiunt ultimò æquales.

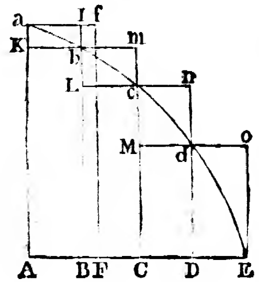
SI negas; fiant ultimò inæquales, & ſit earum ultima differentia D. Ergo nequeunt propiùs ad æqualitatem accedere quàm pro datâ differentiâ D: contra hypotheſin ([a]).

([a]) Vide Tom. I. p. 237.

LEMMA

LEMMA II.

Si in figurâ quâvis AacE, rectis Aa, AE & curvâ acE comprehenſâ, inſcribantur parallelogramma quotcunque, Ab, Bc, Cd, &c. ſub baſibus AB, BC, CD, &c. æqualibus, & lateribus Bb, Cc, Dd, &c. figuræ lateri Aa parallelis contenta; & compleantur parallelogramma aKbl, bLcm, cMdn, &c. Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico, quòd ultimæ rationes, quas habent ad ſe invicem figura inſcripta AKbLcMdD, circumſcripta AalbmcndoE, & curvilinea AabcdE, ſunt rationes æqualitatis.



Nam figuræ inſcriptæ & circumſcriptæ differentia eſt ſumma parallelogrammorum Kl, Lm, Mn, Do; hoc eſt (ob æquales omnium baſes) rectangulum ſub unius baſi Kb & altitudinum ſummâ Aa, id eſt, rectangulum ABla. Sed hoc rectangulum, eo quòd latitudo ejus AB in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per Lemma I) figura inſcripta & circumſcripta, & multo magis figura curvilinea intermedia, fiunt ultimò æquales. Q. E. D.

LEMMA II.

Eædem rationes ultimæ ſunt etiam rationes æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines AB, BC, CD, &c. ſunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.

Sit enim AF æqualis latitudini maximæ, & compleatur parallelogrammum FAaf. Hoc erit majus quàm differentia figuræ inſcriptæ et figuræ circumſcriptæ; at, latitudine ſuâ AF in infinitum diminutâ, minus fiet dato quovis rectangulo. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſumma ultima parallelogrammorum evaneſcentium coincidit omni ex parte cum figurâ curvilineâ.

Corol. 2. Et multo magis figura rectilinea, quæ chordis evaneſcentium arcuum *ab*, *bc*, *cd*, &c. comprehenditur, coincidit ultimo cum figurâ curvilineâ.

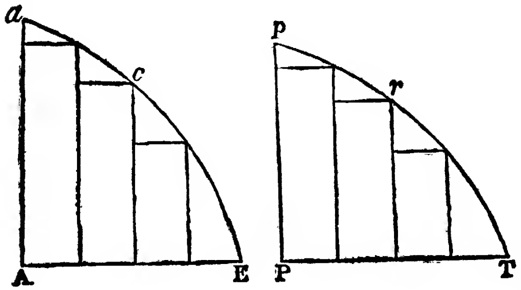
Corol.

Corol. 3. Ut & figura rectilinea circumscripta, quæ tangentibus eorundem arcuum comprehenditur.

Corol. 4. Et propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros *ac*E), non sunt rectilineæ, sed rectilinearum limites curvilinei.

LEMMA IV.

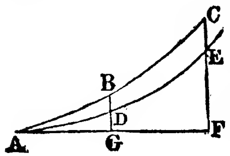
Si in duabus figuris AacE, P*pr*T, *inscribantur (ut suprà) duæ parallelogrammorum series, sitque idem amborum numerus;* &, *ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in unâ figurâ ad parallelogramma in alterâ, singulorum ad singula, sint eædem; dico, quòd figuræ duæ* AacE, P*p*rT, *sunt ad invicem in eâdem illâ ratione.*



Etenim ut sunt parallelogramma singula ad singula, ita (componendo) fit summa omnium ad summam omnium, & ita figura ad figuram; existente nimirum figurâ priore (per lemma III) ad summam priorem, & figurâ posteriore ad summam posteriorem in ratione æqualitatis. Q. E. D ([b]).

Corol. Hinc si duæ cujuscunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, secunda ad secundam, cæteræque suo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem

([b]) *Cor. H.* 1. Si duæ Curvæ (ABC, ADE) axem habeant communem (AF) hujus autem curvæ ordinatæ ad ordinatas alterius datam aliquam rationem gerant, binas utique semper conferendo, quæ ex eodem axis puncto eductæ sint; areæ curvarum AFC, AFE, datam ordinatarum inter se rationem habebunt. Nempe hoc dico; à puncto G, in axe curvarum, AF, pro lubitu assumpto, eductâ ad perpendiculum rectâ GB, quæ curvis duabus, ABC, ADE, illi in puncto B, huic in puncto D, occurrat; si rectis BG, DG, data aliqua ratio intercedat, quæ eadem obtineat à quocunque demum axis puncto ordinata educatur, eadem Arearum etiam, AFC, AFE, inter ipsas ratio erit.



Cor.

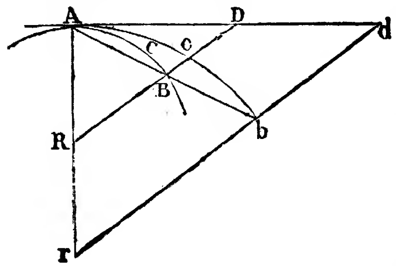
invicem in eâdem illâ datâ ratione. Nam si in lemmatis hujus figuris sumantur parallelogramma inter se ut partes, summæ partium semper erunt ut summæ parallelogrammorum; atque ideo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, in ultimâ ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id est (per hypothesin) in ultimâ ratione partis ad partem ([c]).

LEMMA V.

Similium figurarum latera omnia, quæ sibi mutuò respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quàm rectilinea; & *areæ sunt in duplicatâ ratione laterum.*

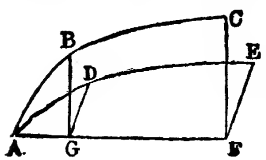
LEMMA VI.

Si arcus quilibet positione datus, ACB, *subtendatur chordâ* AB, & *in puncto aliquo* A, *in medio curvaturæ continuæ* ([d]), *tangatur à rectâ, utrinque productâ,* AD; *dein puncta* A, B *ad invicem accedant,* & *coeant; dico, quòd angulus* BAD, *sub chordâ* & *tangente contentus, minuetur in infinitum,* & *ultimò evanescet.*



Nam si angulus ille non evanescit, continebit arcus ACB cum tangente AD angulum rectilineo æqualem; & propterea curvatura ad punctum A non erit continua, contra hypothesin.

Cor. H. 2. Quòd si recta GB non ad perpendiculum, sed cum datâ quâvis ad axem communem AF inclinatione educatur, idem obtinebit.



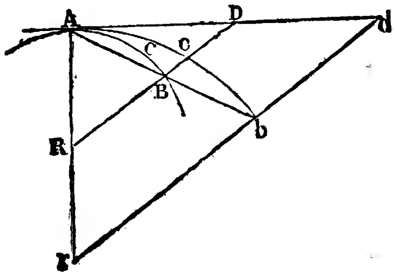
Cor. H. 3. Si verò Curvæ duæ ABC, ADE, eo modo ad se mutuò sint affectæ, ut rectæ, GB, GD, à puncto aliquo G in axe communi, AF, ordinatim eductæ, datis quidem sed diversis ad axem illam inclinationibus, datam inter se rationem gerant; quæ eadem obtineat, à quocunque demum axis puncto ordinatæ illæ educantur; vel sic etiam aeris ABCF, ADEF, data quædam ratio intercedet; ea nimirum, quam rectæ à punctis E, D in axem AF ad perpendiculum demissæ inter se habent.

([c]) Vide Tom. I. p. 240. ([d]) Vide Tom. I. p. 242.

LEMMA

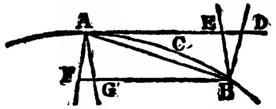
LEMMA VII.

Iiſdem poſitis; dico quòd ultima ratio arcûs, chordæ, & tangentis ad invicem eſt ratio æqualitatis.



Nam dum punctum B ad punctum A accedit, intelligantur ſemper AB & AD ad puncta longinqua *b* ac *d* produci, & ſecanti BD parallela agatur *bd*. Sitque arcus A*cb* ſemper ſimilis arcui ACB. Et punctis A, B coeuntibus, angulus *d*A*b*, per lemma ſuperius, evaneſcet; ideoque rectæ ſemper finitæ A*b*, A*d*, & arcus intermedius A*cb* coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hiſce ſemper proportionales rectæ AB, AD, & arcus intermedius ACB evaneſcent, & rationem ultimam habebunt æqualitatis. Q. E. D.

Corol. 1. Unde ſi per B ducatur tangenti parallela BF, rectam quamvis AF per A tranſeuntem perpetuò ſecans in F, hæc BF ultimò ad arcum evaneſcentem ACB rationem habebit æqualitatis; eo quòd completo parallelogrammo AFDB rationem ſemper habet æqualitatis ad AD.



Corol. 2. Et ſi per B & A ducantur plures rectæ BE, BD, AF, AG, ſecantes tangentem AD & ipſius paralellam BF; ratio ultima abſciſſarum omnium AD, AE, BF, BG, chordæque & arcûs AB ad invicem erit ratio æqualitatis.

Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro ſe invicem uſurpari poſſunt.

LEMMA VIII.

Si rectæ datæ AR, BR (e) *cum arcu* ACB, *chordâ* AB, & *tangente* AD, *triangula tria* RAB, RACB, RAD *conſtituunt, dein puncta* A, B *accedunt ad invicem: dico, quòd ultima forma triangulorum evaneſcentium eſt ſimilitudinis, & ultima ratio æqualitatis. (Vide fig. Lemm.* VII.)

Nam dum punctum B ad punctum A accedit, intelligantur

(e) Intellige rectam AR poſitione datam; rectam verò BR eâ lege mobilem, ut cum aliâ aliquâ, poſitione datâ, ſemper ea parallela maneat.

ſemper

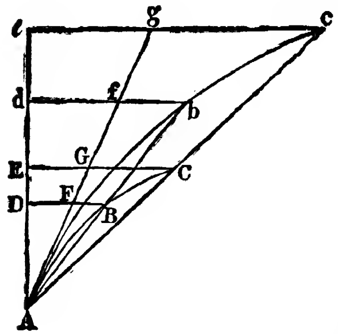
ſemper AB, AD, AR ad puncta longinqua *b*, *d* & *r* produci, ipſique RD parallela agi *rbd*, & arcui ACB ſimilis ſemper ſit arcus A*cb*. Et coeuntibus punctis A, B, angulus *b*A*d* evaneſcet, & propterea triangula tria ſemper finita *r*A*b*, *r*A*cb*, *r*A*d* coincident, ſuntque eo nomine ſimilia & æqualia. Unde & hiſce ſemper ſimilia & proportionalia RAB, RACB, RAD fient ultimò ſibi invicem ſimilia & æqualia. Q. E. D.

Corol. Et hinc triangula illa, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro ſe invicem uſurpari poſſunt.

LEMMA IX.

Si recta AE & *curva* ABC *poſitione datæ ſe mutuò ſecent in angulo dato,* A, & *ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur* BD, CE, *curvæ occurrentes in* B, C, *dein puncta* B, C *ſimul accedant ad punctum* A: *dico, quòd areæ triangulorum* ABD, ACE *erunt ultimò ad invicem in duplicatâ ratione laterum.*

Etenim dum puncta B, C accedunt ad punctum A, intelligatur ſemper AD produci ad puncta longinqua *d* & *e*; ut ſint A*d*, A*e* ipſis AD, AE proportionales, & erigantur ordinatæ *db*, *ec* ordinatis DB, EC parallelæ, quæ occurrant ipſis AB, AC productis in *b* & *c*. Ducì intelligatur, tum curva A*bc* ipſi ABC ſimilis, tum recta A*g*, quæ tangat curvam utramque in A, & ſecet ordinatam applicatas DB, EC, *db*, *ec* in F, G, *f*, *g*. Tum, manente longitudine A*e*, coeant puncta B, C cum puncto A; &, angulo *c*A*g* evaneſcente, coincident areæ curvilineæ A*bd*, A*ce* cum rectilineis A*fd*, A*ge*; ideoque (per Lemma V.) erunt in duplicatâ ratione laterum A*d*, A*e*: ſed his areis proportionales ſemper ſunt areæ ABD, ACE, & his lateribus latera AD, AE (f). Ergo & areæ ABD, ACE ſunt ultimò in duplicatâ ratione laterum AD, AE. Q. E. D.



(f) Vide Tom. I. p. 244.

LEMMA

LEMMA X.

Spatia, quæ corpus urgente quâcunque vi finitâ describit, sive vis illa determinata & immutabilis sit, sive eadem continuò augeatur, vel continuò diminuatur; sunt, ipso motûs initio, in duplicatâ ratione temporum.

Exponantur tempora per lineas AD, AE, (*Vide fig. Lem.* IX.) & velocitates genitæ per ordinatas DB, EC; & spatia his velocitatibus descripta, erunt ut areæ ABD, ACE his ordinatis descriptæ (g), hoc est, ipso motûs initio (per Lemma IX) in duplicatâ ratione temporum AD, AE. Q. E. D.

Corol. 1. Et hinc facilè colligitur, quòd corporum, similes similium figurarum partes temporibus proportionalibus describentium, errores, qui viribus quibusvis æqualibus ad corpora similiter applicatis generantur, & mensurantur per distantias corporum à figurarum similium locis illis, ad quæ corpora eadem temporibus iisdem proportionalibus, sine viribus istis, pervenirent, sunt ut quadrata temporum in quibus generantur quàm proximè.

Corol. 2. Errores autem qui viribus proportionalibus, ad similes figurarum similium partes similiter applicatis, generantur, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 3. Idem intelligendum est de spatiis quibusvis, quæ corpora, urgentibus diversis viribus, describunt. Hæc sunt, ipso motûs initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 4. Ideoque vires sunt ut spatia, ipso motûs initio, descripta directè, & quadrata temporum inversè.

Corol. 5. Et quadrata temporum sunt ut descripta spatia directè, & vires inversè.

SCHOLIUM.

Si quantitates indeterminatæ diversorum generum conferantur inter se, & earum aliqua dicatur esse ut est alia quævis directè vel inversè: sensus est, quòd prior augetur vel diminuitur in

(g) Vide Tom I. p. 244.

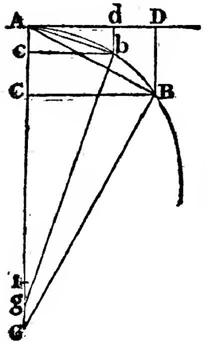
eâdem

eâdem ratione cum posteriore, vel cum ejus reciprocâ. Et si earum aliqua dicatur esse ut sunt aliæ duæ vel plures directè vel inversè: sensus est, quòd prima augetur vel diminuitur in ratione, quæ componitur ex rationibus, in quibus aliæ, vel aliarum reciprocæ, augentur vel diminuuntur. Ut si A dicatur esse ut B directè & C directè & D inversè: sensus est, quòd A augetur, vel diminuitur, in eâdem ratione cum $B \times C \times \frac{1}{D}$; hoc est, quòd A & $\frac{BC}{D}$ sunt ad invicem in ratione datâ.

LEMMA XI.

Subtensa evanescens anguli contactûs, in Curvis omnibus curvaturam finitam ad punctum contactûs habentibus, est ultimò in ratione duplicatâ subtensæ arcûs contermini.

Cas. 1. Sit arcus ille AB, tangens ejus AD, subtensa anguli contactûs ad tangentem perpendicularis BD, subtensa arcûs AB. Huic subtensæ AB & tangenti AD perpendiculares erigantur AG, BG, occurrentes in G; dein accedant puncta D, B, G, ad puncta *d*, *b*, *g*, sitque J intersectio linearum BG, AG ultimò facta, ubi puncta D, B accedunt usque ad A. Manifestum est, quòd distantia GJ minor esse potest quàm assignata quævis. Est autem (ex naturâ circulorum per puncta ABG, A*bg* transeuntium) AB *quad.* æquale AG×BD, & A*b quad.* æquale A*g*×*bd*; ideoque ratio AB *quad.* ad A*b quad.* componitur ex rationibus AG ad A*g* & BD ad *bd*. Sed quoniam GJ assumi potest minor longitudine quâvis assignatâ, fieri potest, ut ratio AG ad A*g* minùs differat à ratione æqualitatis, quàm pro differentiâ quâvis assignatâ; ideoque ut ratio AB *quad.* ad A*b quad.* minùs differat à ratione BD ad *bd* quàm pro differentiâ quâvis assignatâ.



Est ergo, per Lemma 1, ratio ultima AB *quad.* ad A*b quad.* eadem cum ratione ultimâ BD ad *bd*. Q. E. D.

Cas. 2. Inclinetur jam BD ad AD in angulo quovis dato, & eadem

dem ſemper erit ratio ultima BD ad *bd* quæ priùs, ideoque eadem ac AB *quad.* ad A*b quad.* Q. E. D.

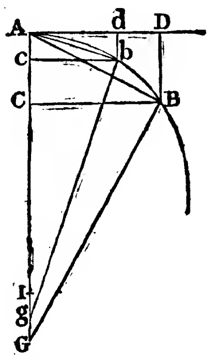
Caſ. 3. Et quamvis angulus D non detur, ſed recta BD ad datum punctum convergat, vel aliâ quâcunque lege conſtituatur; tamen anguli D, *d*, communi lege conſtituti, ad æqualitatem ſemper vergent; & propiùs accedent ad invicem quàm pro differentiâ quâvis aſſignatâ, ideoque ultimò æquales erunt, per Lem. I; & propterea lineæ BD, *bd* ſunt in eâdem ratione ad invicem ac priùs. Q. E. D.

Corol. 1. Unde cùm tangentes AD, A*d*, arcus AB, A*b*, & eorum ſinus BC, *bc* fiant ultimò chordis AB, A*b* æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimò ut ſubtenſæ BD, *bd*.

Corol. 2. Eorundem quadrata ſunt etiam ultimò ut ſunt arcuum ſagittæ, quæ chordas biſecant, & ad datum punctum convergunt. Nam ſagittæ illæ ſunt ut ſubtenſæ BD, *bd* (h).

Corol. 3. Ideoque ſagitta eſt in duplicatâ ratione temporis quo corpus datâ velocitate deſcribit arcum.

Corol. 4. Triangula rectilinea ADB, A*db* ſunt ultimò in triplicatâ ratione laterum AD, A*d*, inque ſeſquiplicatâ laterum DB, *db*; utpote in compoſitâ ratione laterum AD & DB, A*d* & *db* exiſtentia.



Sic & triangula ABC, A*bc* ſunt ultimò in triplicatâ ratione laterum BC, *bc*. Rationem verò ſeſquiplicatam voco triplicatæ ſubduplicatam, quæ nempe ex ſimplici & ſubduplicatâ componitur.

Corol. 5. Et quoniam DB, *db* ſunt ultimò parallelæ & in duplicatâ ratione ipſarum AD, A*d*: erunt areæ ultimæ curvilineæ ADB, A*db* (ex naturâ Parabolæ) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum ADB, A*db*; & ſegmenta AB, A*b* partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ et hæc ſegmenta erunt in triplicatâ ratione tum tangentium AD, A*d*, tum chordarum & arcuum AB, A*b*.

(h) Vide Tom I. p. 248.

SCHOLIUM.

Cæterùm in his omnibus ſupponimus angulum contactûs nec infinitè majorem eſſe angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus ſuis, nec iiſdem infinitè minorem; hoc eſt, curvaturam ad punctum A, nec infinitè parvam eſſe, nec infinitè magnam; ſeu intervallum AJ finitæ eſſe magnitudinis. Capi enim poteſt DB ut AD^3: quo in caſu circulus nullus per punctum A, inter tangentem AD & curvam AB, duci poteſt, proindeque angulus contactûs erit infinitè minor circularibus. Et ſimili argumento ſi fiat DB ſucceſſivè ut AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, &c. habebitur ſeries angulorum contactûs pergens in infinitum, quorum quilibet poſterior eſt infinitè minor priore. Et ſi fiat DB ſucceſſivè ut AD^2, $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{5}{4}}$, $AD^{\frac{6}{5}}$, $AD^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia ſeries infinita angulorum contactûs, quorum primus eſt ejuſdem generis cum circularibus, ſecundus infinitè major, & quilibet poſterior infinitè major priore. Sed & inter duos quoſvis ex his angulis poteſt ſeries, utrinque in infinitum pergens, angulorum intermediorum inſeri, quorum quilibet poſterior erit infinitè major minorve priore. Ut ſi inter terminos AD^2 & AD^3 inſeratur ſeries $AD^{\frac{13}{6}}$, $AD^{\frac{11}{5}}$, $AD^{\frac{9}{4}}$, $AD^{\frac{7}{3}}$, $AD^{\frac{5}{2}}$, $AD^{\frac{8}{3}}$, $AD^{\frac{11}{4}}$, $AD^{\frac{14}{5}}$, $AD^{\frac{17}{6}}$, &c. Et rurſus inter binos quoſvis angulos hujus ſeriei inſeri poteſt ſeries nova angulorum intermediorum, ab invicem infinitis intervallis differentium. Neque novit natura limitem (i).

Quæ de curvis lineis, deque ſuperficiebus comprehenſis demonſtrata ſunt, facilè applicantur ad ſolidorum ſuperficies curvas, & contenta. Præmiſi verò hæc lemmata, ut effugerem tædium deducendi longas demonſtrationes, more veterum geometrarum, ad abſurdum. Contractiores enim redduntur demonſtrationes per methodum indiviſibilium. Sed quoniam durior eſt indiviſibilium hypotheſis, & propterea methodus illa minùs geometrica cenſetur; malui demonſtrationes rerum ſequentium ad ultimas quantitatum evaneſcentium ſummas & rationes, primaſque naſcentium, id eſt, ad limites ſummarum & rationum deducere;

(i) Vide Keil. Introduct. ad Veram Phyſicam, Lect. 4. & Newtoni Geometr. Analyt. Cap. VII. § 23—26.

& propterea limitum illorum demonſtrationes, quâ potui brevitate, præmittere. His enim idem præſtatur quod per methodum indiviſibilium; & principiis demonſtratis jam tutiùs utemur. Proinde in ſequentibus, ſiquando quantitates tanquam ex particulis conſtantes conſideravero, vel ſi pro rectis uſurpavero lineolas curvas; nolim indiviſibilia, ſed evaneſcentia diviſibilia, non ſummas & rationes partium determinatarum, ſed ſummarum & rationum limites ſemper intelligi; vimque talium demonſtrationum ad methodum præcedentium lemmatum ſemper revocari.

Objectio eſt, quòd quantitatum evaneſcentium nulla ſit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non eſt ultima; ubi evanuerunt, nulla eſt. Sed & eodem argumento æquè contendi poſſet, nullam eſſe corporis, ad certum locum ubi motus finiatur pervenientis, velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non eſſe ultimam; ubi attingit, nullam eſſe. Et reſponſio facilis eſt: per velocitatem ultimam intelligi eam, quâ corpus movetur, neque antequam attingit locum ultimum & motus ceſſat, neque poſtea, ſed tunc cùm attingit; id eſt, illam ipſam velocitatem quâcum corpus attingit locum ultimum, & quâcum motus ceſſat. Et ſimiliter per ultimam rationem quantitatum evaneſcentium, intelligendam eſſe rationem quantitatum, non antequam evaneſcunt, non poſtea, ſed quâcum evaneſcunt. Pariter & ratio prima naſcentium eſt ratio quâcum naſcuntur. Et ſumma prima & ultima eſt quâcum eſſe (vel augeri aut minui) incipiunt & ceſſant. Extat limes, quem velocitas in fine motûs attingere poteſt, non autem tranſgredi. Hæc eſt velocitas ultima. Et par eſt ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & ceſſantium. Cúmque hic limes ſit certus & definitus, Problema eſt verè geometricum, eundem determinare. Geometrica verò omnia, in aliis geometricis determinandis ac demonſtrandis, legitimè uſurpantur.

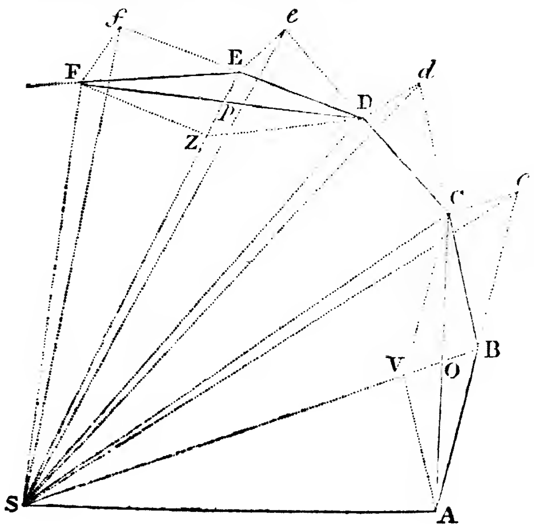
Contendi etiam poteſt, quòd ſi dentur ultimæ quantitatum evaneſcentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines: & ſic quantitas omnis conſtabit ex indiviſibilibus, contrà quàm Euclides de incommenſurabilibus, in libro decimo Elementorum, demonſtravit. Verùm hæc objectio falſæ innititur hypotheſi. Ultimæ rationes illæ, quibuſcum quantitates evaneſcunt, reverà non ſunt rationes quantitatum ultimarum; ſed limites, ad quos quantitatum, ſine limite decreſcentium, rationes ſemper appropinquant; & quas propiùs aſſequi poſſunt, quàm pro datâ quâvis differentiâ, nunquam verò tranſgredi; neque priùs attingere, quàm quantitates diminuuntur in infinitum. Res clariùs intelligetur in infinitè magnis. Si quantitates duæ, quarum data eſt differentia, augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis; nec tamen ideò dabuntur quantitates ultimæ, ſeu maximæ, quarum iſta eſt ratio. In ſequentibus igitur, ſiquando, facili rerum conceptui conſulens, dixero quantitates quàm minimas, vel evaneſcentes, vel ultimas; cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, ſed cogita ſemper diminuendas ſine limite.

SECTIO II.

De inventione virium centripetarum.

PROP. I. THEOR. I.

Areas, quas corpora in gyros acta, radiis ad immobile centrum virium ductis, deſcribunt, & in planis immobilibus conſiſtere, & eſſe temporibus proportionales.



Dividatur tempus in partes æquales; & primâ temporis parte deſcribat corpus, vi inſitâ, rectam AB. Idem ſecundâ temporis parte, ſi nil impediret, rectâ pergeret ad *c*, (per Leg. I.) deſcribens lineam B*c* æqualem ipſi AB; adeo ut radiis AS, BS, *c*S ad centrum actis, confectæ forent æquales

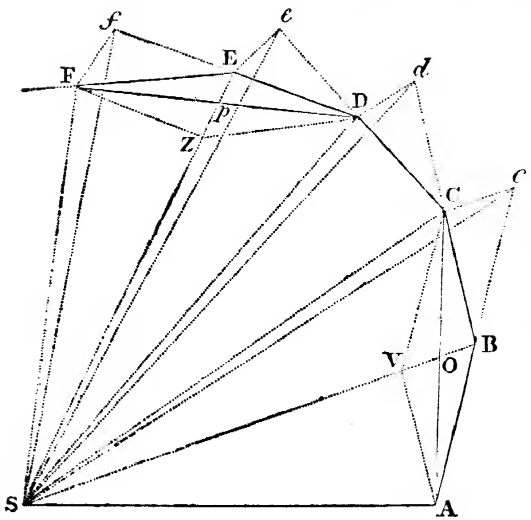
quales areæ ASB, BSc. Verùm ubi corpus venit ad B, agat vis centripeta impulſu unico ſed magno; efficiatque, ut corpus de rectâ Bc declinet, & pergat in rectâ BC. Ipſi BS parallela agatur cC, occurrens BC in C; & completâ ſecundâ temporis parte, corpus (per Legum corol. 1.) reperietur in C, in eodem plano cum triangulo ASB. Junge SC; & triangulum SBC, ob parallelas SB, Cc, æquale erit triangulo SBc, atque ideo etiam triangulo SAB. Simili argumento ſi vis centripeta ſucceſſivè agat in C, D, E, &c. faciens ut corpus ſingulis temporis particulis ſingulas deſcribat rectas CD, DE, EF, &c. jacebunt hæ omnes in eodem plano; & triangulum SCD triangulo SBC, & SDE ipſi SCD, & SEF ipſi SDE æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto deſcribuntur: & componendo, ſunt arearum ſummæ quævis SADS, SAFS inter ſe, ut ſunt tempora deſcriptionum. Augeatur jam numerus & minuatur latitudo triangulorum in infinitum; & eorum ultima perimeter ADF, (per corollarium quartum Lemmatis tertii) erit linea curva: ideoque vis centripeta, quâ corpus à tangente hujus Curvæ perpetuò retrahitur, aget indeſinenter; Areæ verò quævis deſcriptæ, SADS, SAFS, temporibus deſcriptionum ſemper proportionales, erunt iiſdem temporibus in hoc caſu proportionales. Q. E. D.

Corol. 1. Velocitas corporis in centrum immobile attracti eſt, in ſpatiis non reſiſtentibus, reciprocè ut perpendiculum à centro illo in orbis tangentem rectilineam demiſſum. Eſt enim velocitas in locis illis A, B, C, D, E, ut ſunt baſes æqualium triangulorum AB, BC, CD, DE, EF; & hæ baſes ſunt reciprocè ut perpendicula in ipſas demiſſa.

Corol. 2. Si arcuum duorum, æqualibus temporibus, in ſpatiis non reſiſtentibus, ab eodem corpore ſucceſſivè deſcriptorum chordæ, AB, BC, compleantur in parallelogrammum ABCV, & hujus diagonalis BV, in eâ poſitione quam ultimò habet, ubi arcus illi

(a) AGATUR enim à puncto C recta CV cum Bc parallela, quæ cum rectâ SB in V concurrat, & jungatur AV. Cùm rectæ Cc, BV inter ſe ſint parallelæ, necnon Bc, CV; figura CVBc parallelogramma erit. Erunt igitur Bc, CV inter ſe æquales. (El. I. 34.) Sed BA, Bc inter ſe æquales. Id enim oſtenſum. Quare CV, BA inter ſe æquales erunt. Sunt autem inter ſe parallelæ; quare CB, AV inter ſe æquales & parallelæ erunt. (El. I. 33.) Figura igitur CBAV eſt parallelogramma, ſub chordis AB, BC; & hujus diagonios erit recta BV, quæ vergit ad centrum virium.

(b) JUNCTÆ



illi in infinitum diminuuntur, producatur utrinque; tranſibit eadem per centrum virium (a).

Corol. 3. Si arcuum æqualibus temporibus, in ſpatiis non reſiſtentibus, deſcriptorum chordæ AB, BC ac DE, EF compleantur in parallelogramma ABCV, DEFZ; vires in B & E ſunt ad invicem in ultimâ ratione diagonalium BV, EZ, ubi arcus iſti in infinitum diminuuntur. Nam corporis motus BC & EF componuntur (per Legum corol. 1.) ex motibus Bc, BV, & Ef, FZ: atqui BV & EZ, ipſis Cc & Ff æquales, in demonſtratione propoſitionis hujus generabantur ab impulſibus vis centripetæ in B & E; ideoque ſunt his impulſibus proportionales.

Corol. 4. Vires quibus corpora quælibet, in ſpatiis non reſiſtentibus, à motibus rectilineis retrahuntur, ac detorquentur in orbes curvos, ſunt inter ſe ut arcuum æqualibus temporibus deſcriptorum ſagittæ illæ quæ convergunt ad centrum virium, & chordas biſecant, ubi arcus illi in infinitum diminuuntur. Nam hæ ſagittæ ſunt ſemiſſes diagonalium, de quibus egimus in corollario tertio (b).

Corol. 5. Ideoque vires eædem ſunt ad vim gravitatis, ut hæ ſagittæ ad ſagittas, horizonti perpendiculares, arcuum parabolicorum, quos projectilia eodem tempore deſcribunt.

(b) JUNCTÆ CA, DF, rectis BV, EZ in O, p, occurrant. Arcus per puncta tria A, B, C, atque alius per alia tria, D, E, F æqualibus temporibus conficiuntur. Atque horum chordæ ſunt rectæ AC, DF quas ſagittæ BO, Ep medias dividunt; ſunt autem ſagittæ illæ rectarum BV, EZ, ſemiſſes. Nimirum cùm rectæ CA, BV; FD, EZ; parallelogrammorum CBAV, FEDZ ſint diagoniæ, atque omnis parallelogrammi diagoniæ medias ſe mutuò dividant.

Corol.

Corol. 6. Eadem omnia obtinent per Legum corol. v. ubi plana, in quibus corpora moventur, unà cum centris virium quæ in ipsis sita sunt, non quiescunt, sed moventur uniformiter in directum.

PROP. II. THEOR. II.

Corpus omne, quod movetur in lineâ aliquâ curvâ in plano descriptâ, & radio ducto ad punctum, vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, describit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur à vi centripetâ tendente ad idem punctum.

Cas. 1. Nam corpus omne, quod movetur in lineâ curvâ, detorquetur de cursu rectilineo per vim aliquam in ipsum agentem (per Leg. 1.) Et vis illa, quâ corpus de cursu rectilineo detorquetur, & cogitur triangula quàm minima SAB, SBC, SCD, &c. *(fig. p. 43.)* circa punctum immobile S, temporibus æqualibus, æqualia describere, agit in loco B secundum lineam parallelam ipsi *c*C (per Prop. XXXIX. lib. 1. Elem. & Leg. II.) hoc est, secundum lineam BS (c); & in loco C secundum lineam ipsi *d*D parallelam, hoc est, secundum lineam SC, &c. Agit ergo semper secundum lineas tendentes ad punctum illud immobile S. Q. E. D.

Cas. 2. Et, per legum corollarium quintum, perinde est, sive quiescat superficies, in quâ corpus describit figuram curvilineam, sive moveatur eadem unà cum corpore, figurâ descriptâ, & puncto suo S uniformiter in directum.

Corol. 1. In spatiis vel mediis non resistentibus, si areæ non sunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concursum radiorum; sed inde declinant in consequentia, seu versus plagam in quam fit motus, si modò arearum descriptio acceleratur: sin retardatur, declinant in antecedentia.

Corol. 2. In mediis etiam resistentibus, si arearum descriptio acceleratur,

(c) Nempe productâ AB in *c*, ut sit B*c* rectæ AB æqualis, junctisque C*c*, S*c*; corpus, si in illud nulla egisset vis externa, quo tempore in locum C pervenerit, eo tempore locum *c* rectæ A*c* attigisset. Vis autem illa quæ ictu suo, in loco B impresso, id effecerit, ut corpus, quod vis insita movendi per rectam AB, certo quodam temporis puncto, ad locum *c* appulisset, eo ipso temporis puncto sit in C; hæc inquam vis corpus in B impulerit secundum rectam cum rectâ C*c* parallelam (per Leg. II. cor. 2.) Sed cùm triangula SBA, SBC, inter se æqualia sint (id enim positum erat) et

acceleratur, virium directiones declinant à concursu radiorum versus plagam, in quam fit motus.

Scholium.

Urgeri potest corpus à vi centripetâ compositâ ex pluribus viribus. In hoc casu sensus propositionis est, quòd vis illa, quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum S. Porro si vis aliqua agat perpetuò secundum lineam superficiei descriptæ perpendicularem; hæc faciet, ut corpus deflectatur à plano sui motûs: sed quantitatem superficiei descriptæ nec augebit nec minuet, & propterea in compositione virium negligenda est.

PROP. III. THEOR. III.

Corpus omne, quod radio ad centrum corporis alterius, utcunque moti, ducto describit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi compositâ ex vi centripetâ tendente ad corpus illud alterum, & ex vi omni acceleratrice quâ corpus illud alterum urgetur.

Sit corpus primum L, & corpus alterum T: & (per Legum corol. VI.) si vi novâ, quæ æqualis & contraria sit illi quâ corpus alterum T urgetur, urgeatur corpus utrumque secundum lineas parallelas; perget corpus primum, L, describere circa corpus alterum, T, areas easdem ac priùs: vis autem, quâ corpus alterum T urgebatur, jam destruetur per vim sibi æqualem & contrariam; & propterea (per Leg. I.) corpus illud alterum, T, sibimet ipsi jam relictum, vel quiescet, vel movebitur uniformiter in directum: & corpus primum L, urgente differentiâ virium, id est, urgente vi reliquâ, perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum T describere. Tendit igitur (per Theor. II.) differentia virium ad corpus illud alterum T ut centrum. Q.E.D.

Corol. 1. Hinc si corpus unum, L, radio ad alterum T ducto, describit areas temporibus proportionales; atque de vi totâ (sive simplici, sive ex viribus pluribus juxta legum corollarium secun-

et triangula SBA, SB*c* inter se æqualia (id enim efficitur per El. I. 38.) erunt triangula SBC, SB*c*, quibus basis SB communis, inter se æqualia. Rectæ igitur C*c*, BS inter se parallelæ. (El. I. 39.) Recta igitur BS a puncto B educta est cum rectâ C*c* parallela. Vis igitur centripeta in loco B secundum rectam BS corpus impulit. Simili argumento efficietur vim centripetam in loco C secundum rectam CS, secundum DS in loco D, secundum ES in E, & in omni Curvæ puncto secundum rectam à puncto illo versus centrum virium eductam corpus impulisse. Q. E. D.

dum

dum compoſitâ), quâ corpus prius L urgetur, ſubducatur (per idem legum corollarium) vis tota acceleratrix, quâ corpus alterum urgetur: vis omnis reliqua, quâ corpus prius urgetur, tendet ad corpus alterum T ut centrum.

Corol. 2. Et, ſi areæ illæ ſunt temporibus quamproximè proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum T quamproximè.

Corol. 3. Et vice verſâ, ſi vis reliqua tendit quamproximè ad corpus alterum T, erunt areæ illæ temporibus quamproximè proportionales.

Corol. 4. Si corpus L, radio ad alterum corpus T ducto, deſcribit areas, quæ, cum temporibus collatæ, ſunt valdè inæquales; & corpus illud alterum, T, vel quieſcit, vel movetur uniformiter in directum: actio vis centripetæ, ad corpus illud alterum T tendentis, vel nulla eſt, vel miſcetur, & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: viſque tota ex omnibus, ſi plures ſunt vires, compoſita ad aliud (ſive immobile ſive mobile) centrum dirigitur. Idem obtinet, ubi corpus alterum motu quocunque movetur; ſi modò vis centripeta ſumatur, quæ reſtat poſt ſubductionem vis totius in corpus illud alterum T agentis.

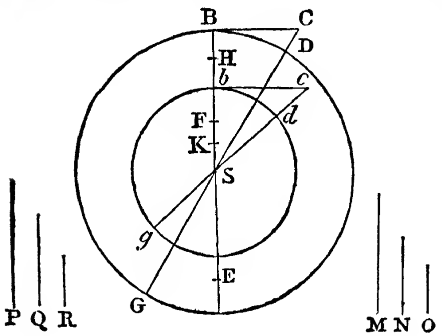
Scholium.

Quoniam æquabilis arearum deſcriptio index eſt centri, quod vis

(d) Hoc eſt, Vires centripetæ inter ſe proportionem gerunt, quæ componitur è ratione duplicatâ arcuum, qui corporum motu ſimul ſunt confecti, & ratione radiorum contrariâ.

(e) Demonstratio Newtoni explicatior facta.

In circulorum BDG, *bdg*, quorum centrum S, peripheriis corpora duo, B, *b*, motu unumquodque æquabili intelligantur circumagi. Propter motum corporis B æquabilem, arcus circuli BD, motu corporis B confecti, temporum, quibus fuerint confecti, proportiones inter ſe ſervabunt. Sectores autem cujuſlibet circuli ſunt inter ſe, ut arcus quibus inſiſtunt. Sectores igitur circuli BD, motu corporis B deſcripti, temporum, quibus ſunt deſcripti, inter ſe proportiones ſervant. Vis igitur centripeta quâ corpus B motu recto detorquetur, & in circumflexu circuli BD continetur, in circuli illius centrum perpetim agit (per Th. II.) Simili argumento efficietur vim aliam centripetam, quâ corpus *b* motu recto detorquetur



vis illa reſpicit, quâ corpus maximè afficitur, quâque retrahitur à motu rectilineo, & in orbitâ ſuâ retinetur; quidni uſurpemus in ſequentibus æquabilem arearum deſcriptionem ut indicem centri, circum quod motus omnis circularis in ſpatiis liberis peragitur?

PROP. IV. THEOR. IV.

Corporum, quæ diverſos circulos æquabili motu deſcribunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere; & eſſe inter ſe, ut ſunt arcuum ſimul deſcriptorum quadrata applicata ad circulorum radios (d).

Tendunt hæ vires ad centra circulorum per Prop. II. & Corol. 2. Prop. I. & ſunt inter ſe ut arcuum æqualibus temporibus quàm minimis deſcriptorum ſinus verſi per Corol. 4. Prop. I. hoc eſt, ut quadrata arcuum eorundem ad diametros circulorum applicata per Lem. VII. & propterea, cùm hi arcus ſint ut arcus temporibus quibuſvis æqualibus deſcripti, & diametri ſint ut eorum radii; vires erunt ut arcuum quorumvis ſimul deſcriptorum quadrata applicata ad radios circulorum. Q. E. D (e).

Corol. 1. Cùm arcus illi ſint ut velocitates corporum, vires centripetæ erunt in ratione compoſitâ ex duplicatâ ratione velocitatum directè, & ratione ſimplici radiorum inverſè.

Corol. 2. Et, cùm tempora periodica ſint in ratione compoſitâ ex ratione radiorum directè, & ratione velocitatum inverſè; vires

torquetur & in circuli *bd* circumflexu continetur, in centrum illius circuli perpetim agere. Corporum igitur, quæ circulos diverſos, BD, *bd*, motibus æquabilibus deſcribunt, vires centripetæ ad centra circulorum tendunt. Quæ prima pars eſt propoſitionis Newtonianæ.

Dico præterea virium illarum inter ipſas proportionem compoſitam eſſe è ratione duplicatâ arcuum, qui ſimul deſcribuntur, & ratione radiorum contrariâ. Sint BD, *bd* duo quilibet arcus ſimul confecti. Ducantur tangentes BC, *bc*, quibus junctæ SD, S*d* et productæ in punctis C, *c* occurrant. Propter motus corporum æquabiles, arcus BD, *bd*, datam aliquam inter ſe proportionem ſervabunt; quæ ea ſit quam recta M, pro arbitrio ſumenda, habeat ad rectam aliam N. Eandem verò habeat N ad tertiam O. Dico vim centripetam, quâ corpus B perpetim urgetur, ad vim centripetam aliam, quâ perpetim urgetur corpus *b*, proportionem habere quæ componitur è proportione rectæ M ad O, & ratione rectarum SB, S*b* contrariâ; ſive eam, quam habet rectangulum M × S*b* ad rectangulum O × SB. Rectæ enim SD, S*d* circulis iterum in punctis G, *g* occurrant. Si arcus BD, *bd* infinitè minuantur; vires centripetæ, quibus urgentur corpora B, *b*, in locis B, *b*, inter ſe rationem gerent, quæ rectarum evaneſcentium CD, *cd* ultima erit. (Prop. I. Cor. 4.) Oſtendendum igitur harum evaneſcentium ultimam inter ipſas rationem eam eſſe, quam rectangulum M × S*b* habet ad rectangulum O × SB. Id autem oſtendimus hoc modo. Rectangula GC × CD, *gc* × *cd*, quadratis ex BC, *bc* ſingulatim ſunt æqualia. (El. III. 36.) Et evaneſcentibus arcubus BD, *bd*, tangentes BC, *bc* arcubus illis BD, *bd* fiunt ultimò æquales (per Lem. VII.) Tangentes igitur BC, *bc* evaneſcentes,

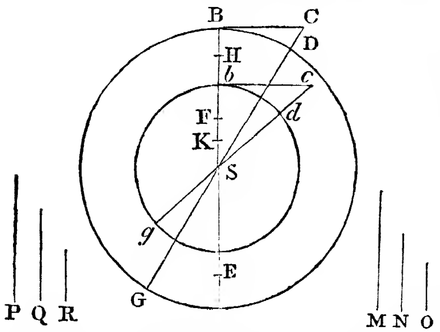
vires centripetæ ſunt in ratione compoſitâ ex ratione radiorum directè, & ratione duplicatâ temporum periodicorum inverſè (f).

Corol. 3. Unde ſi tempora periodica æquentur, & propterea velocitates ſint ut radii; erunt etiam vires centripetæ ut radii: & contrà.

Corol. 4. Si & tempora periodica, & velocitates ſint in ratione ſubduplicatâ radiorum; æquales erunt vires centripetæ inter ſe: & contrà (g).

Corol.

neſcentes, arcuum evaneſcentium ultimò inter ſe rationem habent; hoc eſt, datam rectarum M, N inter ipſas rationem. Quare quadrata ex BC, bc evaneſcentibus, quadratorum ex M, N, ſive rectarum M, O, ultimò inter ſe proportionem induent. Quare rectangulis quoque GC × CD, gc × cd evaneſcentibus proportio ultima ea erit, quæ eſt rectæ M ad rectam O. Rectangula autem GC × CD, gc × cd evaneſcentia evaneſcentibus GD × DC, gd × dc ultimò æqualia fiunt; ac proinde evaneſcentium SD × DC, sd × dc, ultimò illa dupla fient. Rectangula igitur GC × CD, gc × dc evaneſcentia cum evaneſcentibus SD × DC, sd × dc proportione ultimò convenient. Rectangula igitur SD × DC, sd × dc evaneſcentia datam ultimò rectarum M, O inter ſe proportionem gerent, ſive rectangulorum M × sd, O × sd datam.



Sed rectangulum sd × dc eſt ad rectangulum SD × dc ut rectangulum O × sd ad rectangulum O × SD. Neque huic rationi officiet rectæ cd magnitudo, magna illa parvave fuerit. Ex æquo igitur rectangula evaneſcentia SD × DC, SD × dc, hoc eſt rectæ CD, cd evaneſcentes, rectangulorum M × sd, O × SD ſive M × sb, O × SB ultimò inter ſe proportionem gerent. Atque eadem viribus centripetis inter ipſas ratio intercedet. Q. E. D.

Cor. H. Si capiatur SE ejus longitudinis, ut SB habeat ad illam SE, proportionem illam, quam M ad O; vis centripeta, quâ urgetur corpus B, erit ad vim centripetam, quâ urgetur corpus b, ut sb ad SE. Nam ratio rectæ sb ad illam SE componetur è rationibus ejuſdem sb ad SB, & SB ad SE; hoc eſt, è rationibus sb ad SB, & M ad O. Et ex eiſdem compoſita eſt ratio rectanguli M × sb ad rectangulum O × SB. Quare sb erit ad SE ut M × sb ad O × SB, hoc eſt (ex modò oſtenſis) ut vis centripeta corporis B ad vim centripetam corporis b. Q. E. D.

(f) Primum quod aſſumpſit Newtonus, "Tempora periodica habere inter ſe rationem è ratione radiorum cum velocitatum contrariâ compoſitam," id nos oſtendimus hoc modo. Habeat recta P, pro arbitrio ſumenda, ad rectam aliam Q proportionem eam quam tempus converſionis corporis B ad tempus converſionis corporis b. Dico rectam P ad rectam Q rationem habere eam, quæ componitur è ratione SB ad sb, & ratione velocitatum contrariâ, ſive contrariâ rectarum M, N; nimirum cùm rectæ illæ M, N ſint ut velocitates. Vel quod idem eſt, dico P eſſe ad Q ut rectangulum SB × N ad rectangulum sb × M. Sunt enim circuitus circulorum ſpatia à corporibus B, b, converſionum temporibus, quæ tempora ſunt inter ſe ut P, Q, ſingulatim confecta. Atqui circuitus circulorum proportione conveniunt cum radiis. Radii igitur SB, sb erunt inter ſe ut ſpatia, temporibus, quæ ſunt ut P, Q, motibus æquabilibus confecta. Et rectæ M, N ſunt inter ſe ut velocitates quibus ſpatia illa conficiuntur. Quare rectangulum SB × N erit ad rectangulum sb × M ſicut P ad Q (per Theorema V^m. Galilæi *De Motu Æquabili*). Q. E. D.

Hoc autem oſtenſo, conſequetur illud quod Newtonus affirmavit, vires centripetas rationem inter ſe habere ex radiorum ratione cum duplicatâ temporum contrariè ſumptâ compoſitam. Hoc eſt ſi capiatur R, quæ proportione cum duabus P, Q tertia utique conveniat, erit vis centripeta corporis B ad vim centripetam corporis b ut rectangulum SB × R ad rectangulum sb × P.

Nam

Corol. 5. Si tempora periodica ſint ut radii, & propterea velocitates æquales; vires centripetæ erunt reciprocè ut radii (h): & contrà.

Corol. 6. Si tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicatâ radiorum, & propterea velocitates reciprocè in radiorum ratione ſubduplicatâ; vires centripetæ erunt reciprocè ut quadrata radiorum: & contrà (i).

Corol.

Nam cùm P ad Q rationem habeat è rationibus rectæ N ad M rectæque SB ad sb compoſitam, quadratum ex illâ P ad quadratum ex Q rationem habebit, quæ componitur è rationibus quadrati ex N ad quadratum ex M & quadrati ex SB ad quadratum ex sb. Hoc eſt, ſi capiatur SF cum duabus SB, sb proportione tertia, cùm ſit $P : R = P^2 : Q^2$; & $SB : SF = SB^2 : sb^2$; & præterea O ad M ut N^2 ad M^2; habebit P ad R rationem è rationibus O ad M et SB ad SF compoſitam. Eſt autem O ad M ut SE ad SB (conſtruct. Cor. H.) Habebit igitur P ad R rationem è rationibus SE ad SB, & SB ad SF compoſitam. Ex eiſdem autem compoſita eſt ratio ipſius SE ad SF. Erit igitur P ad R ut SE ad SF. Ratio igitur rectæ SE ad sb, quæ compoſita eſt è rationibus rectæ SE ad SF, rectæque SF ad sb; ea componetur è rationibus rectæ P ad R rectæque SF ad sb. Hoc eſt, è rationibus rectæ P ad R rectæque sb ad SB. (Tres enim SB, sb, SF proportione conveniunt. Ita enim factum eſt.) Erit igitur SE : sb = P × sb : R × SB. Invertendo sb : SE = SB × R : sb × P. Eſt autem sb ad SE ut vis centripeta corporis B ad vim centripetam corporis b. (Cor. H.) Erit igitur vis eentripeta corporis B ad vim centripetam corporis b, ut rectangulum SB × R ad rectangulum sb × P. Q. E. D.

(g) Capiatur SH duarum SB, sb proportione media. Et ſit P ad Q ut SB ad SH. Dicit Newtonus vires centripetas corporum B, b æquales eſſe. Erit enim $P^2 : Q^2 = SB^2 : SH^2$. Ergo P : R = SB : sb. Rectangula igitur, P × sb, R × SB inter ſe æqualia. Vires igitur centripetæ, quæ ſunt ut rectangula illa (per Cor. 2.) inter ſe æquales. E contrario, ſi æquales ſint vires centripetæ, erit P ad Q, necnon M ad N, ut SB ad SH. Æquatis enim viribus centripetis, rectangula SB × R, sb × P inter ſe æqualia erunt (Cor. 2.) Ergo P : R = SB : sb; $P^2 : Q^2 = SB^2 : SH^2$; & P : Q = SB : SH. Jam verò, cùm P ſit ad Q ut SB ad SH, erit (per Cor. 2.) SB × N : sb × M = SB : SH = SB × N : SH × N. Quare sb × M = SH × N. Ergo M : N = SH : sb = SB : SH. Q. E. D.

(h) Per Cor. 1.

(i) Capiatur SK ad quam SF proportionem habeat eam quam sb ad SF; ut quatuor illarum SB, sb, SF, SK continua ſit analogia. Ratio igitur rectæ SB ad SK triplicata erit ejus, quam SB habet ad sb. Et ratio rectæ P ad R duplicata eſt ejus, quam recta P habet ad Q; ſive ejus, quam tempus converſionis corporis B habet ad tempus converſionis corporis b. Dicit Newtonus, ſi ratio duplicata temporum eadem ſit, quæ ratio triplicata radiorum; hoc eſt, ſi P ſit ad R ut SB ad SK, fore ut ratio velocitatum eadem ſit, quæ radiorum ſubduplicata contrariè ſumpta; ſive ut M ſit ad N ut SH ad SB: ac præterea fore ut virium contripetarum ratio eadem ſit quæ radiorum duplicata contrariè ſumpta; ſive ut sb ſit ad SE ut sb^2 ad SB^2. E contrario, ſi eadem ponatur virium centripetarum ratio, quæ radiorum duplicata eſt contrariè ſumpta; hoc eſt, ſi ponatur eſſe sb ad SE ut sb^2 ad SB^2; dicit Newtonus, fore ut eadem ſit temporum duplicata, quæ radiorum triplicata ratio; ſive fore ut P ſit ad R ut SB ad SK.

Primum verò quod dixit Newtonus, poſito P : R = SB : SK, fore ut ſit M : N = SH : SB, id nos oſtendimus hoc modo. Ratio rectæ P ad R compoſita eſt è rationibus rectæ SE ad SF rectæque O ad M; id enim in demonſtrando corollario ſecundo nos oſtendimus. Erit igitur P ad R ut rectangulum SB × O ad rectangulum SF × M. Sed P eſt ad R, ut SB ad SK (id enim poſitum). Rectangulum igitur SB × O erit ad rectangulum SF × M ut SB ad SK, ſive ut rectangulum SB × O ad rectangulum SK × O. Rectangula igitur SF × M, SK × O erunt inter ſe æqualia. Quare M : O = SK : SF = sb : SB. Sed $M : O = M^2 : N^2$. Quare $M^2 : N^2 = sb : SB = sb^2 : SH^2 = SH^2 : SB^2$. Ac propterea M : N = SH : SB. Q. E. D.

Jam quod alterum dixit Newtonus, poſito P : R = SB : SK, fore ut ſit $sb : SE = sb^2 : SB^2$, illud quoque nos oſtendimus hoc modo. Cùm ſit P : R = SB : SK erit rectangulum P × sb ad rectangulum R × sb ut rectangulum R × SB ad rectangulum R × SK. Permutando P × sb : R × SB = R × sb :

R × SK

Corol. 7. Et univerſaliter, ſi tempus periodicum ſit ut radii R poteſtas quælibet R^n, & propterea velocitas reciprocè ut radii poteſtas R^{n-1}; erit vis centripeta reciprocè ut radii poteſtas R^{2n-1}: & contrà (k).

Corol. 8. Eadem omnia de temporibus, velocitatibus, & viribus, quibus corpora ſimiles figurarum quarumcunque ſimilium, centraque in figuris illis ſimiliter poſita habentium, partes deſcribunt, conſequuntur ex demonſtratione præcedentium ad hoſce caſus applicatâ. Applicatur autem ſubſtituendo æquabilem arearum deſcriptionem pro æquabili motu, & diſtantias corporum à centris pro radiis uſurpando.

Corol. 9. Ex eâdem demonſtratione conſequitur etiam; quòd arcus,

$R \times SK = Sb : SK = SB : SF = SB^2 : Sb^2$. Invertendo $SB \times R : Sb \times P = Sb^2 : SB^2$. Sed $SB \times R : Sb \times P = Sb : SE$ (Cor. 2.) Ergo $Sb : SE = Sb^2 : SB^2$. Q. E. D.

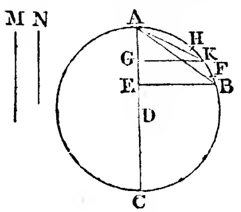
E contrario, ſi ponatur $Sb : SE = Sb^2 : SB^2$, oſtendimus fore quod Newtonus dixit, ut ſit $P : R = SB : SK$.

Cùm enim ſit $Sb : SE = SB \times R : Sb \times P$ (Cor. 2.) ſi ponatur $Sb : SF = Sb^2 : SB^2$ erit $SB \times R : Sb \times P = Sb^2 : SB^2 = SF : SB = SK : Sb = R \times SK : R \times Sb$. Permutatis igitur rectangulis, $SB \times R : SK \times R = Sb \times P : Sb \times R$. Quare $SB : SK = P : R$. Q. E. D.

(k) CUM ſit $P : Q = SB \times N : Sb \times M$ (Cor. 2.) ſi igitur ſit $P : Q = SB^n : Sb^n$, erit $SB^n : Sb^n = SB \times N : Sb \times M$. Quare $SB \times N \times Sb^n = Sb \times M \times SB^n$. Et utramque quantitatem cum rectangulo $Sb \times SB$ dividendo, fiet $N \times Sb^{n-1} = M \times SB^{n-1}$. Ergo $M : N = Sb^{n-1} : SB^{n-1}$. Ac præterea cùm ſit $M : O = M^2 : N^2$, erit $M : O = Sb^{2n-2} : SB^{2n-2}$. Rectangula igitur $M \times Sb$, $O \times SB$ ſunt inter ſe ut quantitates Sb^{2n-1}, SB^{2n-1}. Atqui vires centripetæ corporum B, b, ſunt ut hæc rectangula. (Cor. 1.) Erunt igitur vires illæ ut quantitates SB^{2n-1}, Sb^{2n-1} contrariè ſumptæ. Q. E. D.

E contrario, ſi vires centripetæ corporum B, b, ſint inter ſe ut quantitates SB^{2n-1}, Sb^{2n-1} contrariè ſumptæ, erit $P : Q = SB^n : Sb^n$. Nam vires centripetæ corporum B, b ſunt inter ſe ut rectangula $SB \times R$, $Sb \times P$ (Cor. 2.) Quare ſi vires illæ ſint ut quantitates SB^{2n-1}, Sb^{2n-1} contrariè ſumptæ, erit $SB \times R : Sb \times P = Sb^{2n-1} : SB^{2n-1}$. Ac propterea $SB^{2n} \times R = Sb^{2n} \times P$. Quare $P : R = SB^{2n} : Sb^{2n}$. Sed $P : R = P^2 : Q^2$. Quare $P^2 : Q^2 = SB^{2n} : Sb^{2n}$. Et $P : Q = SB^n : Sb^n$. Q. E. D.

(l) PER circuitum circuli ABC, cujus centrum D, ferri intelligatur corpus quoddam motu æquabili, urgente datâ vi centripetâ quæ ad circuli centrum D tendat. Ac interea, eâdem vi centripetâ corpus quoddam aliud incitatum recto caſu feratur ſecundum rectam AD infinitè productam. Sint E, F, loca, quæ corpora illa duo, è loco A ſimul egreſſa, eodem temporis puncto appulerint. Dicit Newtonus, arcum circuli AF, diametri illius AC rectæque AE proportione medium eſſe. Quod idem eſt, ac ſi rectâ EB à puncto E ad perpendiculum cum diametro AC eductâ, quæ cum circuli circuitu in B concurreret, junctâque AB, dixiſſet arcum AF rectæ AB æqualem eſſe. Id nos oſtendimus hoc modo.



Sint G, H alia loca, quæ duo corpora mobilia ſimul appulerint. Eductâque ad perpendiculum rectâ GK, jungatur AK. Sint rectæ M, N, arcubus AF, AH ſingulatim æquales. Tum cùm rectæ AE, AG ſint ſpatia, caſu corporis, è loco A, æquabiliter accelerato confectâ (data enim vis centripeta æquabilem motûs accelerationem corpori cadenti neceſſariò afferet) idcirco rectæ illæ AE, AG rationem inter ſe habebunt temporum, quibus ſunt confectæ, duplicatam

arcus, quem corpus in circulo, datâ vi centripetâ uniformiter revolvendo, tempore quovis deſcribit, medius eſt proportionalis inter diametrum circuli, & deſcenſum corporis, eâdem datâ vi, eodemque tempore, cadendo confectum (l).

Scholium.

Caſus corollarii ſexti obtinet in corporibus cœleſtibus (m), (ut orſum collegerunt etiam noſtrates *Wrennus*, *Hookius* (n) & *Hallæus*; & propterea quæ ſpectant ad vim centripetam decreſcentem in duplicatâ ratione diſtantiarum à centris, decrevi fuſiùs in ſequentibus exponere.

Porro præcedentis propoſitionis & corollariorum ejus beneficio,

duplicatam (per Theor. II. Galilæi *De Motu Naturaliter Accelerato)* ſive temporum, quibus arcus AF, AH æquabili motu conficiuntur, duplicatam; hoc eſt, arcuum ipſorum AF, AH duplicatam; ſive rectarum M, N duplicatam, quæ rectæ arcubus AF, AH poſitæ ſunt æquales. Erunt igitur rectæ AE, AG inter ſe ſicut quadrata è rectis M, N. Sunt autem rectæ AE, AG, inter ſe, ſicut quadrata è rectis AB, AK (propter circulum). Quadrata igitur è rectis M, N cum quadratis ex AB, AK proportione convenient. Hoc eſt $M^2 : N^2 = AB^2 : AK^2$. Quare $M : N = AB : AK$. Permutando $M : AB = N : AK$. Neque huic rationi officient rectarum N, AK longitudines, magnæ parvæve fuerint. Regrediantur igitur puncta G, H verſus A: eá tamen lege, ut loca, quæ duo corpora mobilia ſimul attigerint, punctis illis ſemper denotentur. Et manente rectâ M arcui AB æquali, recta N eâ lege fluat, ut arcui AH fluenti ſemper illa ſit æqualis & ſimul cum illo evaneſcat. Jam cùm recta N ſemper ſit ad rectam AK ut recta M ad rectam AB, id enim modò oſtenſum eſt, idcirco ratio ultima evaneſcentis rectæ N ad evaneſcentem AK ea erit quam recta M habet ad rectam AB. Evaneſcente autem arcu AK, temporum proportio, quibus arcus AK, motu æquabili, rectaque AG, caſu recto, urgente datâ vi centripetâ, conficiuntur, æqualitatem propiùs accedit quàm pro datâ aliquâ differentiâ. Sed in omni poſitione punctorum G, H, arcus quidem AH motu æquabili eodem tempore conficitur, quo recta AG caſu recto (id enim poſuimus). Arcus igitur evaneſcentes AH, AK temporibus, quæ ultimò æqualia fiunt, eodem motu æquabili conficiuntur; ac proinde fiunt arcus illi ultimò inter ſe æquales. Sed arcui AH ſemper eſt æqualis recta N (id enim poſitum). Et arcui evaneſcenti AK evaneſcens chorda AK fit ultimò æqualis (per Lemma VII.) Quare rectæ N, AK evaneſcentes fiunt ultimò æquales. Cùm igitur recta M ad rectam AB rationem habeat eam quæ ultima eſt rectæ evaneſcentis N ad evaneſcentem AK (id enim oſtenſum eſt), idcirco illæ M, AB ſunt inter ſe æquales. Sed recta M arcui AF poſita eſt æqualis. Arcus igitur AF æqualis erit rectæ AB. Q. E. D.

(n) Vide Kepleri Harmonicen Mundi, Lib. v. C. III. § 8. Et Epitomen Aſtronomiæ Copernicanæ, p. 501.

(r) NARRATIO QUÆDAM EX NOTIS MSS DAVIDIS GREGORII.

" —Hookius] immo ſi Hookio fidendum, ille omnis hujus Philoſophiæ fundamenta jecit, & cum
" Newtono communicavit. Verum res ita ſe habet, ut Candidiſſ. Newtonus mihi narravit.
" Cùm forte inter alia Newtonus Hookio ſcriberet, tantum abeſſe ut Grave è ſummitate Turris
" decidens ex motu diurno terræ, ad occidentem à pede turris erectæ caderet, ut è contra ad
" orientem à pede turris terram ſubjectam attingeret (ſcilicet ob majorem impetum lapidi ad
" ſummitatem communicatum) et caſu Curvam manuduceret à lapide inter cadendum deſcrip-
" tam; hancque Curvam infra terræ ſuperficiem, ad modum ſpiralis, in centro terminatam de-
" ſcriberet; reſcripſit Hookius, verum quidem eſſe quod [Grave] ad orientem terram attingeret,
" ſed quòd non centrum peteret, ſed illud præterlapſum & Ellipticam curvam deſcribens, rurſus
" in altum reverteretur ad ſummitatem Turris. Atque hoc illud eſt, quod ſe Newtono pri-
" mum oſtendiſſe jactat, & Newtoni Philoſophiam huic ſoli eſſe ſuperſtructam."

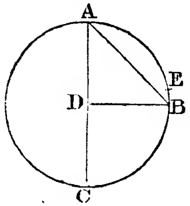
colligitur

De Motu Corporum

colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam; qualis est ea gravitatis. Nam si corpus in circulo terræ concentrico vi gravitatis suæ revolvatur, hæc gravitas est ipsius vis centripeta. Datur autem, ex descensu gravium, & tempus revolutionis unius, & arcus dato quovis tempore descriptus, per hujus Corol. 9 (o). Et hujusmodi propositionibus *Hugenius*, in eximio suo tractatu *de Horologio Oscillatorio*, vim gravitatis cum revolventium viribus centrifugis contulit.

Demonstrari etiam possunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis describi intelligatur polygonum laterum quotcunque. Et si corpus in polygoni lateribus, datâ cum velocitate movendo, ad ejus angulos singulos à circulo reflectatur; vis, quâ singulis reflexionibus impingit in circulum, erit ut ejus velocitas: ideoque summa virium, in dato tempore, erit ut velocitas illa, & numerus reflexionum conjunctim: hoc est (si polygonum detur specie) ut longitudo dato illo tempore descripta, & aucta vel diminuta in ratione longitudinis ejusdem ad circuli prædicti radium; id est, ut quadratum longitudinis illius applicatum ad radium: ideoque, si polygonum, lateribus infinitè diminutis, coincidat cum circulo, ut quadratum arcûs dato tempore descripti applicatum ad radium. Hæc est vis centrifuga, quâ corpus urget circulum; & huic æqualis est vis contraria, quâ circulus continuò repellit corpus centrum versus.

PROP.



(o) Per circuitum circuli ABC magnitudine dati, cujus centrum D, ferri intelligatur corpus quoddam motu æquabili; urgente scilicet vi quâdam centripetâ, quæ centrum circuli D respiciat, & vi datæ Gravitatis apud nos æqualis sit. Ducatur diameter circuli ADC; & à centro D, ad perpendiculum cum diametro AC, educatur recta DB, quæ cum circuli circumflexu in B concurrat. Junctæ AB capiatur arcus AE æqualis. Conficietur arcus AE, motu corporis in circulo æquabili, eodem temporis spatio, quo, casu corporis recto, conficeretur spatium radio AD æquale (per Cor. 9.) Sed propter circuli radium magnitudine datum, datum erit tempus, quo corpus grave spatium illi radio æquale casu recto conficeret. Tempus igitur, quo corpus in circulo confecerit arcum AE, datum erit. Hujus autem temporis ad tempus conversionis integræ ratio data est; ea scilicet, quam habet arcus magnitudine AE, sive recta data AE, ad integrum circuli circuitum. Tempus igitur conversionis integræ datum erit. Q. E. I.

Cor. H. Tempus conversionis integræ est ad tempus casûs recti per radium ut totius circuli circuitus ad chordam quadrantis.

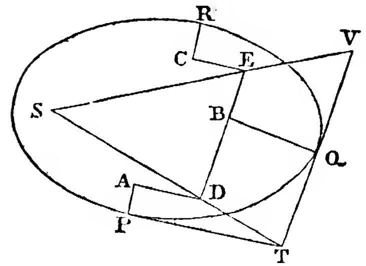
(p) Nam rectæ à puncto D in tangentes AT, QT ad perpendiculum deductæ rectis AP, BQ æquales

Liber Primus.

PROP. V. PROB. I.

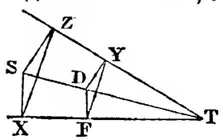
Datâ quibuscunque in locis velocitate, quâ corpus figuram datam, viribus ad commune aliquod centrum tendentibus, describit, centrum illud invenire.

Figuram descriptam tangant rectæ tres PT, TQV, VR in punctis totidem P, Q, R, concurrentes in T & V. Ad tangentes erigantur perpendicula PA, QB, RC, velocitatibus corporis in punctis illis P, Q, R, à quibus eriguntur, reciprocè proportionalia; id est, ita ut sit PA ad QB ut velocitas in Q ad velocitatem in P; & QB ad RC ut velocitas in R ad velocitatem in Q. Per perpendiculorum terminos A, B, C ad angulos rectos ducantur AD, DBE, CE, concurrentes in D & E: et actæ TD, VE concurrent in centro quæsito S.



Nam perpendicula à centro S in tangentes PT, QT demissa (per Corol. 1. Prop. I.) sunt reciprocè ut velocitates corporis in punctis P & Q; ideoque, per constructionem, ut perpendicula AP, BQ directè; id est, ut perpendicula à puncto D in tangentes demissa (p). Unde facilè colligitur quòd puncta S, D, T sunt in unâ rectâ (q). Et simili argumento puncta S, E, V sunt etiam in unâ rectâ; & propterea centrum S in concursu rectarum TD, VE versatur. Q. E. D.

quales erunt. (El. I. 34.)



(q) In rectas enim TP, TV, deducantur ad perpendiculum, à puncto quidem, S rectæ SX, SZ, à puncto autem D rectæ DF, DY; & XZ, FY jungantur. Rectæ SX, SZ cum rectis DF, DY parallelæ erunt. Anguli igitur XSZ, FDY erunt inter se æquales. Quare cùm SX sit ad SZ, ut DF ad DY (id enim ostensum à Newtono) idcirco triangula SXZ, DFY inter se similia erunt, & anguli SXZ, DFY inter se æquales. (El. VI. 6.) Anguli igitur TXZ, TFY, quibus æquales illi SXZ, DFY à rectis absunt, inter se æquales erunt; ac proinde rectæ FY, XZ inter se parallelæ (El. I. 28.) & triangula TFY, TXZ inter se similia erunt. Quare TF erit ad TX ut FY ad XZ. Sed propter similitudinem triangulorum DFY, SXZ; FY est ad XZ ut FD ad XS. Ergo FD erit ad XS ut TF ad TX. (El. V. 11.) Ac proinde puncta T, D, S, ad rectam erunt; quod ex secundâ Libri sexti Elementorum facilè efficitur. Nam si T, D, S ad rectam non sint, juncta TS rectæ DF in puncto *a* occurrat. Et propter rectas F*a*, XS inter se parallelas, erit XS ad F*a* ut TX ad TF. (El. VI. 2.) Sed XS ad FD ut TX ad TF, ex modò ostensis. Recta igitur XS ad inæquales FD, F*a* eandem proportionem habet. Quod est absurdum (El. V. 9.) Sunt igitur ad rectam puncta T, D, S. Et simili argumentatione efficietur puncta V, E, S, ad rectam esse. (Eadem ferè ad locum patres doctissimi Le Sœur & Jacquier.)

PROP.

De Motu Corporum

PROP. VI. THEOR. V.

Si corpus in ſpatio non reſiſtente, circa centrum immobile, in orbe quocunque revolvatur, & arcum quemvis jamjam naſcentem tempore quàm minimo deſcribat, & ſagitta arcûs duci intelligatur, quæ chordam biſecet, & producta tranſeat per centrum virium: erit vis centripeta in medio arcûs, ut ſagitta directè, & tempus bis inverſè.

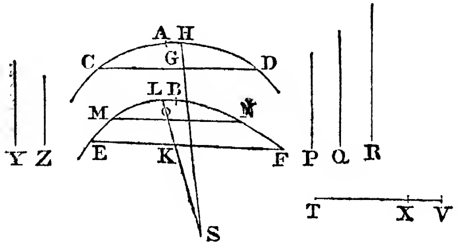
Nam ſagitta, dato tempore, eſt ut vis (per Corol. 4. Prop. I.) & augendo tempus in ratione quâvis, ob auctum arcum in eâdem ratione, ſagitta augetur in ratione illâ duplicatâ (per Corol 2 & 3, Lem. XI.) ideoque eſt ut vis ſemel & tempus bis. Subducatur duplicata ratio temporis utrinque, & fiet vis ut ſagitta directè & tempus bis inverſè. Q. E. D ([r]).

Idem facile demonſtratur etiam per Corol. 4. Lem. X.

Corol. 1. Si corpus P revolvendo circa centrum S deſcribat lineam curvam APQ; tangat verò recta ZPR Curvam illam in puncto

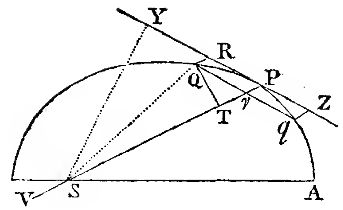
([r]) Demonstratio Newtoniana explicatior facta.

Corpora A, B, urgentibus viribus centripetis quæ centrum S reſpiciant, ferri intelligantur in orbitis CAD, EBF. Sint CAD, EBF orbitarum arcus quilibet; hujus autem EBF medium ſit punctum B; illius CAD, punctum A. Habeat recta P, pro arbitrio ſumenda, ad aliam Q proportionem eam, quam tempus, quo conficitur arcus DAC motu corporis A, ad tempus, quo conficitur arcus FBE motu corporis B. Ducantur CD, EF, arcuum CAD, EBF chordæ; quas puncta G, K medias dividant: junctæque SG, SK Curvis in punctis H, L occurrant. Jam intelligantur arcus CAD, EBF (manentibus punctis mediis, A, B) infinitè minui; eâ tamen lege, ut temporibus, quibus illi conficiuntur, maneat ſemper mutua rectarum P, Q, ratio; dicit Newtonus vim centripetam in loco A ad vim centripetam in loco B proportionem habere, quæ componitur ex eâ quæ ultima eſt ſagittæ evaneſcentis GH ad ſagittam evaneſcentem KL, cum eâ, quæ rectarum P, Q duplicata eſt, contrarie ſumptâ; vel cum eâ, quam R habet ad P, ſi illa R duarum, P, Q, proportione ſit tertia. Hoc eſt, ſi exponatur recta quædam, TV, quæ ad datam P rationem habeat eam, quam ſagitta KL ad ſagittam GH; tum, arcubus CAD, EBF infinitè decreſcentibus, ſi recta TV eâ lege fluat, ut ſemper ſit ad datam P ſicut ſagitta KL ad ſagittam GH (illas utique ſagittarum, GH, KL, rectæque TV magnitudines conferendo quæ ſimul fiunt), & ſi TX ſit ultima rectæ TV longitudo, quam, arcubus CAD, EBF jamjam in nihilum abituris, propiùs illa acceſſerit quàm pro datâ quâvis differentiâ; hæc inquam ſi fiant, dicit Newtonus, vim centripetam in loco A ad vim centripetam in loco B proportionem habere eam, quæ compoſita eſt è rationibus rectæ R ad P, rectæque P ad TX; hoc eſt eam quam recta R habet ad rectam TX. Nos autem oſtendimus quod Newtonus dicit hoc modo



Arcubus

Liber Primus.



to quovis P, & ad tangentem, ab alio quovis curvæ puncto Q, agatur QR diſtantiæ SP parallela, ac demittatur QT perpendicularis ad diſtantiam illam SP: vis centripeta erit reciprocè ut ſolidum $\frac{SP\ quad. \times QT\ quad.}{QR}$; ſi modò ſolidi illius ea ſemper ſumatur quantitas, quæ ultimò fit, ubi coeunt puncta P & Q. Nam QR æqualis eſt ſagittæ dupli arcûs QP, in cujus medio eſt P ([ſ]). Et duplum trianguli SQP ſive SP × QT, tempori, quo arcus iſte duplus deſcribitur, proportionale eſt; ideoque pro temporis exponente ſcribi poteſt.

Corol. 2. Eodem argumento vis centripeta eſt reciprocè ut ſolidum $\frac{SYq \times QPq}{QR}$; ſi modò SY perpendiculum ſit à centro virium in orbis tangentem PR demiſſum. Nam rectangula SY × QP & SP × QT æquantur ([t]).

Arcubus CAD, EBF infinitè imminutis puncta H, L in loca A, B ultimò devenient; & ſi MBN ſit arcus orbitæ EBF, qui, motu corporis B, eodem tempore conficitur, quo arcus CAD motu corporis A, atque arcus MBN eum præterea ſitum obtineat, ut à puncto B, arcûs EBF medio, medius ipſe ſit diviſus; vis centripeta in loco A ad vim centripetam in loco B rationem habebit eam, quæ, arcubus CAD, MBN infinitè imminutis, ſagittarum evaneſcentium HG, LO, quæ chordas eorum medias dividant, & ad S virium centripetarum centrum tendant, ultima inter ipſas erit. Hoc eſt, ſi recta Y, pro arbitrio ſumenda, habeat ad aliam Z, proportionem eam, quam vis centripeta in loco A ad vim centripetam in loco B, crit HG ad LO ultimò ut Y ad Z. (Prop. I. Cor. 4.) Arcubus autem MBN, EBF infinitè diminutis, ſagittarum evaneſcentium LO, LK ratio inter ipſas ultima, duplicata erit ejus, quæ arcuum inter ipſos ultima eſt (Lemma XI. Cor. 2.) Hoc eſt, cùm arcus illi ſint ultimò inter ſe ut ſpatia, velocitate illâ, quæ eſt corporis in loco B, temporibus, quæ ſunt ut P, Q, æquabiliter confecta; idcirco ratio ultima evaneſcentium LO, LK, temporum quibus conficiuntur arcus MBN, EBF, ſive rectarum P, Q, duplicata erit. Hoc eſt, cùm R duarum P, Q proportione ſit tertia, erit LO ad LK ultimò ut P ad R. Et oſtenſum eſt HG eſſe ultimò ad LO ut Y ad Z. Quare ratio ultima evaneſcentis HG ad evaneſcentem LK componetur è rationibus rectæ Y ad Z rectæque P ad R; ſive ea erit, quam rectangulum Y × P habet ad rectangulum Z × R. Evaneſcentis autem HG ad evaneſcentem LK ratio ultima ea eſt, quam recta P habet ad rectam TX (per conſtruct.) Erit igitur P : TX = Y × P : Z × R. Ac propterea P × Z : TX × Z = Y × P : Z × R. Permutando P × Z : P × Y = Z × TX : Z × R. Ac propterea Z : Y = TX : R. Invertendo Y : Z = R : TX. Q. E. D.

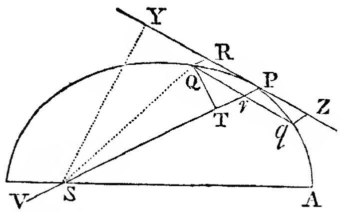
([ſ]) Quod ſic oſtendo. In tangente capiatur PZ æqualis rectæ PR. Agatur zq cum rectâ SP parallela, & Curvæ illa zq in q occurrat. Juncta Qq rectæ SP in v occurrat. Evaneſcentibus arcubus PQ, Pq, erit QR ad zq ultimò ſicut quadratum ex RP ad quadratum ex PZ. (Lemma XI. Cor. 2.) Quadrata autem è rectis æqualibus PR, PZ ſunt inter ſe æqualia. Ergo RQ, zq fient ultimò inter ſe æquales. Quare cùm ſint etiam inter ſe parallelæ, fiet Qq ultimò parallela cum RZ (El. I. 33.) & figura $RQqz$ ultimò parallelogramma erit. Quare & Rv. vz ultimò parallelogrammæ. Ac propterea QR fiet ultimò æqualis ipſi Pv, & duæ etiam Qv, vq duabus RP, PZ æqualibus ultimò æquales fient; ac proinde ultimò inter ſe æquales. Erit igitur Pv evaneſcentis arcûs QPq (qui evaneſcentis QP duplus eſt) ſagitta, quæ chordam ejus mediam dividet, & ad S centrum virium tendet. Et huic Pv oſtenſa eſt QR ultimò æqualis.

([t]) Ultimò ſcilicet, arcu QP infinitè decreſcente.

Corol.

De Motu Corporum

Corol. 3. Si orbis vel circulus eſt, vel circulum concentricè tangit, aut concentricè ſecat, id eſt, angulum contactûs, aut ſectionis, cum circulo quàm minimum continet, eandem habens curvaturam eundemque radium curvaturæ ad punctum P; & ſi PV chorda ſit circuli hujus, à corpore per centrum virium acta: erit vis centripeta reciproce ut ſolidum $SYq \times PV$. Nam PV eſt $\frac{QPq}{QR}$.



Corol. 4. Iiſdem poſitis, eſt vis centripeta ut velocitas bis directè, & chorda illa inverſè. Nam velocitas eſt reciprocè ut perpendiculum SY per Corol. 1. Prop. I.

Corol. 5. Hinc ſi detur figura quævis curvilinea APQ, & in eâ detur etiam punctum S, ad quod vis centripeta perpetuò dirigitur; inveniri poteſt lex vis centripetæ, quâ corpus quodvis P, à curſu rectilineo perpetuò retractum, in figuræ illius perimetro detinebitur, eamque revolvendo deſcribet. Nimirum computandum eſt vel ſolidum $\frac{SPq \times QTq}{QR}$, vel ſolidum $SYq \times PV$, huic vi reciprocè proportionale. Ejus rei dabimus exempla in Problematis ſequentibus (u).

PROP. V. PROB. II.

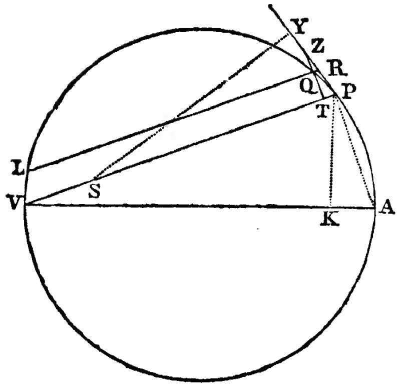
Gyretur corpus in circumferentiâ circuli; requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum.

Eſto circuli circumferentia VQPA; punctum datum, ad quod vis

(u) *Cor. H.* Ex horum Corollariorum tertio (id quod ad locum rectè monuere patres doctiſſimi Le Sœur & Jacquier) facilè deducenda eſt lex illa vis centripetæ, quam viri præclari, Joannes Bernoullius, Abrahamus Moivræus & Guido Grandus tradiderunt. Nimirum ſi litera R ſignificet radium circuli cujus curvaturæ curvatura orbitæ in loco P æqualis ſit; vis centripeta in P erit contrariè ut ſolidum $\frac{SY^3 \times R}{SP}$. Nam diameter circuli illius erit ad chordam PV ut SP ad SY. Hoc eſt $SP : SY = 2R : PV$. Permutando $SP : 2R = SY : PV$. Quare $SP : 2R = SY^3 : SY^2 \times PV$. Quare $\frac{SY^3 \times 2R}{SP} = SY^2 \times PV$. Erit igitur $\frac{SY^3 \times R}{SP}$ ut $SY^2 \times PV$, hoc eſt, ut vis centripeta contrariè (per Cor. 3.)

(x) Triangula VPA, ZTP idcirco inter ſe ſunt ſimilia, quia rectâ PZ tangente circulum APV, quem

Liber Primus.



vis ceu ad centrum ſuum tendit, S; corpus in circumferentiâ latum P; locus proximus, in quem movebitur Q; & circuli tangens ad locum priorem PRZ. Per punctum S ducatur chorda PV; & actâ circuli diametro VA, jungatur AP; & ad SP demittatur perpendiculum QT, quod productum occurrat tangenti PR in Z; ac denique per punctum Q agatur LR, quæ ipſi SP parallela ſit, & occurrat tum circulo in L, tum tangenti PZ in R. Et ob ſimilia triangula ZQR, ZTP, VPA (x), erit RP *quad.* hoc eſt QRL ad QT *quad.* ut AV *quad.* ad PV *quad.* Ideoque $\frac{QRL \times PV \text{ quad.}}{AV \text{ quad.}}$ æquatur QT *quad.* Ducantur hæc æqualia in $\frac{SP \text{ quad.}}{QR}$, & punctis P & Q coeuntibus ſcribatur PV pro RL. Sic fiet $\frac{SP \text{ quad.} \times PV \text{ cub.}}{AV \text{ quad.}}$ æquale $\frac{SP \text{ quad.} \times QT \text{ quad.}}{QR}$. Ergo (per Corol. 1 & 5. Prop. VI.) vis centripeta eſt reciprocè ut $\frac{SPq \times PV \text{ cub.}}{AV \text{ quad.}}$; id eſt (ob datum AV *quad.*) reciprocè ut quadratum diſtantiæ ſeu altitudinis SP & cubus chordæ PV conjunctim. Q. E. I.

Idem aliter.

Ad tangentem PR productam demittatur perpendiculum SY: & ob ſimilia triangula SYP, VPA (y); erit AV ad PV ut SP ad SY: ideoque $\frac{SP \times PV}{AV}$ æquale SY, & $\frac{SP \text{ quad.} \times PV \text{ cub.}}{AV \text{ quad.}}$ æquale SY *quad.* × PV. Et propterea (per Corol. 3 & 5. Prop. VI.) vis centripeta eſt reciprocè ut $\frac{SPq \times PV \text{ cub.}}{AVq}$; hoc eſt, ob datam AV, reciprocè ut $SPq \times PV$ *cub.* Q. E. I.

Corol. 1. Hinc ſi punctum datum S, ad quod vis centripeta

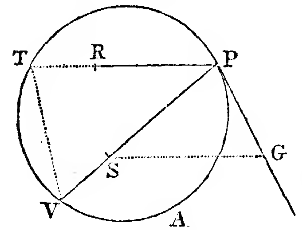
quem recta PV ſecat, anguli ZPT, PAV inter ſe æquales ſunt (per El. III. 32.) Angulus autem VPA rectus, propter ſemicirculum: recto igitur ZTP æqualis. Quare & reliqui triangulorum ZTP, VPA, anguli, PZT, AVP, inter ſe æquales, & triangula inter ſe ſimilia erunt. (El. VI. 4.) Q. E. D.

(y) Anguli SPY, PAV, ut modò oſtenſum eſt, inter ſe æquales. Rectus autem SYP, recto VPA æqualis. Quare & PSY, AVP inter ſe æquales, & triangula, SYP, VPA inter ſe ſimilia. (El. VI. 4.)

ſemper

femper tendit, locetur in circumferentiâ hujus circuli, puta ad v; erit vis centripeta reciprocè ut quadrato-cubus altitudinis SP.

Corol. 2. Vis, quâ corpus P in circulo APTV circum virium centrum S revolvitur, eft ad vim, quâ corpus idem P, in eodem circulo & eodem tempore periodico (z) circum aliud quodvis virium centrum R revolvi poteft, ut RP *quad.* × SP ad cubum rectæ SG, quæ à primo virium centro, S, ad orbis tangentem, PG, ducitur, & diftantiæ corporis à fecundo virium centro parallela eft.



Nam, per conftructionem hujus propofitionis, vis prior eft ad vim pofteriorem ut RPq × PT *cub.* ad SPq × PV *cub.* id eft, ut SP × RPq ad $\frac{\text{SP cub.} \times \text{PV cub.}}{\text{PT cub.}}$, five (ob fimilia triangula PSG, TPV) ad SG *cub.* (aa)

Corol. 3. Vis, quâ corpus P in orbe quocunque circum virium centrum S revolvitur, eft ad vim, quâ corpus idem P in eodem orbe eodemque tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi poteft, ut SP × RPq, contentum utique fub diftantiâ corporis à primo virium centro, S, & quadrato diftantiæ ejus à fecundo virium centro, R, ad cubum rectæ SG, quæ à primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, & corporis à fecundo virium centro diftantiæ RP parallela eft. Nam vires in hoc orbe, ad ejus punctum quodvis P, eædem funt ac in circulo ejufdem curvaturæ.

PROP.

(z) Nimirum idem ponendum eft tempus periodicum, ut areis, circum centra diverfa defcriptis, temporum, quibus defcribuntur, proportio maneat. Corollaria enim Propofitionis fextæ, quibus nititur hæc Propofitio, commune illud omnia fundamentum habent; fervari inter areas temporum proportiones. Atque hoc pofito, omnia illa corollaria de viribus centripetis, quæ vel diverfa centra, vel idem refpiciant, æquè vigent.

(aa) Propter TP, SG parallelas, anguli TPV, PSG inter fe æquales. (El. I. 29.) Et cùm recta PG tangat circulum TPV, quem VP fecat, idcirco anguli PTV, SPG inter fe æquales. (El. III. 32.) Angulus igitur PVT angulo SGP æqualis, & triangula VPT, GSP inter fe fimilia, & PV:PT = SG:SP. (El. VI. 4.) Quare $\frac{\text{SP} \times \text{PV}}{\text{PT}} = \text{SG}$. Et $\frac{\text{SP}^3 \times \text{PV}^3}{\text{PT}^3} = \text{SG}^3$. Q. E. D. *(Eadem ferè Patres doctiffimi Le Saur & Jacquier.)*

(bb) Ad axem utique

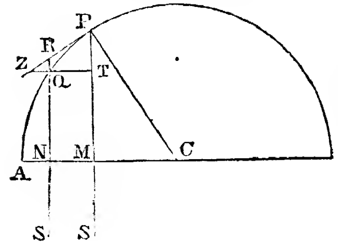
LEMMA H. I.

(cc) Sit Ellipfis vel Hyperbola cujus centrum C, femiaxis tranfverfus CA, fecundus CB. Si recta

PROP. VIII. PROB. III.

Moveatur corpus in femicirculo PQA: *ad hunc effectum requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum,* S, *ut lineæ omnes,* PS, RS, *ad id ductæ, pro parallelis haberi poffint.*

A femicirculi centro C agatur femidiameter CA parallelas iftas perpendiculariter fecans in M & N, & jungatur CP.



Ob fimilia triangula CPM, PZT, & RZQ; eft CPq ad PMq ut PRq ad QTq: &, ex naturâ circuli, PRq æquale eft rectangulo $\text{QR} \times \overline{\text{RN} + \text{QN}}$; five, coeuntibus punctis P & Q, rectangulo QR × 2PM. Ergo eft CPq ad PM *quad.* ut QR × 2PM ad QT *quad.* ideoque $\frac{\text{QT quad.}}{\text{QR}}$ æquale $\frac{\text{2PM cub.}}{\text{CP quad.}}$, & $\frac{\text{QT quad.} \times \text{SP quad.}}{\text{QR}}$ æquale $\frac{\text{2PM cub.} \times \text{SP quad.}}{\text{CP quad.}}$. Eft ergo (per Corol. 1 & 5. Prop. VI.) vis centripeta reciprocè ut $\frac{\text{2PM cub.} \times \text{SP quad.}}{\text{CP quad.}}$, hoc eft (neglectâ ratione determinatâ $\frac{\text{2SP quad.}}{\text{CP quad.}}$) reciprocè ut PM *cub.* Q. E. I.

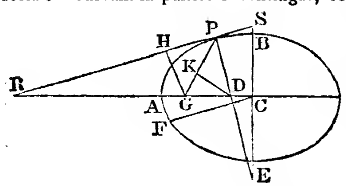
Idem facilè colligitur etiam ex propofitione præcedente.

Scholium.

Et argumento haud multum diffimili corpus invenietur moveri in Ellipfi, vel etiam in Hyperbolâ vel Parabolâ, vi centripetâ, quæ fit reciprocè ut cubus ordinatim applicatæ (bb) ad centrum virium maximè longinquum tendentis (cc).

PROP.

recta PR curvam in puncto P contingat, rectaque PD, à puncto P ad perpendiculum cum contingente educta, axi tranfverfo in D occurrat, fecundo in E; recta PD ad dimidium parametri principalis rationem habebit eam, quam femidiameter, quæ cum contingente eft parallela, ad femiaxem fecundum. Eademque rectæ PE ad dimidium axis tranfverfi ratio erit.



Ducatur per centrum C femidiameter CF cum contingente PR parallela. Dico primum, PD effe ad dimidium parametri principalis ut CF ad CB.

Inveniatur fectionis conicæ umbilicus, G. Ab illo G in contingentem PR deducatur ad perpendiculum recta GH. Jungatur GP, & in GP, à puncto D, deducatur ad perpendiculum recta DK. Anguli recti ad, H, K, inter fe æquales funt. Et propter parallelas, GH, PD, anguli HGP, KPD inter fe æquales (El. I. 29.) Quare HPG, KDP inter fe æquales, & triangula HGP, KPD inter fe fimilia erunt. Erit igitur GP ad GH ut PD ad PK. Sed GP eft ad GH ut CF ad CB, (Hamilton. Conic.

H 2

De Motu Corporum

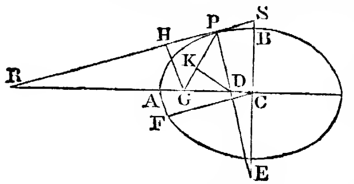
PROP. IX. PROB. IV.

Gyretur corpus in spirali PQS *secante radios omnes* SP, SQ, *&c. in angulo dato: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum spiralis.*

Detur angulus indefinitè parvus PSQ, & ob datos omnes angulos dabitur specie figura SPRQT. Ergo datur ratio $\frac{QT}{QR}$, estque $\frac{QT\ quad.}{QR}$ ut QT, hoc est (ob datam specie figuram illam) ut SP. Mutetur

Conic. Lib. II. 31.) & PK æqualis est dimidio parametri principalis (Hamilton. Conic. Lib. II. 27.) Erit igitur PD ad dimidium parametri principalis ut CF ad CB. Quod primum demonstrandum erat.

Dico secundo eandem esse rectæ PE ad CA rationem: sive PE esse ad CA ut CF ad CB. Recta PR, à puncto P in utramque partem producta, axibus, si opus sit, productis, in punctis R, S, occurrat.

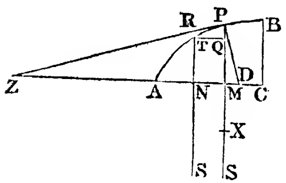


Propter angulos rectos RPD, RCS, angulumque ad R triangulis duobus SRC, DRP communem, reliqui illorum anguli RDP, RSC inter se æquales erunt. Rectus autem, RPD, recto EPS æqualis. Triangula igitur RPD, EPS, inter se similia, & RP : PD = EP : PS. (El. VI. 4.) Rectangula igitur RP × PS, EP × PD inter se æqualia. Rectangulum autem RP × PS quadrato ex CF æquale est. (Hamilton. Conic. Lib. I. 51.) Rectangulum igitur EP × PD quadrato ex CF æquale erit. Ac propterea rectangulum EP × PD erit ad quadratum ex PD, hoc est, EP erit ad PD, ut quadratum ex CF ad quadratum ex PD. (El. V. 7.) Sed, per partem primam hujus Lemmatis, quadratum ex CF est ad quadratum ex PD ut quadratum ex CB, dimidio axis secundi, ad quadratum ex dimidio parametri principalis; hoc est ut CA, dimidium axis transversi, ad dimidium parametri principalis. Erit igitur EP ad PD ut CA ad dimidium parametri principalis. (El. V. 11.) Sed, per partem primam, PD est ad CF ut dimidium parametri principalis ad CB. Erit igitur ex æquo EP : CF = CA : CB, & permutando EP : CA = CF : CB. Q. E. D.

Cor. 1. Rectangulum sub EP, PD æquale est quadrato è dimidio diametri, quæ cum contingente PR parallela est.

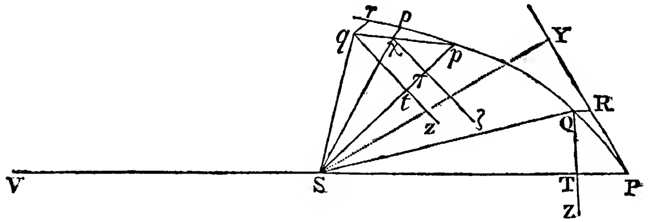
Cor. 2. EP est ad PD ut axis transversus ad parametrum principalem.

Ex his facilis erit demonstratio ejus quod Newtonus dicit, "Vim, quâ corpus retineatur in orbe conico, si illa agat secundum rectas ad axem orbis ordinatim applicatas, esse contrariè ut cubus ordinatæ."



Sit BPA sectio conica, cujus axis CA; & per Curvam PA ferri intelligatur corpus mobile, urgente vi quâdam, quæ secundum rectas ad axem CA ordinatim applicatas corpus perpetim impellat. Recta PR contingat curvam BPA in P, productaque axi CA in puncto Z occurrat. A puncto P ducatur recta PM ad axem CA ordinatim, rectaque PD ad perpendiculum cum contingente, quæ axi CA in D occurrat. Denique ab alio quovis curvæ puncto, T, agantur TRN, TQ; illa cum rectâ PM, hæc cum axe CA parallela. Erit igitur, propter rectas RN, PM inter se parallelas, RP:MN vel QT = ZP:ZM. (El. VI. 2.) Et propter triangula PZM, DPM inter se similia, ZP : ZM = DP : PM. (El. VI. 31.) Quare RP : QT = DP : PM (El. V. 11.) ac propterea $RP^2 : QT^2 = DP^2 : PM^2$. Jam si sectio conica PTA Ellipsis sit vel Hyperbola, & axis CA si transversus ille sit; sit recta MX æqualis dimidio lateris recti principalis; & per partem primam Lemmatis, erit quadratum è rectâ MX ad quadratum ex PD, ut quadratum ex axe secundo ad quadratum è diametro quæ parallela est cum contingente PR; hoc est, ut rectangulum $TR \times \overline{RN + TN}$ ad quadratum ex PR. (Hamilton. Conic. Lib. I. 31 & 40.) Hoc

Mutetur jam utcunque angulus PSQ, & recta QR, angulum con- Liber Primus.



tactûs QPR subtendens, mutabitur (per Lemma XI.) in duplicatâ ratione ipsius PR, vel QT. Ergo manebit $\frac{QT\ quad.}{QR}$ eadem quæ

est punctis Q, P coeuntibus ut $TR \times 2.PM$, ad quadratum ex PR. Erit inquam $MX^2 : PD^2 = TR \times 2.PM : PR^2$; ultimò scilicet, arcu TP, cum rectis PR, TR, QT, evanescente. Quamobrem cùm ostensum sit esse $PD^2 : PM^2 = PR^2 : QT^2$, erit ex æquo $MX^2 : PM^2 = TR \times 2PM : QT^2$; ultimò, arcu TP evanescente. Ac propterea $\frac{2.PM^3}{MX^2} = \frac{QT^2}{TR}$. Ac proinde $\frac{2PM^3 \times SP^2}{MX^2} = \frac{SP^2 \times QT^2}{TR}$ ultimò, arcu TR evanescente. Neque huic æqualitati obstabit rectæ SP longitudo, magna illa parvave fuerit: quin & infinitè rectâ SP auctâ æquatio illa stabit. Erit igitur $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR}$ ultimò ut $\frac{PM^3 \times SP^2}{MX^2}$; hoc est, si SP infinitè augeatur, quo pacto ratio $\frac{SP^2}{MX^2}$ constans fiet, neglecta illâ ratione constante, erit $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR}$ ut PM^3. Quare vis, quæ est contrariè ut $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR}$, erit contrariè etiam ut PM^3. Q. E. D.

Si verò CA semiaxis secundus sit Ellipseos vel Hyperbolæ PTA; sit CB ejusdem semiaxis transversus. Et per partem secundam Lemmatis, quadratum ex CB erit ad quadratum ex DP ut quadratum ex axe secundo ad quadratum ex diametro quæ parallela est cum contingente PR; hoc est ut rectangulum Z ad quadratum ex PR: designante literâ Z rectangulum sub segmentis rectæ à puncto R in axem CB ordinatim deductæ, ipso puncto R curvâque interceptis. Erit inquam $CB^2 : DP^2 = Z : PR^2$. Quamobrem cùm ostensum sit esse $DP^2 : PM^2 = PR^2 : QT^2$, erit ex æquo $CB^2 : PM^2 = Z : QT^2$. Invertendo $PM^2 : CB^2 = QT^2 : Z$. Sed $CA^2 : CB^2$, vel, si MX duarum CA, CB proportione tertia sit, $CB^2 : MX^2 = Z : TR \times \overline{RN + TN}$. Quare ex æquo $PM^2 : MX^2 = QT^2 : TR \times \overline{RN + TN}$. Vel ultimò, arcu PT evanescente $PM^2 : MX^2 = QT^2 : TR \times 2PM$. Quare $\frac{QT^2}{TR} = \frac{2PM^3}{MX^2}$ ultimò. Et $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR} = \frac{2PM^3 \times SP^2}{MX^2}$ ultimò. Ac propterea $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR}$ erit ultimò, arcu QP evanescente, ut $\frac{PM^3 \times SP^2}{MX^2}$; hoc est, si SP infinitè augeatur, quo pacto ratio $\frac{SP^2}{MX^2}$ constans fiet, erit $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR}$ ultimò ut PM^3. Erit igitur vis ut PM^3 contrariè. Q. E. D.

Quòd si Parabola sit sectio conica PTA, erit DZ dimidium parametri diametri illius quæ per P transit, et DM dimidium parametri principalis. (Hamilton. Conic. Lib. II. 25.) Erit igitur $DM : DZ = TR \times \overline{RN + TN} : PR^2$ (Hamilton. Conic. Lib. II. 3. Cor. 3.) Vel evanescente arcu PT, erit $DM : DZ = TR \times 2PM : PR^2$ ultimò. Sed propter angulos ad P & M rectos, erit $DM : DP = DP : DZ$. (El. VI. 31.) Atque idcirco $DM^2 : DP^2 = DM : DZ$. Erit igitur $DM^2 : DP^2 = TR \times 2PM : PR^2$. Quamobrem cùm ostensum sit esse $DP^2 : PM^2 = PR^2 : QT^2$, erit ex æquo $DM^2 : PM^2 = TR \times 2PM : QT^2$. Quare $\frac{QT^2}{TR} = \frac{2PM^3}{DM^2}$ ultimò. Unde $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR} = \frac{SP^2 \times 2PM^3}{DM^2}$. Ac propterea si SP infinitè augeatur, ut ratio illa $\frac{SP^2}{DM^2}$ constans fiat, erit $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR}$ ultimò ut PM^3. Ergo vis erit ut PM^3 contrariè. Q. E. D.

prius,

priùs, hoc est ut SP [dd]. Quare $\frac{QTq \times SPq}{QR}$ est ut SP *cub.* ideoque (per Corol. 1 & 5. Prop. VI.) vis centripeta est reciprocè ut cubus distantiæ SP. Q. E. I.

Idem aliter.

Perpendiculum SY in tangentem demissum, & circuli, spiralem concentricè secantis, chorda PV sunt ad altitudinem SP in datis rationibus [ee]; ideoque SP *cub.* est ut $SYq \times PV$, hoc est (per Corol. 3 & 5. Prop. VI.) reciprocè ut vis centripeta.

LEMMA XII.

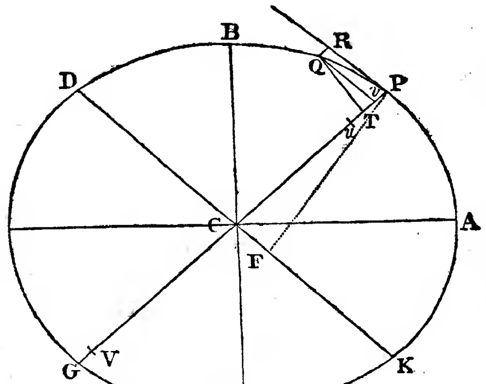
Parallelogramma omnia circa datæ Ellipseos vel Hyperbolæ diametros quasvis conjugatas descripta esse inter se æqualia.

Constat ex conicis [ff].

PROP. X. PROB. V.

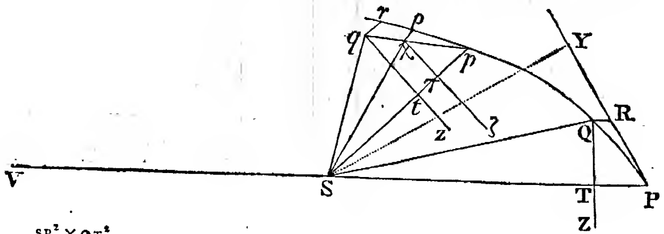
Gyretur corpus in Ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ellipseos.

Sunto CA, CB semiaxes Ellipseos; GP, DK diametri aliæ conjugatæ;



gatæ; PF, QT perpendicula ad diametros; Qv ordinatim applicata ad diametrum GP; & si compleatur parallelogrammum QvPR, erit (ex conicis) rectangulum PvG ad Qv *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & (ob similia triangula QvT, PCF [gg]) Qv *quad.* est ad QT *quad.* ut PC *quad.* ad PF *quad.* Et conjunctis rationibus, rectangulum PvG ad QT *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & PC *quad.* ad PF *quad.* id est, vG ad $\frac{QT\ quad.}{Pv}$ ut PC *quad.* ad $\frac{CDq \times PFq}{PCq}$. Scribe QR pro Pv, & (per Lemma XII.) $BC \times CA$ pro $CD \times PF$, nec non (punctis P & Q coeuntibus) 2PC pro vG, & ductis extremis & mediis in se mutuò, fiet $\frac{QT\ quad. \times PCq}{QR}$ æquale $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$. Est ergo (per Corol. 5. Prop. VI.) vis centripeta reciprocè ut $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$; id est (ob datum $2BCq \times CAq$) reciprocè ut $\frac{1}{PC}$; hoc est, directè ut distantia PC. Q. E. I.

(dd) Ad vim hujus demonstrationis explicandam, ponantur SPQ, Spq esse areæ, quas corpus in spirâ angulorum æqualium, circum centrum S circumactum, temporibus æqualibus descripserit. Agantur rectæ PR, pr, quæ spiram in punctis P, p contingant; rectæ QR, qr cum radiis SP, Sp, parallelæ; rectæque QT, qt ad perpendiculum cum illis radiis. Vis centripeta in loco P ad vim centripetam in loco p rationem habebit eam quæ arcubus, PQ, pq, evanescentibus, solidi $\frac{Sp \times qt^2}{qr}$



ad solidum $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ ultima erit (Prop. VI. Cor. 1.) Hoc est si capiantur Qz, qz, quarum illa quidem cum duabus QR, QT, hæc verò cum duabus qr, qt proportione sit tertia, vis centripeta in loco P ad vim centripetam in loco p rationem habebit eam, quæ ultima sit solidi $Sp^2 \times qz$ ad solidum $SP^2 \times Qz$. Dicit autem Newtonus hanc esse eam, quæ est cubi ex Sp ad cubum ex SP. Fiat angulus $pS\chi$ angulo PSQ æqualis; & agantur $\chi\varrho$, $\chi\tau$ cum rectis qr, qt parallelæ; & capiatur $\chi\zeta$ cum duabus $\chi\varrho$, $\chi\tau$ proportione tertia. Evanescentibus autem arcubus PQ, pq, arcus $p\chi$ eâ lege fluat, ut anguli PSQ, $pS\chi$ semper sint inter se æquales. Sectores igitur SPQ, $Sp\chi$, è naturâ curvæ, erunt inter se similes; trapezia quoque PTQR, $p\tau\chi\varrho$ inter se similia erunt. Erit igitur QR ad QT ut $\chi\varrho$ ad $\chi\tau$. Ergo & $QR^2 : QT^2 = \chi\varrho^2 : \chi\tau^2$. Sed $QR^2 : QT^2 = QR : Qz$, & $\chi\varrho^2 : \chi\tau^2 = \chi\varrho : \chi\zeta$ (ita factum enim). Ergo $QR : Qz = \chi\varrho : \chi\zeta$. (El. V. 11.) Permutando $QR : \chi\varrho = Qz : \chi\zeta$. Sed $QR : \chi\varrho = SP : Sp$ (ob similitudinem figurarum SPRQT, $Sp\varrho\chi\tau$). Ergo $Qz : \chi\zeta = SP : Sp$. (Et hoc est quod dicit Newtonus, datâ specie figurâ SPRQT, esse $\frac{QT^2}{QR}$ ut QT, hoc est ut SP.) Evanescentibus

tibus autem arcubus $p\chi$, pq, ratio ultima evanescentis $\chi\varrho$ ad evanescentem rq ea erit, quæ est
quadrati ex $p\varrho$ ad quadratum ex pr. (Lemma XI. Cor. 1.) Sunt autem $p\varrho$, pr inter se sicut rectæ
à punctis ϱ, r in rectam Sp ad perpendiculum demissæ: ac demissæ illæ sunt inter se ut $\chi\tau$, qt,
quibus sunt æquales. (Nimirum cùm rectæ $\varrho\chi$, rq parallelæ sint cum rectâ pS, rectæque $\chi\tau$, qt,
in eandem Sp ad perpendiculum sint demissæ.) Quadrata igitur ex illis $p\varrho$, pr sunt inter se sicut
quadrata ex illis $\chi\tau$, qt. Erit igitur $\chi\varrho$ ad qr ultimò ut quadratum ex $\chi\tau$, ad quadratum ex qt;
hoc est, cùm quadrata ex $\chi\tau$, qt, rectangulis $\chi\varrho \times \chi\zeta$, $qr \times qz$ sint æqualia, erit $\chi\varrho$ ad qr ultimò
ut $\chi\varrho \times \chi\zeta$ ad $qr \times qz$. Est autem $\chi\varrho$ ad qr sicut rectangulum $\chi\varrho \times \chi\zeta$ ad rectangulum $qr \times \chi\zeta$. Ac
proinde $\chi\varrho \times \chi\zeta$ erit ad $qr \times \chi\zeta$ ultimò, ut $\chi\varrho \times \chi\zeta$ ad $qr \times qz$. Sunt igitur rectangula $qr \times \chi\zeta$,
$qr \times qz$ ultimò inter se æqualia. Ac propterea rectæ $\chi\zeta$, qz ultimò inter se æquales. (Et hoc
est quod dicit Newtonus, mutato utcunque angulo PSQ manere $\frac{QT^2}{QZ}$ eandem quæ priùs fuerat.)
Quare cùm ostensum sit, esse $SP : Sp = Qz : \chi\zeta$, erit ultimò $Qz : qz = SP : Sp$. Quamobrem solidorum $SP^2 \times Qz$, $Sp^2 \times qz$ ratio ultima cuborum ex SP, Sp inter ipsos ratio erit. Nimirum cùm ratio
utraque, ultima illa, & cuborum inter ipsos, ex eisdem componatur. Q. E. D.

(ee) Nam, propter angulum ad P datum, chorda PV erit ut radius circuli; & radius circuli, ob mutuam partium figuræ similitudinem, erit ut SP (*Emersonus ad locum.*)

(ff) Hamilton. Conic. Lib. IV. 1.

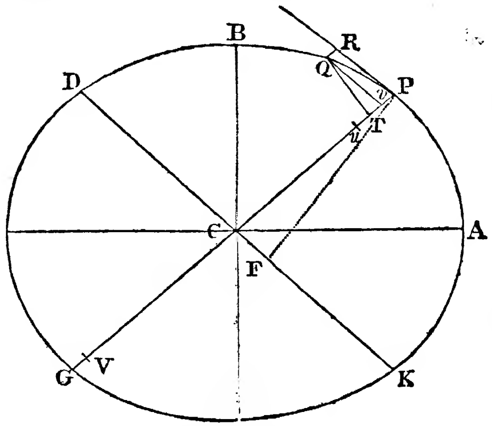
(gg) Propter illas Qv, CK inter se parallelas, anguli QvT, PCF erunt inter se æquales. (El. I. 29.) Anguli etiam recti QTv, PFC inter se æquales. Reliquus igitur TQv reliquo FPC æqualis, & triangula QvT, PCF inter se similia erunt (El. VI. 4.)

Idem

De Motu Corporum

Idem aliter.

In rectâ GP, ab alterâ parte puncti T, ſumatur punctum u, ut Tu ſit æqualis ipſi Tv; deinde cape uv, quæ ſit ad vG ut eſt DC *quad.* ad PC *quad.* Et quoniam ex conicis eſt Qv *quad.* ad PvG ut DC *quad.* ad PC *quad.* erit Qv *quad.* æquale Pv × uv. Adde rectangulum uPv utrinque, & prodibit quadratum chordæ arcûs PQ æquale rectangulo VPv (hh); ideoque circulus, qui tangit ſectionem conicam in P & tranſit per punctum Q, tranſibit etiam per punctum V. Coeant puncta P & Q, & ratio uv ad vG, quæ eadem eſt cum ratione DCq ad PCq, fiet ratio PV ad PG ſeu PV ad 2PC;



(hh) Cum ſit ex conicis quadratum ex Qv ad rectangulum PvG ut quadratum ex DC ad quadratum ex PC, quadratum autem ex DC ad quadratum ex PC ut uv ad vG (ex conſtructione) erit quadratum ex Qv ad rectangulum PvG ut uv ad vG (El. V. 11.) hoc eſt, ut rectangulum Pv × uv ad rectangulum PvG. Quadratum igitur ex Qv rectangulo Pv × uv æquale erit. (El. V. 9.) Quare ſi utrique addatur rectangulum uPv, duo illa, quadratum ex Qv & rectangulum uPv, ſimul ſumpta duobus rectangulis uv × Pv, uP × Pv, ſimul ſumptis, hoc eſt (El. II. 1.) rectangulo VPv, æqualia erunt. Sed, propter angulum ad T rectum, angulus QvP recto major erit. (El. I. 16.) Ac propterea quadratum ex QP, qnadratis è duabus Qv, vP, & duplo rectanguli Tv × vP, tribus illis ſimul ſumptis, æquale erit. (El. II. 12.) Rurſum propter rectam uv, rectæ Tv duplam (ex conſtructione) rectangulum uv × vP rectanguli Tv × vP duplum erit. Duplum igitur rectanguli Tv × vP cum quadrato ex vP, rectangulo uv × vP cum quadrato ex vP, hoc eſt, (El. II. 3.) rectangulo uPv, æquale erit. Et quadrato ex Qv communiter addito, fient tria illa, quadrata ex Qv et vP, & duplum rectanguli TvP, hæc inquam tria, quibus quadratum ex QP modò oſtendimus æquale, duobus, quadrato ex Qv & rectangulo uPv, ſimul ſumpta ſimul ſumptis, æqualia erunt. Sed quadratum ex Qv cum rectangulo uPv rectangulo VPv oſtenſum eſt æquale. Quadratum igitur ex QP rectangulo VPv, ſicut pronunciavit Newtonus, æquale erit.

(ii) Recta enim à centro virium C in tangentem PR ad perpendiculum demiſſa rectæ PF æqualis erit. Nempe cùm oppoſita ſint illæ parallelogrammi latera.

(kk) Corpora duo, urgentibus viribus quæ centrum commune C reſpiciant, ferri intelligantur in orbibus ellipticis ABD, TFE, quorum idem centrum C. Dicit Newtonus converſionum tempora inter ſe æqualia eſſe. Nos autem oſtendimus quod Newtonus dicit hoc modo.

Sint AD, TE ellipſeon ABD, TFE axes tranſverſi; ſint CB, CF ſecundi earum ſemiaxes. Et axe tranſverſo AD, centro C, ſcriptam puta ellipſin AHD ellipſeos TFE ſimilem, & hujus AHD ſit CH ſecundus ſemiaxis. Urgentibus autem viribus quæ centrum idem C reſpiciant, ferri intelligatur tertium corpus per ellipſin DHA. Sint DCK, DCG areæ ellipſeon DBA, DHA motu corporum eodem tempore deſcriptæ. A punctis G, K ducantur GL, KM ad axem AD ordinatim. Tempus converſionis integræ in ellipſi ABD erit ad tempus quo ſimul deſcribuntur areæ DCK, DCG, ut area tota

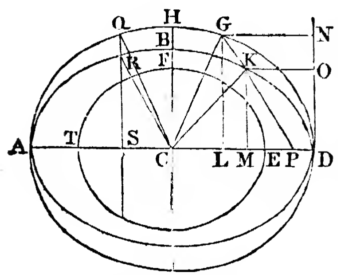
Liber Primus.

2PC; ideoque PV æqualis erit $\frac{2DCq}{PC}$. Proinde vis, quâ corpus in ellipſi revolvitur, erit reciproce ut $\frac{2DCq}{PC}$ in PFq (ii) (per Corol. 3. Prop. VI.) hoc eſt (ob datum 2DCq in PFq) directè ut PC. Q.E.I.

Corol. 1. Eſt igitur vis ut diſtantia corporis à centro ellipſeos: & viciſſim, ſi vis ſit ut diſtantia, movebitur corpus in ellipſi centrum habente in centro virium, aut fortè in circulo, in quem utique ellipſis migrare poteſt.

Corol. 2. Et æqualia erunt revolutionum, in ellipſibus univerſis circum centrum idem factarum, periodica tempora. Nam tempora illa, in ellipſibus ſimilibus, æqualia ſunt (per Corol. 3 & 8. Prop. IV.) in ellipſibus autem communem habentibus axem majorem, ſunt ad invicem ut ellipſeon areæ totæ directè, & arearum particulæ ſimul deſcriptæ inverſè; id eſt, ut axes minores directè, & corporum velocitates in verticibus principalibus inverſè; hoc eſt, ut axes illi minores directè, & ordinatim applicatæ ad idem punctum axis communis inverſè; & propterea (ob æqualitatem rationum directarum & inverſarum) in ratione æqualitatis (kk).

Scholium.



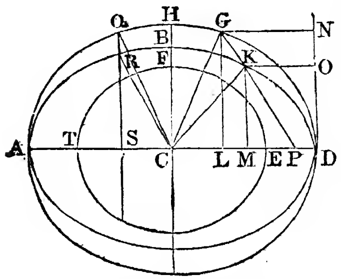
tota ellipſeos ABD ad aream DCK. Atque tempus illud, quo ſimul deſcribuntur areæ DCK, DCG, erit ad tempus converſionis integræ in ellipſi DHA ut area DCG ad aream totam ellipſeos DHA. Tempus igitur converſionis integræ in ellipſi DBA ad tempus converſionis integræ in ellipſi DHA rationem habebit eam, quæ compoſita eſt è ratione ellipſeos DBA ad ſectorem DCK, ſectoriſque DCG ad ellipſin DHA; hoc eſt, quæ compoſita eſt è ratione ellipſeos DBA ad ellipſin DHA, ſectoriſque DCG ad ſectorem DCK. Sed area ellipſeos DBA erit ad aream ellipſeos DHA, cùm axem tranſverſum illæ communem habeant, ſicut illius ſemiaxis minor, CB, ad hujus ſemiaxem minorem CH. (Lemma IV. Cor. H. 1.) Tempus igitur converſionis integræ in ellipſi DBA ad tempus converſionis integræ in ellipſi DHA rationem habebit eam, quæ compoſita eſt è rationibus rectæ CB ad rectam CH, ſectoriſque DCG ad ſectorem DCK. Neque huic rationi officient arearum DCG, DCK magnitudines, magnæ parvæve illæ fuerint, modò corporum motu ſimul fuerint deſcriptæ. Tempus igitur converſionis integræ in ellipſi DBA ad tempus converſionis integræ in ellipſi DHA rationem habebit eam, quæ componetur è ratione rectæ CB ad rectam CH, cum eâ, quæ, arcubus DG, DK infinitè imminutis, evaneſcentis ſectoris DCG ad evaneſcentem DCK ultima erit. Hæc autem ratio ultima, rectarum quoque GL, KM evaneſcentium ultima inter ipſas erit. Nimirum cùm ſectores DCG, DCK triangulis CGL, CKM fiant ultimò æquales, et hæc triangula, propter baſes CL, CM ultimò æquales, ſint ultimò ut GL, KM evaneſcentes ipſorum altitudines. At ſi juncta GK axi AD producta in P occurrat, rectarum GL, KM ratio ultima illarum GP, PK ultima quoque inter ipſas erit. Tempus igitur converſionis integræ in ellipſi DBA, ad tempus converſionis integræ in ellipſi DHA rationem habebit eam, quæ compoſita eſt è ratione datâ rectæ CB ad CH, cum eâ quæ rectarum evaneſcentium GP, PK ultima inter ipſas erit. Ducatur DN, quæ ellipſes in illarum vertice communi, D, contingat. Et à punctis G, K, ducantur GN, KO cum axe AD parallelæ, quæ contingenti DN in punctis N, O, occurrant. Jam cùm motu corporum in ellipſibus DHA, DBA, areæ DCK, DCG ſimul deſcribantur; areis illis infinitè imminutis, rectæ evaneſcentes GN, KO erunt inter ſe ultimò ut vires centripetæ, quibus corpora, in loco D, verſus centrum

De Motu Corporum

Scholium.

Si Ellipſis, centro in infinitum abeunte, vertatur in Parabolam, corpus movebitur in hâc Parabolâ; & vis, ad centrum infinitè diſtans jam tendens, evadet æquabilis. Hoc eſt theorema *Galilæi*. Et ſi coni ſectio parabolica (inclinatione plani ad conum ſectum mutatâ) vertatur in Hyperbolam, movebitur corpus in hujus perimetro, vi centripetâ in centrifugam verſâ (ll). Et quemadmodum in circulo vel ellipſi, ſi vires tendunt ad centrum figu-

ræ

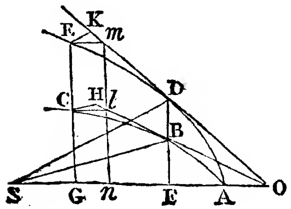


trum C trahuntur. (Prop. I. Cor. 4.) Quamobrem, cùm eâdem vi centripetâ, in loco D, corpus utrumque urgeatur, rectæ illæ GN, KO erunt ultimò inter ſe æquales. Recta igitur GK erit ultimò ſaltem cum contingente DN parallela, ac proinde ad axem AD ordinata. Evaneſcentium igitur GP, PK ratio inter ipſas ultima ea erit, quæ eſt ordinatarum inter ipſas quibus abſciſſa eſt communis. Atque hæc eſt, axium CH, CB inter ipſos data ratio. Tempus igitur converſionis in ellipſi DBA ad tempus converſionis in ellipſi DHA rationem habebit eam, quæ compoſita eſt è ratione rectæ CB ad CH, rectæque CH ad CB. Tempora igitur converſionum in ellipſibus DBA, DHA erunt inter ſe æqualia. Ellipſes autem DHA, EFT, cùm ſint inter ſe ſimiles, & corpora in ellipſibus illis retineantur viribus, quæ commune illarum centrum C reſpiciant; idcirco vires illæ, ſecundum propoſitionem X, erunt ubique ut diſtantiæ corporum à centro; & converſionum in his ellipſibus tempora erunt inter ſe æqualia. (Prop. IV. Cor. 3 & 8.) Hoc eſt tempus converſionis in EFT tempori converſionis in DHA æquale. Huic autem tempus converſionis in DBA oſtenſum eſt æquale. Tempora igitur converſionum in ellipſibus DBA, EFT inter ſe æqualia. Q. E. D.

Cor. II. Si ad axem AD, qui ellipſium DBA, DHA tranſverſus eſt communis, agatur quævis QS ordinatim, quæ ellipſes in punctis R, Q ſecet; junctis CR, CQ, ſectores elliptici DCR, DCQ motu corporum ſimul deſcribuntur. Ac proinde recta QR, quæ puncta illa ellipſium, DHA, DBA, jungit, quæ corpora mobilia, ſi è loco D ſimul fuerint egreſſa, ſimul appulerint, recta inquam QR quæ hæc puncta jungit, non modo ultimò, ſed ſemper quidem ad axem ellipſium communem AD ordinata erit. Sectores enim DCR, DCQ erunt inter ſe ut CB ad CH, hoc eſt ut areæ totæ ellipſium quarum ſunt ſectores. (Lemma IV. *Cor. II.* 1.) Permutando, area tota ellipſeos DBA, ad ſectorem DCR ut area tota ellipſeos DHA ad ſectorem DCQ. Eſt autem area tota ellipſeos DBA ad ſectorem DCR ut tempus converſionum in ellipſibus DBA, DHA ad tempus quo deſcribitur ſector DCR. (Prop. I.) Et area tota ellipſeos DHA ad ſectorem DCQ ſicut idem tempus converſionum in ellipſibus DBA, DHA ad tempus quo deſcribitur ſector DCQ. Tempus igitur converſionum in ellipſibus ad tempora quibus deſcribuntur ſectores DCR, DCQ eandem rationem habet. (El. V. 11.) Quare tempora quibus ſectores illi deſcribuntur inter ſe æqualia erunt. (El. V. 9.) Sectores igitur illi ſimul deſcribentur, ſi corpora mobilia è loco D ſimul egreſſa fuerint. Q. E. D.

(ll) Vide Tom I. (Excerp. ex Epiſt. IV. Not. q.)

(mm) SINT Curvæ ABC, ADE axe communi AS, quæ eo modo ad ſe mutuò ſint affectæ, ut ordinatis quibuſvis, ab eodem axis puncto exeuntibus, data quædam ratio intercedat; unde illud etiam conſequetur, ut areis curvarum totis, ſi ex earum quidem genere ſint quæ in orbem redeant, vel partibus earum ad communem quamlibet ordinatam terminatis, eadem data ratio intercedat. (Lemma *Cor. II.* 1.) In his Curvis ferri intelligantur corpora, viribus centripetis, quæ centrum S in axe communi poſitum reſpiciant, ſollicitata; atque eâ quidem lege, ut tempora converſionum integra, ſi Curvæ ex earum genere ſint quæ in orbem redeant; aliter verò, ut tempora, quibus



abſolvuntur

Liber Primus.

ræ in abſciſſâ poſitum; hæ vires, augendo vel diminuendo ordinatas in ratione quâcunque datâ, vel etiam mutando angulum inclinationis ordinatarum ad abſciſſam, ſemper augentur vel diminuuntur in ratione diſtantiarum à centro, ſi modò tempora periodica maneant æqualia; ſic etiam in figuris univerſis ſi ordinatæ augeantur vel diminuantur in ratione quâcunque datâ, vel angulus ordinationis utcunque mutetur, manente tempore periodico; vires, ad centrum quodcunque in abſciſſâ poſitum tendentes, in ſingulis ordinatis augentur vel diminuuntur in ratione diſtantiarum à centro (mm).

SECTIO

abſolvuntur ſectores quidam quibus abſciſſa eſt communis, inter ſe æqualia ſint. Agatur quævis DF ad axem SA ordinatim, quæ axi illi in puncto F, curvis in B, D, occurrat. Jungantur SB, SD. Dicit Newtonus vim centripetam in loco B eſſe ad vim centripetam in loco D ut SB, ad SD. Nos autem oſtendimus quod Newtonus dicit hoc modo.

Ducatur alia quævis EG ad axem AS ordinatim, quæ axi in G, curvis in punctis C, E occurrat. Jam cùm tempora, vel converſionum tota, ſi curva utraque in orbem redeat; vel, ſi in orbem neutra redeat, tempora tamen quibus abſolvuntur ſectores quidam, quibus abſciſſa eſt communis, ſint inter ſe æqualia; ex eo conſequetur, tempora, quibus quilibet ſectores quorum abſciſſa eſt communis abſolvuntur, eſſe etiam inter ſe æqualia. Id enim eâdem argumentatione obtinebimus, quâ corollarium noſtrum è corollario Newtoni ſecundo demonſtravimus. Junctis igitur, SC, SE ſectores ASB, ASD, quorum communis eſt abſciſſa AF, ſimul deſcribentur, ſi corpora ſimul loco A exierint; necnon ſectores ASC, ASE quorum abſciſſa AG eſt communis. Corpora igitur, cùm ad loca B, D ea ſimul appulerint, atque rurſum ad loca C, E ſimul, ſectores BSC, DSE ſimul deſcripſerint. Ducatur recta BO, quæ curvam ABC in B contingat. Hæc axi SA in O occurrat, et jungatur OD. Propter datam ordinatarum, FB, FD, inter ipſas rationem, ordinatæ illæ cum fluxionibus ſuis proportione convenient (Geometr. Flux. Prop. IV.) hoc eſt $FD:FB = \dot{FD}:\dot{FB}$. Et cùm OB curvam ABC in B contingat, erit $FB:FO = \dot{FB}:\dot{AF}$. Erit igitur ex æquo $FD:FO = \dot{FD}:\dot{AF}$. Quare recta OD curvam ADE in D continget. Actis igitur à punctis C, E rectis CH, EK cum illis SB, SD parallelis, quæ rectis OB, OD in punctis H, K occurrant, vis centripeta in loco B ad vim centripetam in loco D rationem habebit eam, quæ ſectoribus BSC, DSE infinitè imminutis, evaneſcentium CH, EK ultima inter ipſas erit. Oſtendendum igitur hanc rationem ultimam eam eſſe, quæ eſt rectæ SB ad SD. Agatur Cl cum axe SA parallela, quæ contingenti OB in l occurrat. Per l ducatur mln cum ordinatis ad axem SA parallela, quæ axi in n, contingenti OD in m, occurrat; & jungatur Em. Propter rectas duas CH, Cl cum duabus SB, SO parallelas, triangula HCl, BSO inter ſe ſimilia erunt, & CH erit ad Cl ut SB ad SO. Propter rectas FD, mn inter ſe parallelas, erit ln ad lm ut FB ad BD. Eſt autem, propter illam quæ poſita eſt curvarum ad ſe mutuò affectionem, FB ad BD ut GC ad CE. Ergo nl erit ad lm ut GC ad CE. (El. V. 11.) Sunt autem nl, GC inter ſe æquales, utpote quæ parallelogrammi nC adverſa inter ſe ſint latera. Erunt igitur & lm, EC inter ſe æquales. (El. V. 14.) Sunt autem ex conſtructione inter ſe parallelæ. Quare Em, Cl parallelæ etiam inter ſe & æquales erunt. (El. I. 33.) Et Em, cùm ea ſit parallela cum Cl, parallela erit cum axe SO. (El. I. 30.) Duæ igitur EK, EM, cum duabus SD, SO ſunt parallelæ. Unde conſequetur, triangula EKm, DSO inter ſe ſimilia eſſe, atque EK eſſe ad Em, vel illi æqualem Cl, ut SD ad SO. Sed Cl eſt ad CH ut SO ad SB. Id enim jam antè oſtenſum eſt. Ex æquo igitur EK erit ad CH ut SD ad SB. Et invertendo $CH:EK = SB:SD$. Neque huic rationi officiet ſectorum BSC, DSE magnitudines, magni illi parvive fuerint. Sectoribus igitur illis, regreſſu punctorum E, C, ad manentia D, B, infinitè imminutis, rectis evaneſcentibus CH, EK eadem inter ipſas ratio, quæ eſt rectis SB, SD, vel ultimò manebit. Quamobrem & vis centripeta in loco B erit ad vim centripetam in loco D ut SB ad SD. Q. E. D.

Verùm dicit Newtonus idem obtinere, etiamſi angulus ordinationis utcunque mutetur. Hoc autem verè dici rationibus ex iiſdem fere fontibus derivatis facile erit oſtendere, modò priùs quâ mente dictum eſt paulo enodatiùs expoſuerim.

Sint

SECTIO III.

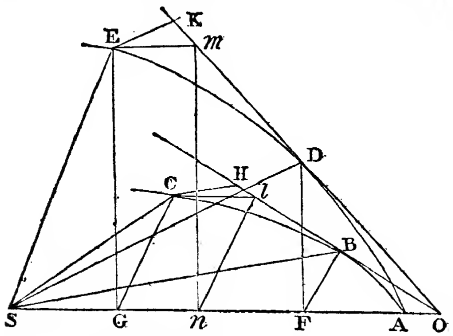
De motu corporum in conicis ſectionibus excentricis.

PROP. XI. PROB. VI.

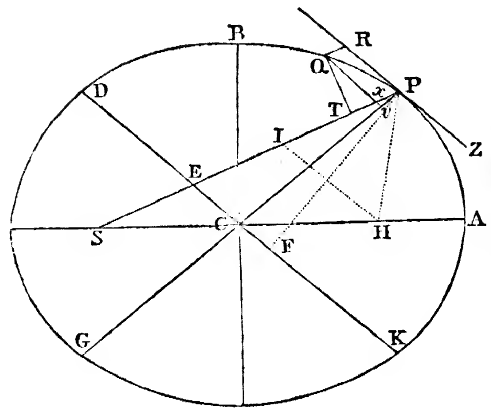
Revolvatur corpus in Ellipſi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum ellipſeos.

Eſto ellipſeos umbilicus S. Agatur SP ſecans ellipſeos tum diametrum DK in E, tum ordinatim applicatam Q*v* in *x*, & compleatur parallelogrammum Q*x*PR. Patet EP æqualem eſſe ſemiaxi majori AC; eo quòd, actâ ab altero ellipſeos umbilico, H, lineâ HI ipſi EC parallelâ, ob æquales CS, CH, æquentur ES, EI, adeo ut EP ſemiſumma ſit ipſarum PS, PI; id eſt (ob parallelas HI, PR, & angulos æquales IPR, HPZ) ipſarum PS, PH, quæ conjunctim axem totum 2AC adæquant. Ad SP demittatur perpendicularis QT, & ellipſeos latere recto principali (ſeu $\frac{2BC\ quad.}{AC}$) dicto L, erit L×QR ad L×P*v* ut QR ad P*v*, id eſt, ut PE ſeu AC ad

Sint igitur duæ Curvæ ABC, ADE, axe communi AS, quæ eo modo ad ſe mutuò ſint affectæ, ut ſi à quolibet axis puncto, puta F, educantur datis, ſed diverſis, ad axem AS inclinationibus rectæ FB, FD, quæ Curvis in punctis B, D occurrant, habeat FB, ad FD rationem quandam datam. Unde illud etiam conſequetur, ut areis curvarum totis, ſi ſint illæ ex earum genere quæ in orbem redeant, vel partibus earum quæ ordinatis quibuſlibet conjugatis intercipiantur, data quædam ratio intercedat: ea nimirum, quam rectæ, à punctis B D in axem AF ad perpendiculum demiſſæ, inter ſe habent. (Lemma IV. *Cor. H.* 3.) Conjugatas autem ordinatas eas voco, quæ in hujuſmodi curvis ab eodem axis communis puncto eductæ ſunt. Jam per has curvas ABC, ADE ferri intelliguntur corpora, viribus centripetis, quæ centrum S in axe curvarum communi poſitum reſpiciant, ſollicitata; atque eâ quidem lege, ut tempora converſionum integra, ſi curvæ in orbem redeant; aliter verò, ut tempora quibus abſolvuntur ſectores quidam, quibus abſciſſa eſt communis, inter ſe æqualia ſint. A quovis axis puncto educantur ordinatæ conjugatæ FB, FD, & SB, SD jungantur. Jam quod dicit Newtonus hoc eſt. Vim centripetam in loco B eſſe ad vim centripetam in loco D ut SB ad SD. Oſtendimus autem quod Newtonus dicit hoc modo.



Ab alio quovis axis puncto, G, educantur ordinatæ conjugatæ, GC, GE, cum prioribus utique FB, FD parallelæ; junctiſque SC, SE corpora mobilia, ſi è loco A ſimul ea fuerint egreſſa, ſectores orbitæ unumquodque ſuæ, BSC, DSE ſimul deſcripſerint. Hoc enim eâdem argumentatione ac priùs obtinebimus. Ductâ autem rectâ BO, quæ curvam ABC in B contingat, ſi hæc axi AS in O oc-



ad PC ([a]); & L×P*v* ad G*v*P ut L ad G*v*; & G*v*P ad Q*v* *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & (per Corol. 2. Lem. VII.) Q*v* *quad.* ad Q*x* *quad.* punctis Q & P coeuntibus eſt ratio æqualitatis; & Q*x* *quad.* ſeu Q*v* *quad.* eſt ad QT *quad.* ut EP *quad.* ad PF *quad.* ([b]) id eſt, ut CA *quad.* ad PF *quad.* ſive (per Lem. XII.) ut CD *quad.* ad CB *quad.* Et conjunctis his omnibus rationibus, L×QR fit ad QT *quad.* ut AC×L×PC*q*×CD*q*, ſeu 2CB*q*×PC*q*×CD*q* ad PC×G*v*×CD*q*×CB*q*, ſive ut 2PC ad G*v*. Sed, punctis Q & P coeuntibus, æquantur 2PC & G*v*. Ergo & his proportionalia L×QR & QT *quad.* æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet L×SP*q* æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per Corol. 1 & 5. Prop. VI.) vis

O occurrat, juncta OD curvam alteram ADE continget in D. Id enim eiſdem prorſus verbis, quibus antea uſi ſumus, oſtendere licet. Actis igitur à punctis C, E, rectis CH, EK cum illis SB, SD parallelis, quæ rectis OB, OD, in punctis H, K occurrant; vis centripeta in loco B ad vim centripetam in loco D rationem habebit eam, quæ, ſectoribus BSC, DSE infinitè imminutis, evaneſcentium CH, EK ultima inter ipſas erit. Oſtendendum igitur hanc rationem ultimam eam eſſe, quæ eſt rectæ SB ad SD. Acta C*l* ut priùs, cum axe SA parallela, contingenti OB in *l* occurrat. Per *l* ducatur *ln* cum FB parallela; & à puncto *n*, ubi illa *ln* axem ſecat, agatur *nm* parallela cum FD, & occurrat illa *nm* contingenti OD in *m*. Jungatur autem E*m*. Propter rectas *nl*, FB inter ſe parallelas, erit *nl* ad FB ut *n*O ad OF. Atque rurſum propter rectas *nm*, FD inter ſe parallelas, erit *n*O ad OF ut *nm* ad FD. Quare *nl* erit ad FB ut *nm* ad FD. (El. V. 11.) Permutando *nl* ad *nm* ut FB ad FD. Eſt autem, propter illam quæ poſita eſt curvarum ad ſe mutuò affectionem, FB ad FD ut GC ad GE. Erit igitur *nl* ad *nm* ut GC ad GE. (El. V. 11.) Sunt autem *nl*, GC inter ſe æquales, utpote quæ parallelogrammi *n*C ex adverſo ſint latera. Erunt igitur & *nm*, GE inter ſe æquales. (El. V. 14.) Sunt autem parallelæ ex conſtructione. Quare & E*m*, G*n* parallelæ inter ſe & æquales erunt. Propter duas igitur EK, E*m* cum duabus SD, SO parallelas, triangula KE*m*, DSO, ut priùs, inter ſe ſimilia erunt, & EK erit ad E*m* ut SD ad SO. Verùm cùm illa E*m* æqualis ſit rectæ G*n*, etiam illi C*l* æqualis erit. Quare EK erit ad C*l* ut SD ad SO. Sed propter duas CH, C*l* cum duabus SB, SO parallelas, triangula illa HC*l*, BSO, ut priùs, inter ſe ſimilia erunt, & C*l* ad CH ut SO ad SB. Ex æquo igitur EK erit ad CH, ut SD ad SB. Ex quo eodem prorſus modo ac antè colligetur vim centripetam in loco B eſſe ad vim centripetam in loco D ut SB ad SD. Q. E. D.

([a]) Sunt QR, *x*P inter ſe æquales, utpote quæ parallelogrammi P*x*QR adverſa inter ſe ſint latera. Quare QR : P*v* = P*x* : P*v*. Sed propter rectas Q*v*, DC inter ſe parallelas, triangula P*xv*, PEC erunt inter ſe ſimilia, & P*x* : P*v* = PE : PC.

([b]) Angulus rectus QT*x*, recto PFE æqualis. Sed propter rectas Q*x*, PF inter ſe parallelas, anguli Q*x*T, PEF inter ſe æquales erunt. (El. I. 29.) Triangula igitur QT*x*, PFE, inter ſe ſimilia, et Q*x* : QT = PE : PF. (El. VI. 4.) Quare Q*x*² : QT² = PE² : PF². (El. VI. 22.)

centripeta

centripeta reciprocè est ut $L \times SPq$, id est, reciprocè in ratione duplicatâ distantiæ SP. Q. E. I.

Idem aliter.

Cùm vis ad centrum ellipseos tendens, quâ corpus P in ellipsi illâ revolvi potest, sit (per Corol. I. Prop. X.) ut CP distantia corporis ab ellipseos centro C; ducatur CE parallela ellipseos tangenti PR; & vis, quâ corpus idem P circum aliud quodvis ellipseos punctum S revolvi potest, si CE & PS concurrant in E, erit ut $\frac{PE\ cub.}{SPq}$ (c) (per Corol. 3. Prop. VII.) hoc est, si punctum S sit umbilicus ellipseos, ideoque PE detur, ut SPq reciprocè. Q. E. I.

Eâdem brevitate, quâ traduximus Problema quintum ad Parabolam, & Hyperbolam, liceret idem hîc facere: verùm ob dignitatem problematis, & usum ejus in sequentibus, non pigebit casus cæteros demonstratione confirmare.

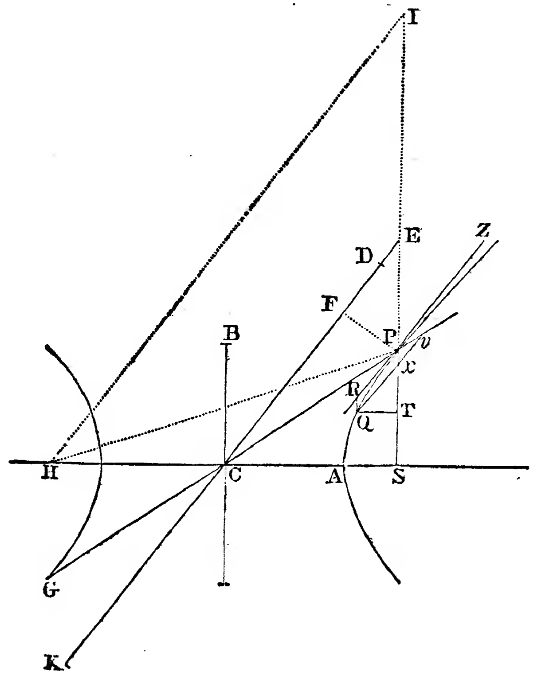
PROP. XII. PROB. VII.

Moveatur corpus in Hyperbolâ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.

Sunto CA, CB semiaxes hyperbolæ; PG, KD diametri aliæ conjugatæ; PF perpendiculum ad diametrum KD; & Qv ordinatim applicata ad diametrum GP. Agatur SP secans cum diametrum DK in E, tum ordinatim applicatam Qv in x, & compleatur parallelogrammum $QRPx$. Patet EP æqualem esse semiaxi transverso AC; eo quòd, actâ ab altero hyperbolæ umbilico H lineâ HI ipsi EC parallelâ, ob æquales CS, CH, æquentur ES, EI; adeo ut EP

(c) NIMIRUM si corpora duo, quorum alterum vi quâdam centrum C, alterum aliâ vi centrum S respiciente perpetim urgeatur, orbem ellipticum ABG eodem tempore absolvant, erit in quovis orbitæ puncto P vis illa quæ centrum C respicit ad vim aliam, punctum S respicientem, ut $CP \times SP^2$ ad EP^3. (Prop. VII. Cor. 3.) Sit Y recta, ad quam semiaxis AC rationem habeat eam, quam vis illa quæ centrum C respicit, in vertice A, ad vim alteram in dato loco P. Et mutato loco P, recta Y eâ semper lege fluat, ut ad semiaxem CA ea semper rationem habeat, quam vis punctum S respiciens, in loco P, ad vim quæ centrum C respicit in loco A. Ita vis illa quæ respicit punctum S semper erit ut recta Y. Jam cùm vis illa quæ centrum C respicit in loco A, ad vim alteram centrum S respicientem in loco P, rationem habeat eam, quæ composita est è ratione, quam vis centrum C in loco A respiciens habet ad vim idem centrum C respicientem in loco P, cum eâ, quam vis centrum C respiciens in loco P habet ad vim alteram centrum S respicientem in eodem loco P, idcirco habebit

EP semidifferentia sit ipsarum PS, PI, id est (ob parallelas IH, PR & angulos æquales IPR, HPZ) ipsarum PS, PH, quarum differentia axem totum 2AC adæquat. Ad SP demittatur perpendicularis QT. Et hyperbolæ latere recto principali (seu $\frac{2BCq}{AC}$) dicto L, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv, seu Px ad Pv, id est (ob similia triangula Pxv, PEC) ut PE ad PC, seu AC ad PC (d). Erit etiam $L \times Pv$ ad $Gv \times Pv$ ut L ad Gv; & (ex naturâ conicorum) rectangulum GvP ad Qv *quad.* ut PCq ad CDq; & (per Corol. 2. Lem. VII.) Qv *quad.* ad Qx *quad.* punctis Q & P coeuntibus fit ratio æqualitatis; & Qx *quad.* seu Qv *quad.* est ad QTq ut EPq ad PFq (e), id est, ut CAq ad PFq, sive (per Lem. XII.) ut CDq ad CBq: & conjunctis his omnibus rationibus $L \times QR$ fit ad QTq ut $AC \times L \times PCq \times CDq$, seu $2CBq \times PCq \times CDq$, ad $PC \times Gv \times CDq \times CBq$, sive ut 2PC



bebit AC ad Y rationem ex eisdem compositam. Harum verò prior ea est, quam AC habet ad PC (Prop. X. Cor. I.) posterior autem ea est, quam solidum $CP \times SP^2$ habet ad cubum ex EP (Prop. VII. Cor. 3.) hoc est, si S umbilicus sit ellipseos, ad cubum ex CA. Habet igitur CA ad Y rationem eam, quæ componitur è rationibus rectæ CA ad CP, solidique $CP \times SP^2$ ad CA^3; sive eam, quæ componitur è rationibus solidi $CA \times SP^2$ ad $CP \times SP^2$, solidique $CP \times SP^2$ ad CA^3. Verùm solidi $CA \times SP^2$ ad CA^3 ex eisdem composita est ratio. Quare CA erit ad Y ut $CA \times SP^2$ ad CA^3; hoc est ut SP^2 ad CA^2. Ergo $Y \times SP^2 = CA^3$. Et $Y = \frac{CA^3}{SP^2}$. Erit igitur Y, ob datum CA^3, ut SP^2 contrariè. Q. E. D.

(d) Vide Not. a.

(e) Vide Not. b.

ad

ad GV. Sed, punctis P & Q coeuntibus, æquantur 2PC & GV. Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & QTq æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $L \times SPq$ æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per Corol. 1 & 5. Prop. VI.) vis centripeta reciprocè eſt ut $L \times SPq$, id eſt, reciprocè in ratione duplicatâ diſtantiæ SP. Q. E. I.

Idem aliter.

Inveniatur vis, quæ tendit ab hyperbolæ centro C. Prodibit hæc diſtantiæ CP proportionalis. Inde verò (per Corol. 3. Prop. VII.) vis ad umbilicum S tendens erit ut $\frac{PE\ cub.}{SPq}$ (f), hoc eſt, ob datam PE, reciprocè ut SPq. Q. E. I.

Eodem modo (g) demonſtratur, quòd corpus, hâc vi centripetâ in centrifugam verſâ, movebitur in hyperbolâ oppoſitâ.

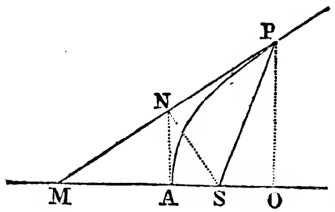
LEMMA XIII.

Latus rectum parabolæ ad verticem quemvis pertinens eſt quadruplum diſtantiæ verticis illius ab umbilico figuræ.

Patet ex conicis (h).

LEMMA XIV.

Perpendiculum, quod ab umbilico parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium eſt proportionale inter diſtantias umbilici à puncto contactûs & à vertice principali figuræ.



Sit enim AP parabola, S umbilicus ejus, A vertex principalis, P punctum contactûs, PO ordinatim applicata ad diametrum principalem, PM tangens diametro principali occurrens in M, & SN linea perpendicularis ab umbilico in tangentem.

(f) Vide Not. c.
(g) Immo eiſdem verbis.
(h) Hamilton. Conic. Lib. II. Prop. xxv. et Cor.

Jungatur AN; &, ob æquales MS & SP, MN & NP, MA & AO, parallelæ erunt rectæ AN & OP; & inde triangulum SAN rectangulum erit ad A, & ſimile triangulis æqualibus SNM, SNP: ergo PS eſt ad SN ut SN ad SA. Q. E. D (k).

Corol. 1. Psq eſt ad SNq ut PS ad SA.

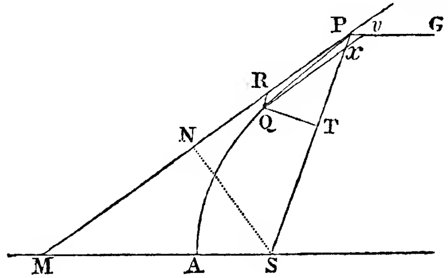
Corol. 2. Et, ob datam SA, eſt SNq ut PS.

Corol. 3. Et concurſus tangentis cujuſvis PM cum rectâ SN, quæ ab umbilico in ipſam perpendicularis eſt, incidit in rectam AN, quæ parabolam tangit in vertice principali.

PROP. XIII. PROB. VIII.

Moveatur corpus in perimetro Parabolæ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.

Maneat conſtructio lemmatis; ſitque P corpus in perimetro Parabolæ, & à loco Q, in quem corpus proximè movetur, age ipſi SP parallelam QR, & perpendicularem QT, necnon Qv tangenti parallelam, & occurrentem tum diametro PG in v, tum diſtantiæ SP in x. Jam ob ſimilia triangula Pxv, SPM, & æqualia unius latera SM, SP, æqualia ſunt alterius latera Px, ſeu QR, & Pv. Sed, ex conicis, quadratum ordinatæ Qv æquale eſt rectangulo ſub latere recto & ſegmento diametri Pv, id eſt (per Lem. XIII.) rectangulo $4PS \times Pv$, ſeu $4PS \times QR$; & punctis P & Q coeuntibus, ratio Qv ad Qx (per Corol. 2. Lem. VII.) fit ratio æqualitatis. Ergo



Qx *quad.* eo in caſu æquale eſt rectangulo $4PS \times QR$. Eſt autem (ob ſimilia triangula QTx, SPN) Qxq ad QTq ut PSq ad SNq, hoc eſt (per Corol. 1. Lem. XIV.) ut PS ad SA, id eſt, ut $4PS \times QR$ ad $4SA \times QR$, & inde (per Prop. IX. Lib. V. Elem.) QTq & $4SA \times QR$ æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ æquale $SPq \times 4SA$: & propterea (per Corol. 1 & 5. Prop.

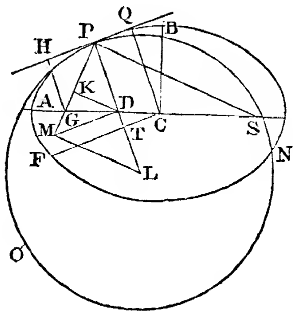
(k) Eſt hæc Propoſitio triceſima Libri ſecundi Conicorum Hamiltoni.

De Motu Corporum

vi.) vis centripeta eſt reciprocè ut $SPq \times 4SA$; id eſt, ob datam $4SA$ reciprocè in duplicatâ ratione diſtantiæ SP. Q. E. I.

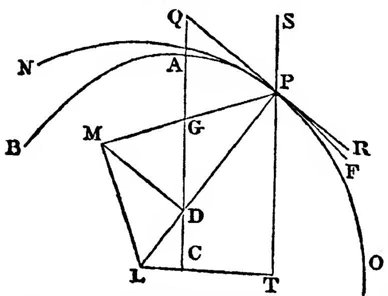
Corol. 1. Ex tribus noviſſimis propoſitionibus conſequens eſt, quòd ſi corpus quodvis P ſecundum lineam quamvis rectam PR quâcunque cum velocitate exeat de loco P, & vi centripetâ, quæ ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ locorum à centro, ſimul

(l) LEMMA II. (H.)



Sit ſectio quævis conica APB, quam in P puncto circulus OPN oſculetur. Hujus circuli centrum ſit L; junctaque LP axi ſectionis conicæ, CA, tranſverſo quidem ſi ſectio Ellipſis ſit vel Hyperbola, in puncto D occurrat. Sit G umbilicus ſectionis conicæ, & in junctam PG, à puncto L, deducatur ad perpendiculum recta LM. Denique jungatur MD. Dico hanc MD illam LP ad perpendiculum inſiſtere; hoc eſt, angulos MDP, MDL rectos eſſe. Si curva FAB Ellipſis ſit vel Hyperbola, ſit C ejus centrum, et CB dimidium axis ſecundi; ab umbilico G in rectam PH, quæ curvam FAB, circulumque NPO in puncto P contingit, agatur ad perpendiculum recta GH. A puncto D in rectam PG agatur ad perpendiculum recta DK. Per C centrum ſectionis conicæ agantur CQ, CF cum rectis DP, PH parallelæ; quarum illa CQ rectæ PH in Q, altera CF rectæ DP in T, ſectioni conicæ in F, occurrat. Rectangulum $LP \times CQ$ quadrato ex CF æquale eſt (Hamilton. Conic. Lib. v. 18. Cor.) et rectangulum $DP \times CQ$ quadrato ex CB eſt æquale. (Hamilton. Conic. Lib. ii. 22.) Erit igitur quadratum ex CF ad quadratum ex CB ut rectangulum $LP \times CQ$ ad $DP \times CQ$, hoc eſt ut LP ad PD. Sed quadratum ex CF eſt ad quadratum ex CB ut quadratum ex GP ad quadratum ex GH (Hamilton. Conic. Lib. II. 31.) Et quadratum ex GP eſt ad quadratum ex GH ut quadratum ex DP ad quadratum ex PK. (Eſſe enim GP ad GH ut DP ad PK id in Lemmate noſtro primo demonſtrando jam antè oſtendimus.) Quare LP erit ad PD ut quadratum ex DP ad quadratum ex PK (El. v. 11.) Sed propter angulos DKP, LMP rectos, rectæ DK, LM erunt inter ſe parallelæ. Quapropter quadratum ex DP erit ad quadratum ex PK ut quadratum ex LP ad quadratum ex PM. Erit igitur $LP : PD = LP^2 : PM^2$ (El. v. 11.) Ac propterea $LP : PM = PM : PD$. Triangula igitur LPM, MPD inter ſe ſimilia erunt, angulique LMP, PDM inter ſe æquales (El. vi. 6.) Sed angulus LMP rectus; talis enim factus eſt. Quare & MDP rectus. Q. E. D.

Si Parabola ſit ſectio conica FAB, axis ejus CA productus contingenti PR in Q occurrat, & per P ducatur TPS diameter parabolæ. Anguli QPG, QPS ſunt inter ſe æquales (Hamilton. Conic. Lib. II. 15.) Quare & angulus GPD, qui cum illo QPG rectum conficit, æqualis erit angulo DPT, qui cum TPR, illi QPS æquali, rectum etiam conficit. A puncto L in diametrum PT ad perpendiculum demittatur LT. In triangulis rectangulis LMP, LTP, anguli acuti MPL, TPL (GPD, TPD) oſtenſi ſunt inter ſe æquales. Quare & acuti reliqui, MLP, PLT, inter ſe æquales erunt. Sed latus LP, acutis contiguum, duobus triangulis commune eſt. Quare reliqua hujus latera reliquis alterius æqualia erunt, ea utique ſingulatim conferendo, quæ anguli æquales ex adverſo ſpectant. Quare rectæ PM, PT erunt inter ſe æquales. Sed PT æqualis eſt dimidio parametri ad diametrum PT pertinentis; nempe cùm ex circuli naturâ, PT ſemiſſis ſit partis illius diametri SP quam circulus



NPO

Liber Primus.

ſimul agitetur; movebitur hoc corpus in aliquâ ſectionum conicarum umbilicum habente in centro virium; & contrà. Nam datis umbilico, & puncto contactûs, & poſitione tangentis, deſcribi poteſt ſectio conica, quæ curvaturam datam ad punctum illud habebit (l). Datur autem curvatura ex datâ vi centripetâ, & velocitate corporis (m): & orbes duo ſe mutuò tangentes eâdem

NPO abſcindit; quæ pars diametri SP parametro illi æqualis eſt. (Hamilton. Conic. Lib. v. 17.) Recta igitur PM ſemiſſis erit parametri ad diametrum SPT pertinentis, ac proinde rectæ DQ æqualis. (Hamilton. Conic. Lib. II. 25.) Sed triangulis duobus MPD, QDP latus PD eſt commune. Latera igitur duo MP, PD, duobus QD, DP æqualia. Angulus autem illius MPD, hujus angulo QDP eſt æqualis. Nam propter rectas DQ, TP parallelas, angulus QDP æqualis eſt angulo TPD (El. I. 29.) cui etiam MPD oſtenſus eſt æqualis. Reliqui igitur triangulorum illorum MPD, QDP anguli inter ſe æquales erunt, conferendo utique quos latera æqualia ex adverſo ſpectant. Angulus igitur MDP angulo QPD æqualis. Rectus autem QPD. Quare & MDP rectus. Q. E. D.

DE PARABOLA ALITER.

Circulus, centro D, radio DP ſcriptus, parabolam in duobus punctis contingeret. Nimirum in P, & in alterâ extremitate rectæ à puncto illo P ad axem ordinatim ductæ. Quare cùm MP dimidio parametri, ad diametrum SP pertinentis, æqualis ſit, erit LP ad PM ut PM ad PD (Hamilton. Conic. Lib. v. 17. Cor.) Triangula igitur LPM, MPD inter ſe ſimilia erunt, et angulus MDP angulo LMP æqualis. Rectus igitur MDP, cùm LMP factus fuerit rectus. Q. E. D.

His autem oſtenſis, facilis erit demonſtratio ejus quod Newtonus dixit, " Datis umbilico, & puncto contactûs & poſitione tangentis, deſcribi poſſe ſectionem conicam, quæ curvaturam datam ad punctum illud habebit."

Circulus enim magnitudine & poſitione datus NPO, ſectionem quandam conicam ABF, cujus umbilicus G detur, in dato puncto P oſculetur; dico ſectionem conicam ABF poſitione datam eſſe. Sit L centrum circuli NPO, CA axis ſectionis conicæ ABF, qui, ſi ſectio illa Ellipſis ſit vel Hyperbola, tranſverſus ſit. Jungantur LP, GP, quarum LP axi CA in D occurrat. Ab L in rectam GP ad perpendiculum deducatur LM, & MD jungatur. Jam propter puncta P, G data, recta PG poſitione data eſt. Et propter circulum NPO magnitudine & poſitione datum, centrum ejus L datum eſt. Recta igitur LM, à dato puncto L in rectam PG poſitione datam ad perpendiculum deducta, poſitione ipſa dabitur (Dat. 30.) Punctum igitur M datum (Dat. 25.) Sed angulus MDP rectus eſt (Lemma II. H.) Recta igitur MD, à dato puncto M in rectam poſitione datam PL ad perpendiculum deducta, poſitione ipſa dabitur (Dat. 30.) Punctum igitur D datum (Dat. 25.) Sed G datum. Id enim poſitum eſt. Recta igitur GD, quæ eſt axis ſectionis conicæ, poſitione data eſt (Dat. 26). Actaque PH, quæ datum circulum NPO in dato puncto P contingat, poſitione dabitur, & ſectionem conicam in puncto P continget. Jam ſi Parabola ſit ſectio conica, quam circulus NPO in loco P oſculetur, cùm umbilicus ejus datus ſit, & axis poſitione datus, et cùm rectam poſitione datam in dato puncto ea contingat, poſitione ipſa data erit. Id enim ex elementis conicis ſatis patet. Quòd ſi ſectio illa, quam circulus NPO in P oſculetur, Ellipſis ſit vel Hyperbola, ſit S umbilicus ejus alter, & jungatur PS. Anguli GPH, SPQ, quos rectæ PG, PS ad umbilicos ductæ cum contingente HPQ faciunt, inter ſe æquales erunt. (Hamilton. Conic. Lib. II. 16 & 17.) Quare anguli DPG, DPS, qui cum æqualibus illis rectos ſingulatim conficiunt, inter ſe æquales ſunt. Sed, propter rectas GP, PD poſitione datas, angulus GPD datus eſt. Quare DPS datus. Recta igitur PS, quæ à dato puncto P, datâ inclinatione ad rectam PD poſitione datam eſt educta, hæc PS poſitione & ipſa dabitur. (Dat. 29.) Sed recta GD poſitione data. Quare punctum S datum. (Dat. 25.) Sectionis igitur conicæ ABF umbilicus uterque datus, & rectam PH, poſitione datam, in dato puncto illa tangit. Poſitione igitur & ipſa data eſt Q. E. D.

(m) Ea ſit corporis velocitas in dato loco P, quâ, dato quodam tempore, rectam magnitudine & poſitione datam PQ conficeret; & ea in loco P ſit vis centripeta, quâ corpus eodem temporis ſpatio æquabiliter incitatum, motu accelerato ſpatium datum QA conficeret, dummodo recta QA cum directione vis centripetæ in loco P parallela ſit. Et ducatur parabola BAP, cujus diametri

cum

DE MOTU CORPORUM

dem vi centripetâ eâdemque velocitate deſcribi non poſſunt.

Corol. 2. Si velocitas, quâcum corpus exit de loco ſuo P, ea ſit, quâ lineola PR in minimâ aliquâ temporis particulâ deſcribi poſſit; & vis centripeta potis ſit eodem tempore corpus idem movere per ſpatium QR: movebitur hoc corpus in conicâ aliquâ ſectione, cujus latus rectum principale eſt quantitas illa $\frac{QTq}{QR}$, quæ ultimò fit, ubi lineolæ PR, QR in infinitum diminuuntur. Circulum in his corollariis refero ad Ellipſin; & caſum excipio, ubi corpus rectâ deſcendit ad centrum.

PROP. XIV. THEOR. VI.

Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta ſit reciprocè in duplicatâ ratione diſtantiæ locorum à centro; dico, quòd orbium latera recta principalia ſunt in duplicatâ ratione arearum, quas corpora, radiis ad centrum ductis, eodem tempore deſcribunt.

Nam (per Corol. 2. Prop. XIII.) latus rectum L æquale eſt quantitati

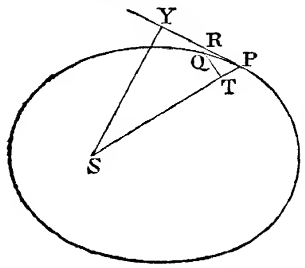
cum rectâ QA ſint parallelæ, quæque rectam PQ in P contingat, & per datum punctum A tranſeat. Hæc parabola poſitione dabitur; & cùm corpus è loco P cum velocitate illâ, quam poſuimus, diſcedens, per hanc parabolam incederet, ſi vis centripeta eadem maneret, & ſecundum rectas cum illâ QA parallelas ſemper ageret; idcirco hujus parabolæ eadem erit, quæ orbitæ, per quam corpus fertur, in loco P curvatura. Hoc eſt idem circulus curvam utramque, parabolam & orbitam, in loco P oſculabitur. Circulus autem, qui parabolam ABF poſitione datam, in dato puncto P oſculatur, magnitudine & poſitione ipſe datus erit. Circulus igitur qui orbitam in loco P oſculatur magnitudine & poſitione datus. Q. E. D. *(Eadem fere Le Sœur & Jacquier.)*

(n) DEMONSTRATIO NEWTONI EXPLICATIOR FACTA.

CORPORA duo ferri intelligantur circa centrum commune S, urgentibus viribus quæ centrum illud S reſpiciant, quæque ſint ſemper inter ſe ut quadrata diſtantiarum à centro illo contrariè ſumpta. Corpora igitur in orbibus conicis ferentur, quorum S umbilicus erit. Sint orbes illi APB, *apb*, et ſint PSQ, *psq* orbium ſectores quidam, qui motu corporum ſimul deſcribuntur. Dicit Newtonus orbium APB, *apb* latera recta rationem inter ſe habere, arearum PSQ, *psq* duplicatam. Sint L, *l*, orbium APB, *apb*, latera recta. Cùm ſectores PSQ, *psq*, ſimul deſcribantur; propter æquabilem arearum circa centrum S deſcriptionem, eadem ſemper ſectoribus illis inter ipſos ratio erit, quæcunque fuerint illorum magnitudines. Eadem igitur illis ſemper manet, quæ naſcentium prima fuit. Prima autem naſcentium fuit, quæ rectangulorum $SP \times QT$, $sp \times qt$ naſcentium prima. Oſtendendum igitur L ad *l* rationem habere eam, quæ compoſita eſt è ratione quadrati ex SP ad quadratum ex *sp*, & ratione primâ quadrati è naſcente QT ad quadratum è naſcente *qt*. Sed per Corollarium 2. Prop. XIII. coeuntibus punctis Q, P, $QT^2 = L \times QR$; & coeuntibus punctis *q*, *p*, $qt^2 = l \times qr$. Quare $L \times QR : l \times qr = QT^2 : qt^2$, ultimò ſcilicet, arcubus PQ, *pq* infinitè imminutis. Sed $l \times qr : l \times QR = qr : QR$. Quare ex æquo $L \times QR$ ad $l \times QR$, ſive L ad *l*, rationem habet eam, quæ compoſita eſt è ratione primâ quadrati è naſcente QT ad quadratum è naſcente *qt*, & ratione naſcentis *qr* ad naſcentem QR. Sed cùm ſectores PSQ, *psq*, ſimul deſcribuntur, ea erit naſcentis *qr* ad naſcentem QR prima ratio, quæ vis centripetæ in loco *p* ad vim centripetam in loco P; ſive quæ quadrati ex SP ad quadratum ex *sp*. Ratio igitur L ad *l* compoſita

LIBER PRIMUS.

quantitati $\frac{QTq}{QR}$, quæ ultimò fit, ubi coeunt puncta P & Q. Sed linea minima QR, dato tempore, eſt ut vis centripeta generans, hoc eſt (per hypotheſin) reciprocè ut SPq. Ergo $\frac{QTq}{QR}$ eſt ut $QTq \times SPq$; hoc eſt, latus rectum L in duplicatâ ratione arcæ $QT \times SP$ (n). Q. E. D.



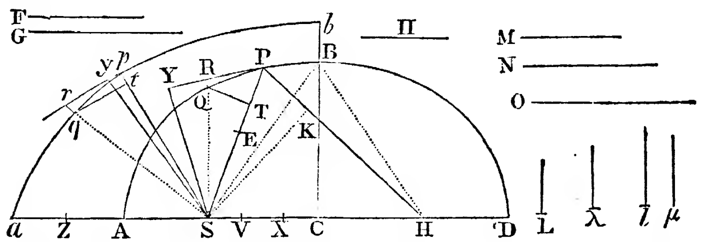
Corol. Hinc Ellipſeos area tota, eique proportionale rectangulum ſub axibus, eſt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione lateris recti, & ratione temporis periodici. Namque area tota eſt ut area $QT \times SP$, quæ dato tempore deſcribitur, ducta in tempus periodicum (o).

PROP. XV. THEOR. VII.

Iiſdem poſitis, dico quòd tempora periodica in Ellipſibus ſunt in ratione ſeſquiplicatâ majorum axium (p).

Namque axis minor eſt medius proportionalis inter axem majorem & latus rectum; atque ideo rectangulum ſub axibus eſt in

compoſita eſt è ratione primâ quadrati è naſcente QT ad quadratum è naſcente *qt*, & ratione quadrati ex SP ad quadratum ex *sp*. Atque hæc eſt arearum quæ ſimul conficiuntur duplicata ratio. Q. E. D.



(o) ORBES conici APB, *apb* Ellipſes ſint, quarum centrum C, ſemiaxes tranſverſi CA, C*a*, ſecundi CB, C*b*. Ellipſeos APB area ſignificetur literâ A; alterius *apb*, literâ *a*. Sint rectæ M, N, quarum M habeat ad N proportionem eam, quam tempus converſionis in Ellipſi APB ad tempus converſionis in Ellipſi *apb*: & capiatur λ, quæ laterum rectorum, L, *l* proportione media ſit. Dicit Newtonus eſſe A ad *a*, ut $M \times L$ ad $N \times \lambda$.

Capiatur recta Π, quæ ſit ad M ut tempus quo conficiuntur ſectores PQS, *pqs*, ad tempus converſionis in ellipſi APB. Eadem Π erit ad N ut tempus quo conficiuntur ſectores illi PQS, *pqs* ad tempus converſionis in ellipſi alterâ *apb*. Jam area A erit ad ſectorem PQS ut M ad Π, ſive ut $M \times L$ ad $\Pi \times L$ (Prop. I.) Sed ſector PQS ad ſectorem *pqs* ut L ad λ (per Prop. XIV.) ſive ut $\Pi \times L$ ad $\Pi \times \lambda$. Et ſector *pqs* ad aream *a* ut Π ad N (Prop. I.) ſive ut $\Pi \times \lambda$ ad $N \times \lambda$. Ex æquo igitur area A ad aream *a* ut $M \times L$ ad $N \times \lambda$. Q. E. D.

(p) Sive rationem axium majorum triplicatam temporum duplicatam eſſe.

ratione

De Motu Corporum

ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione lateris recti & ſeſquiplicatâ ratione axis majoris. Sed hoc rectangulum (per Corol. Prop. XIV.) eſt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione lateris recti & ratione periodici temporis. Dematur utrobique ſubduplicata ratio lateris recti, & manebit ſeſquiplicata ratio majoris axis eadem cum ratione periodici temporis. Q. E. D [q].

Corol. Sunt igitur tempora periodica in Ellipſibus eadem ac in Circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus Ellipſeon.

PROP. XVI. THEOR. VIII.

Iiſdem poſitis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant orbitas, demiſſiſque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico, quòd velocitates corporum ſunt in ratione compoſitâ ex ratione perpendiculorum inverſè, & ſubduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè.

Ab umbilico S ad tangentem PR demitte perpendiculum SY, & velocitas corporis P erit reciprocè in ſubduplicatâ ratione quantitatis $\frac{SYq}{L}$. Nam velocitas illa eſt ut arcus quàm minimus PQ in datâ

[q] Demonstratio Newtoni explicatior facta.

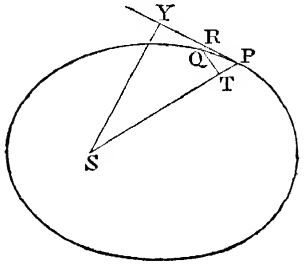
Capiatur O cum duabus M, N, proportione tertia; capiantur etiam CV, CX, ut CA habeat ad CV, & CV ad CX rationem quam Ca ad CA. Oſtendendum eſt eſſe O ad M ut Ca ad CX. Capiatur μ, ad quam λ proportionem habeat quam M ad N. Jam cùm ſit $M : N = \lambda : \mu$, erit rectangulum $M \times L$ ad rectangulum $N \times L$ ut λ ad μ. Sed rectangulum $N \times L$ eſt ad rectangulum $N \times \lambda$ ut L ad λ. Erit igitur ex æquo perturbatè, $M \times L$ ad $N \times \lambda$ ut L ad μ. Sed $M \times L : N \times \lambda = CA \times CB : Ca \times cb$ (Prop. XIV. Cor.) Ergo $CA \times CB : Ca \times cb = L : \mu$. Hoc eſt, ratio rectæ L ad μ componitur è rationibus rectæ CA ad Ca, rectæque CB ad cb. Quare quadratum ex L ad quadratum ex μ rationem habebit eam, quæ componetur è ratione quadrati ex CA ad quadratum ex Ca, quadratique ex CB ad quadratum ex cb. Sed propter continuam rectarum Ca, CA, CV analogiam, erit quadratum ex CA ad quadratum Ca ut CV ad Ca. Et quadratum ex CB eſt ad quadratum ex cb ut rectangulum $CA \times L$ ad rectangulum $Ca \times l$. (Nam hæc rectangula quadratorum illorum dupla ſunt). Quadratum igitur ex L ad quadratum ex μ rationem habebit eam, quæ componetur è rationibus rectæ CV ad Ca rectangulique $CA \times L$ ad rectangulum $Ca \times l$; ſive eam, quæ eſt ſolidi $CV \times CA \times L$ ad ſolidum $Ca^2 \times l$. Eſt autem quadratum ex L ad quadratum ex μ, ut ſolidum $L^2 \times l$ ad ſolidum $\mu^2 \times l$. Quare $L^2 \times l : \mu^2 \times l = CV \times CA \times L : Ca^2 \times l$. Permutando, rectangulum $L \times l$ ad rectangulum $CV \times CA$ ut quadratum ex μ ad quadratum ex Ca. Hoc eſt, cùm $L \times l = \lambda^2$, $\lambda^2 : CV \times CA = \mu^2 : Ca^2$. Permutando $\lambda^2 : \mu^2 = CV \times CA : Ca^2$. Sed $\lambda^2 : \mu^2 = M^2 : N^2 = M : O$ (ex conſtruct.) Quare M habet ad O proportionem eam, quam rectangulum $CV \times CA$ ad quadratum ex Ca; ſive eam, quæ compoſita eſt è rationibus rectæ CV ad Ca rectæque CA ad Ca; ſive è rationibus rectæ CX ad CA (eſt enim $CV : Ca = CX : CA$ ex conſtruct.) rectæque CA ad Ca. Sed ratio rectæ CX ad Ca ex eiſdem eſt compoſita. Quare $M : O = CX : Ca$. Invertendo $O : M = Ca : CX$. Q. E. D.

[r] Demonstratio Newtoni explicatior facta.

Sint rectæ F, G, quarum F ſit ad G ut velocitas corporis in orbe APB lati, in loco P, ad velocitatem

Liber Primus.

datâ temporis particulâ deſcriptus, hoc eſt (per Lem. VII.) ut tangens PR; id eſt, ob proportionales PR ad QT & SP ad SY, ut $\frac{SP \times QT}{SY}$,



ſive ut SY reciprocè & $SP \times QT$ directè; eſtque $SP \times QT$ ut area dato tempore deſcripta, id eſt (per Prop. XIV.) in ſubduplicatâ ratione lateris recti. Q. E. D [r].

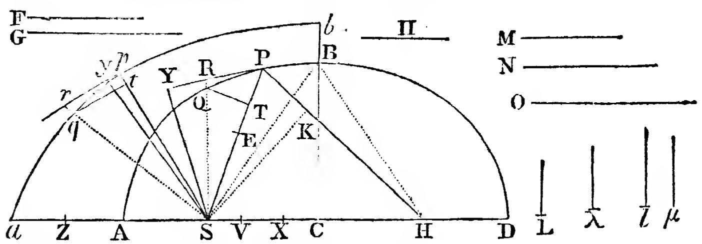
Corol. 1. Latera recta principalia ſunt in ratione compoſitâ ex duplicatâ ratione perpendiculorum, & duplicatâ ratione velocitatum [s].

Corol. 2. Velocitates corporum, in maximis & minimis ab umbilico communi diſtantiis, ſunt in ratione compoſitâ ex ratione diſtantiarum inverſè, & ſubduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè. Nam perpendicula jam ſunt ipſæ diſtantiæ [t].

Corol.

tem corporis in orbe altero *apb* lati, in loco *p*. In tangentes PY, *py* demiſſis ad perpendiculum rectis SY, *sy*, dicit Newtonus F eſſe ad G ut $L \times sy$ ad $\lambda \times SY$. Nam cùm ſectores PSQ, *psq* ſimul deſcribantur, erit F ad G ut PQ ad *pq*; ultimò utique, arcubus PQ, *pq* infinitè imminutis. Erit autem PQ ad *pq* ut PR ad *pr* ultimò (Lemma VII.) Quare $F : G = PR : pr$ ultimò. Ac proinde $F \times SY : G \times SY = PR : pr = SY \times PR : SY \times pr$ ultimò.

Sed $G \times SY : G \times sy = SY : sy = SY \times pr : sy \times pr$. Ex æquo igitur $F \times SY : G \times sy = SY \times PR : sy \times pr$;



ultimò ſcilicet arcubus QP, *qp* infinitè imminutis. Sed illa $SY \times PR$, $sy \times pr$, illis $SP \times QT$, $sp \times qt$ ultimò ſunt æqualia. Quare $F \times SY : G \times sy = SP \times QT : sp \times qt$ ultimò. Et $SP \times QT : sp \times qt$ ultimò $= L : \lambda$ (Prop. XIV.) Quare $F \times SY : G \times sy = L : \lambda = L \times sy : \lambda \times sy$. Et $G \times sy : G \times SY = sy : SY = \lambda \times sy : \lambda \times SY$. Quare ex æquo $F : G = L \times sy : \lambda \times SY$: Q. E. D.

[s] Nam oſtenſum eſt eſſe $F \times SY : G \times sy = L : \lambda$. Habet igitur L ad λ rationem eam, quæ componitur è ratione rectæ F ad G rectæque SY ad *sy*. Quadratum igitur ex L ad quadratum ex λ rationem habebit eam, quæ componitur è rationibus quadrati ex F ad quadratum ex G, & quadrati ex SY ad quadratum ex *sy*. Et ratio rectæ L ad *l*, cùm eadem ſit illa quæ quadrati ex L ad quadratum ex λ, ex eiſdem utique componetur. Ratio igitur rectæ L ad *l* componetur è rationibus quadrati ex F ad quadratum ex G, quadratique ex SY ad quadratum ex *sy*. Q. E. D.

[t] Punctis utique P, *p* in puncta A, *a*, qui vertices ſunt orbium, tranſlatis, rectæ SY, *sy* illis

SA,

Corol. 3. Ideoque velocitas in conicâ ſectione, in maximâ vel minimâ ab umbilico diſtantiâ, eſt ad velocitatem in Circulo, in eâdem à centro diſtantiâ, in ſubduplicatâ ratione lateris recti principalis ad duplam illam diſtantiam ([u]).

Corol. 4. Corporum in Ellipſibus gyrantium velocitates, in mediocribus diſtantiis ab umbilico communi, ſunt eædem, quæ corporum gyrantium in Circulis ad eaſdem diſtantias; hoc eſt (per Corol. 6. Prop. IV.) reciprocè in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum. Nam perpendicula jam ſunt ſemi-axes minores, & hi ſunt ut mediæ proportionales inter diſtantias & latera recta. Componatur hæc ratio inverſe cum ſubduplicatâ ratione laterum rectorum directè, & fiet ratio ſubduplicata diſtantiarum inverſè ([x]).

Corol. 5. In eâdem figurâ, vel etiam in figuris diverſis, quarum latera recta principalia ſunt æqualia, velocitas corporis eſt reciprocè ut perpendiculum demiſſum ab umbilico ad tangentem.

Corol.

SA, *sa* ſingulatim evadunt æquales. Igitur, quando hoc evenerit, cùm ſit ſemper, $F : G = L \times sy : \lambda \times SY$, erit $F : G = L \times sa : \lambda \times SA$.

(u) PUTA orbem conicum *apb* *(vide fig. text. p. 85)* in alium mutari; qui, manente umbilico S, orbem APB in vertice communi, A, contingat. Ita æquales fient *sa*, SA; & cum F ſemper ſit ad G ut $L \times sa$ ad $\lambda \times SA$, (modò illæ F, G inter ſe rationem gerant, quam velocitates corporum in orbium conicorum verticibus) idcirco æquatis jam *sa*, SA, fiet $F : G = L : \lambda$. Et qualiſcunque ſit orbis ille conicus, quem alterum APB in vertice A contingere poſuimus, dummodo umbilicum S verticemque A utrumque cum orbe APB communem illc habeat, manebit ea quæ expoſita eſt proportionum ſimilitudo; $F : G = L : \lambda$. Circulus igitur ſit orbis ille conicus, qui orbem APB in A contingat, cui circulo centrum ſit S, radius SA. Circulus ille pro Ellipſi haberi poteſt, cujus umbilicus S, latus autem rectum *l* tranſverſo 2SA æquale. Jam verò, vi formulæ generalis, F erit ad G ut L ad λ. Sed cùm illa λ duarum L, *l* proportione ſit media, quarum *l* jam ſit æqualis illi 2SA, erit λ duarum L, 2SA proportione media. Quare F ad G proportionem habet, quam L ad eam quæ duarum L, 2SA proportione eſt media; ſive proportionem duarum L, 2SA ſubduplicatam. Q. E. D.

(x) SINT APB, *apb* Ellipſes, *(vide fig. text. p. 85)* quarum ſemiaxes ſecundi CB, *cb*: punctiſque P, *p* ad B, *b*, vertices axium ſecundorum tranſlatis, SY, *sy*, ſemiaxibus CB, *cb* æquales fient. Ac proinde, cùm ſit ſemper $F : G = L \times sy : \lambda \times SY$, fiet $F : G = L \times cb : \lambda \times CB$. Quadratum igitur ex F ad quadratum ex G rationem habebit eam, quæ componitur è rationibus quadrati ex L ad quadratum ex λ, quadratique ex *cb* ad quadratum ex CB. Harum autem prior ea eſt, quam L habet ad *l*, ſive rectangulum $ca \times L$ ad rectangulum $ca \times l$; poſterior, quam rectangulum $ca \times l$ habet ad rectangulum $CA \times L$. Ex his autem rationibus rectanguli $ca \times L$ ad rectangulum $CA \times L$, ſive rectæ *ca* ad rectam CA, compoſita eſt ratio. Quadrati igitur ex F ad quadratum ex G ex eiſdem iliis ac rectæ *ca* ad rectam CA compoſita eſt ratio. Quare $F^2 : G^2 = ca : CA = sb : SB$. Hoc eſt F ad G rationem habebit ipſarum *sb*, SB ſubduplicatam. Manebit autem ſemper hæc proportionum ſimilitudo, quæcunque fuerint Ellipſeon APB, *Apb* vel ſpecies, vel magnitudines. Manebit igitur ſi Ellipſeon altera, puta *apb*, in Circulum migraverit, centro utique S, radio SB, ſcriptum. Ita verò *sb*, SB æquales fient. Quare & F, G inter ſe æquales. Eædem igitur in Ellipſibus, in mediocribus diſtantiis, quæ in Circulis, ad eaſdem diſtantias, velocitates. Q. E. D.

(y) Ha-

Corol. 6. In Parabolâ velocitas eſt reciprocè in ſubduplicatâ ratione diſtantiæ corporis ab umbilico figuræ; in Ellipſi magis variatur, in Hyperbolâ minùs quàm in hâc ratione. Nam (per Corol. 2. Lem. XIV.) perpendiculum demiſſum ab umbilico ad tangentem Parabolæ eſt in ſubduplicatâ ratione diſtantiæ. In Hyperbolâ perpendiculum minùs variatur, in Ellipſi magis ([y]).

Corol. 7. In Parabolâ velocitas corporis, ad quamvis ab umbilico diſtantiam, eſt ad velocitatem corporis revolventis in Circulo, ad eandem à centro diſtantiam, in ſubduplicatâ ratione numeri binarii ad unitatem; in Ellipſi minor eſt, in Hyperbolâ major quàm in hâc ratione. Nam per hujus corollarium ſecundum ([z]) velocitas in vertice Parabolæ eſt in hâc ratione, & per corollaria ſexta hujus & propoſitionis quartæ ſervatur eadem proportio in omnibus diſtantiis ([aa]). Hinc etiam in Parabolâ velocitas ubique æqualis

(y) Hamilton. Conic. Lib. 2. Prop. XXXI. Cor. 2.

(z) Tertium potius.

(aa) PUTA orbem conicum APB Parabolam eſſe. Hanc Circulus, centro S, radio SA ſcriptus, in vertice A contingat *(vide fig. text, p. 85)*. Et ſit F ad G ut velocitas corporis in Parabolâ lati, in vertice ejus, ad velocitatem corporis in hoc Circulo circumacti. Sit L latus rectum Parabolæ, & ſumatur λ, duarum L, 2SA proportione media. Erit $F : G = L : \lambda$ (Cor. 3.) Sed $L = 4SA$ (Hamilton. Conic. Lib. II. Def. 3.) Quare $L : 2SA = 4 : 2 = 2 : 1$. Hoc eſt, $L^2 : \lambda^2 = 2 : 1$. Et $L : \lambda = \sqrt{2} : 1$. Habet igitur F ad G, ſive velocitas corporis in Parabolâ lati in vertice A, ad velocitatem corporis in Circulo ad diſtantiam SA circumacti, rationem binarii ad unitatem ſubduplicatam. Velocitas autem corporis in Parabolâ lati, in vertice A, ad velocitatem corporis ejuſdem in alio quovis Parabolæ loco, P, rationem habet rectæ SP ad SA ſubduplicatam (Cor. 6.) Et corporum, quæ, circum idem centrum S, ad diſtantias SA, SP, in Circulis circumagantur, eadem erit velocitatum ratio; modò corpora illa in Circulo unumquodque ſuo eiſdem viribus centrum S reſpicientibus, quibus corpus prius in Parabolâ, retineantur (Prop. IV. Cor. 6.) Quare velocitas in Parabolâ in loco P ad velocitatem corporis in Circulo circum centrum S, ad diſtantiam SP circumacti, eandem rationem habebit, quam velocitas in vertice Parabolæ A ad velocitatem corporis in Circulo circum centrum S, ad diſtantiam SA circumacti; ſive eam, quæ binarii ad unitatem ſubduplicata eſt.

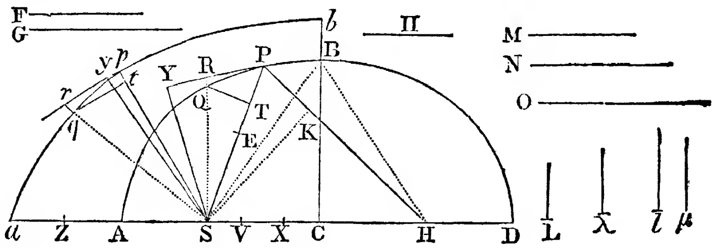
Jam verò Ellipſis ſit orbis APB, quam Circulus, centro S, radio SA ſcriptus, in vertice A contingat. Et ſit F ad G ut velocitas corporis in Ellipſi in vertice A ad velocitatem in Circulo; & ſit L latus rectum Ellipſeos; λ, duarum L, 2SA proportione media. Erit igitur $F : G = L : \lambda$ (Cor. 3.) Sed L minor erit quàm 4SA (Hamilton. Conic. Lib. II. 9 et 26.) Quare L minor erit, quàm ut habeat ad 2SA rationem eam quam 4 ad 2, vel 2 ad 1. Ac proinde quadratum ex L minus, quàm ut habeat ad quadratum ex λ rationem eam quàm 2 ad 1. Unde rurſum L minor quàm ut habeat ad λ rationem eam quam $\sqrt{2}$ ad 1. Quare & F minor, quàm ut habeat ad G rationem eam quam $\sqrt{2}$ ad 1. Jam capiatur punctum quodvis in Ellipſi, P; & ſit *f* ad F ut velocitas corporis per Ellipſin, circum umbilicum S, circumacti, in loco P, ad velocitatem ejuſdem corporis in vertice A. Et ſit *g* ad G ut velocitas corporis, quod, circum centrum S, ad diſtantiam SP, in circulo circumagatur, ad velocitatem corporis circum S ad diſtantiam SA in circulo circumacti; viribus utique eiſdem corpora in Ellipſi & in Circulis retinentibus. Ita erit *f* ad *g* ut velocitas in Ellipſi, in loco P, ad velocitatem corporis circum centrum S, ad diſtantiam SP, in Circulo circumacti. Jam *f* minor erit, quàm ut habeat ad F rationem rectæ SA ad SP ſubduplicatam. (Cor. 6.) Sed *g* ad G proportio-

nem

æqualis eſt velocitati corporis revolventis in Circulo ad dimidiam diſtantiam, in Ellipſi minor eſt, in Hyperbolâ major [bb].

Corol. 8. Velocitas gyrantis in ſectione quâvis conicâ eſt ad velocitatem gyrantis in Circulo, in diſtantiâ dimidii lateris recti principalis ſectionis, ut diſtantia illa ad perpendiculum ab umbilico in tangentem ſectionis demiſſum. Patet per corollarium quintum [cc].

Corol. 9. Unde cùm (per Corol. 6. Prop. IV.) velocitas gyran-



tis in hoc circulo ſit ad velocitatem gyrantis in circulo quovis alio reciprocè in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum; fiet, ex æquo, velocitas gyrantis in conicâ ſectione ad velocitatem gyrantis in circulo

nem illam ſubduplicatam habet. (Prop. IV. Cor. 6.) Quare *f* minor erit, quàm ut habeat ad F proportionem eam quam *g* ad G. Permutando *f* minor erit, quàm ut habeat ad *g* proportionem eam quam F ad G. Sed oſtenſa eſt F minor, quàm quæ ad G proportionem haberet binarii ad unitatem ſubduplicatam. Quare *f* multo minor erit, quàm ut habeat ad *g* proportionem binarii ad unitatem ſubduplicatam. Q. E. D.

Simili argumentatione, ſi ponatur APB Hyperbola, ex eo quòd L major erit quàm 4SA, oſtendatur F major quàm quæ ad G, & multo magis *f* major quàm quæ ad *g*, proportionem habeat binarii ad unitatem ſubduplicatam. Q. E. D.

[bb] "NAM velocitas in circulo, cujus radius $\frac{1}{2}$SP, eſt ad velocitatem in circulo, cujus radius "SP, ut $\sqrt{2}$ ad 1 (Cor. 6. Prop. IV) Et velocitas etiam in Parabolâ, ad diſtantiam SP, eſt ad ve-"locitatem in Circulo, cujus radius SP, ut $\sqrt{2}$ ad 1. Velocitas igitur in Parabolâ ad diſtantiam "SP æquatur velocitati in circulo cujus radius $\frac{1}{2}$SP (El. V. 9.)" [*Le Sœur & Jacquier ad Locum.*]

Similiter velocitas in Ellipſi, ad diſtantiam quamvis SP, cùm minor illa ſit quàm quæ habeat ad velocitatem in Circulo, ad eandem diſtantiam SP, rationem eam quam $\sqrt{2}$ ad 1, velocitate in Circulo ad diſtantiam $\frac{1}{2}$SP, minor erit. (El. V. 10) Verùm in Hyperbolâ velocitas, ad diſtantiam quamvis SP, cùm ſit major quàm quæ habeat ad velocitatem in Circulo, ad eandem diſtantiam SP, rationem eam quam $\sqrt{2}$ ad 1, velocitate in Circulo ad diſtantiam $\frac{1}{2}$SP, illa quidem major erit. (El. V. 10.) Q. E. D.)

[cc] NAM cùm dupla diſtantia ſit latus rectum Circuli, circulus utique & orbis ille alter conicus latera recta æqualia habebunt.

[dd] VELOCITAS in ſectione conicâ APB, in loco P, eſt ad velocitatem in circulo, ad diſtantiam $\frac{1}{2}$L, ut $\frac{1}{2}$L ad SY (Cor. 8.) Et velocitas in circulo, ad diſtantiam $\frac{1}{2}$L, eſt ad velocitatem in circulo ad diſtantiam SP, ut SP ad $\sqrt{SP \times \frac{1}{2}L}$. (Prop. IV. Cor. 6.) Quare, ex æquo, velocitas in orbe conico APB, in loco P, erit ad velocitatem in circulo ad diſtantiam SP, ut $\overline{SP \times \frac{1}{2}L}$ ad $SY \times \sqrt{SP \times \frac{1}{2}L}$, ſive ut

culo in eâdem diſtantiâ, ut media proportionalis inter diſtantiam illam communem & ſemiſſem principalis lateris recti ſectionis, ad perpendiculum ab umbilico communi in tangentem ſectionis demiſſum [dd].

PROP. XVII. PROB. IX.

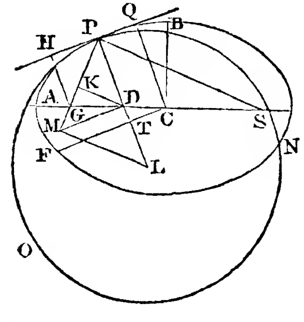
Poſito quòd vis centripeta ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ locorum à centro, & quòd vis illius quantitas abſoluta ſit cognita; requiritur linea, quam corpus deſcribit de loco dato cum datâ velocitate ſecundum datam rectam egrediens.

Vis centripeta tendens ad punctum S ea ſit, quâ corpus *p* in orbitâ quâvis datâ, *pq*, gyretur, & cognoſcatur hujus velocitas in loco *p*. De loco P ſecundum lineam PR exeat corpus P cum datâ velocitate, & mox inde, cogente vi centripetâ, deflectat illud in coni ſectionem PQ. Hanc igitur recta PR tanget in P. Tangat itidem recta aliqua *pr* orbitam *pq* in *p*; & ſi ab S ad eas tangentes demitti intelligantur perpendicula, erit (per Corol. 1. Prop. XVI.) latus rectum principale coni ſectionis ad latus rectum prin-

ut $\sqrt{\frac{1}{2}L \times SP}$ ad SY. Q. E. D.

Cor. H. "In Ellipſi vel Hyperbolâ, velocitas, ad quamvis ab umbilico diſtantiam, ad velocitatem in Circulo, ad eandem à centro diſtantiam, rationem habebit diſtantiæ ab umbilico altero ad dimidium axis tranſverſi ſubduplicatam."

Sit G umbilicus quem vires centripetæ reſpiciant. Dico velocitatem in Ellipſi vel Hyperbolâ, in loco P, ad velocitatem corporis, circum centrum G in circulo ad diſtantiam GP circumacti, rationem habere rectæ SP ad CA ſubduplicatam. Nempe cùm illa PK ſemiſſis ſit lateris recti orbis conici APB (Hamilton. Conic. Lib. II. 27.) velocitas in orbe illo, in loco P, erit ad velocitatem in circulo cujus radius GP, ut $\sqrt{GP \times PK}$ ad GH. (Cor. 9.) Verùm rectangulum $GP \times PK$ eſt ad quadratum ex GP ut PK ad GP; hoc eſt, ut rectangulum $SP \times PK$ ad rectangulum $SP \times GP$. Quadratum autem ex GP eſt ad quadratum ex GH ut quadratum ex CF ad quadratum ex CB. (Hamilton. Conic. Lib. II. 31.) hoc eſt ut rectangulum $SP \times GP$ ad rectangulum $CA \times PK$. (Nam quadratum ex CF æquale eſt rectangulo $SP \times GP$; Hamilton. Conic. Lib. II. 19; & quadratum ex CB æquale eſt rectangulo $\overline{CA \times PK}$.) Quare cùm ſit $GP \times PK : GP^2 = SP \times PK : SP \times GP$, & $GP^2 : GH^2 = SP \times GP : CA \times PK$; erit ex æquo $GP \times PK : GH^2 = SP : CA$. Quapropter $\sqrt{GP \times PK}$ ad GH rationem habebit rectæ SP ad CA ſubduplicatam. Sed $\sqrt{GP \times PK}$ ad GH rationem habet, quam velocitas in orbe conico APB, in loco P, ad velocitatem in circulo cujus radius GP, ſicut ſuprà oſtenſum eſt. Velocitas igitur illa ad hanc velocitatem rationem habet rectæ SP ad CA ſubduplicatam. Q. E. D. Propoſitio hæc elegantiſſima à patribus doctiſſimis Sœurio & Jacquiero eſt profecta, qui tamen longè aliâ ratione eam demonſtraverunt.



cipale

DE MOTU CORPORUM

cipale orbitæ in ratione compoſitâ ex duplicatâ ratione perpendiculorum & duplicatâ ratione velocitatum, atque ideo datur. Sit L coni ſectionis latus rectum. Datur præterea ejuſdem coni ſectionis umbilicus S. Anguli RPS complementum ad duos rectos fiat angulus RPH; & dabitur poſitione linea PH, in quâ umbilicus alter H locatur [cc]. Demiſſo ad PH perpendiculo SK, erigi intelligatur ſemiaxis conjugatus BC, & erit $SPq - 2KPH + PHq = SHq$ [ff] $= 4CHq = 4BHq - 4BCq = \overline{SP+PH}$: *quad.* $- L \times \overline{SP+PH} = SPq + 2SPH + PHq - L \times \overline{SP+PH}$. Addantur utrobique $2KPH - SPq - PHq + L \times \overline{SP+PH}$, & fiet $L \times \overline{SP+PH} = 2SPH + 2KPH$, ſeu $SP + PH$ ad PH ut $2SP + 2KP$ ad L. Unde datur PH tam longitudine quàm poſitione [gg]. Nimirum ſi ea ſit corporis in P velocitas, ut latus rectum L minus fuerit quàm $2SP + 2KP$, jacebit PH ad eandem partem tangentis PR cum lineâ PS; ideoque figura erit Ellipſis, & ex datis umbilicis S, H, & axe principali $SP + PH$, dabitur. Sin tanta ſit corporis velocitas, ut latus rectum L æquale fuerit $2SP + 2KP$, longitudo PH infinita erit; & propterea figura erit Parabola axem habens SA parallelum lineæ PK, & inde dabitur. Quòd ſi corpus majori adhuc cum velocitate de loco ſuo P exeat, capienda

(cc) Hamilton. Conic. Lib. II. 15, 16, & 17.
(ff) El. II. 13.

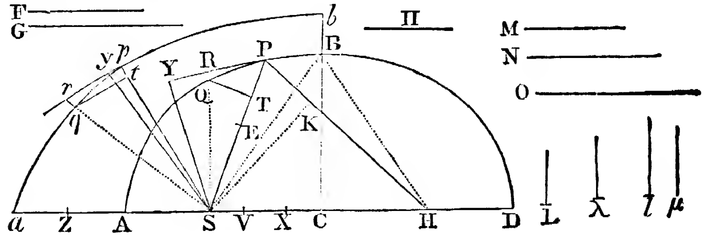
(gg) DATIS enim punctis S, P, recta SP magnitudine & poſitione data eſt. Præterea recta SK, à dato puncto S in rectam PH, poſitione datam, ad perpendiculum deducta, poſitione ipſa dabitur. (Dat. 30.) Punctum igitur K datum (Dat. 25.) Recta igitur PK magnitudine & poſitione data (Dat. 26.) Duæ igitur SP, PK ſimul ſumptæ magnitudine datæ (Dat. 3.) & 2SP, 2PK ſimul ſumptæ magnitudine datæ (Dat. 2.) Sed L magnitudine data. Ratio igitur rectæ L ad $2SP \times 2PK$ data (Dat. 1.) Quare ratio rectæ PH ad $SP \times PH$ data; &, dividendo, ratio PH ad SP data. Sed SP magnitudine data. Quare & PH (Dat. 2.) Et oſtenſa eſt jam antè PH poſitione data. Magnitudine igitur & poſitione.

A L I T E R.

(hh) FACTUM puta quod propoſitum erat. Sit APD orbis ille conicus, quem corpus, velocitate datâ è loco P ſecundum rectam PR decedens, urgentibus viribus centripetis quæ umbilicum S reſpiciant, deſcribere cogetur. Sectionis conicæ APD axis ſit ASD. A puncto P, ad angulos cum contingente PR rectos, eductam puta PE, quæ axi AS in E occurrat. A puncto E in junctam SP ad perpendiculum demittatur EG. Sectionis conicæ APD, ſit latum rectum L, quod magnitudine quidem dari, eodem nos quo Newtonus modo oſtendamus. Hujus autem dimidio recta PG æqualis eſt. (Hamilton. Conic. Lib. II. 27.) Recta igitur PG magnitudine data eſt. Sed et poſitione (Dat. 26.) propter puncta P, S data. Punctum igitur G datum (Dat. 27.) Recta igitur GE, à dato puncto G cum rectâ PG, poſitione datâ, ad perpendiculum educta, poſitione & ipſa dabitur (Dat. 29.) Sed & recta PE, à dato puncto P cum rectâ PR, poſitione datâ, ad perpendiculum educta, poſitione & ipſa dabitur (Dat. 29.) Punctum igitur E datum (Dat. 25.) Datum autem S. Recta igitur SE, quæ axis eſt ſectionis conicæ APD, poſitione dabitur (Dat. 26.) Si igitur Parabola

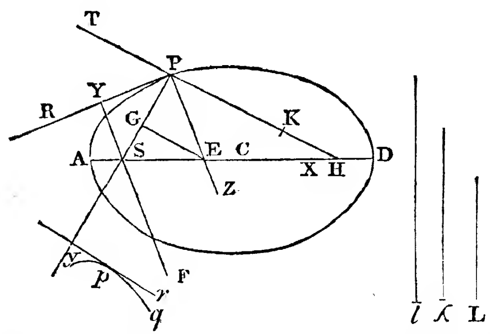
LIBER PRIMUS.

pienda erit longitudo PH ad alteram partem tangentis; ideoque



tangente inter umbilicos pergente, figura erit Hyperbola axem habens principalem æqualem differentiæ linearum SP & PH, & inde dabitur. Nam ſi corpus in his caſibus revolvatur in conicâ ſectione ſic inventâ, demonſtratum eſt in Prop. XI, XII, & XIII, quòd vis centripeta erit ut quadratum diſtantiæ corporis à centro virium S reciprocè; ideoque linea PQ rectè exhibetur, quam corpus tali vi deſcribet, de loco dato P, cum datâ velocitate, ſecundum rectam poſitione datam PR egrediens. Q. E. F [hh].

Corol.



Parabola ſit ſectio illa, cùm umbilicum S datum habeat, & axem SA poſitione datum, latuſque rectum L magnitudine, poſitione quidem ipſa dabitur. Si verò Ellipſis ſit, aut Hyperbola, ſectio illa conica APD, ſit H umbilicus ejus alter, & jungatur PH. Jam angulus RPH, ſi ſectio ſit Hyperbola, ſi verò illa ſit Ellipſis, angulus TPR, qui cum illo RPH duos rectos complet, angulo RPS æqualis erit. (Hamilton. Conic. Lib. II. 16 & 17.) Angulus autem RPS, qui à rectis PS, PR poſitione datis comprehenſus eſt, magnitudine datus eſt. Angulus igitur RPH datus. Recta igitur PH quæ à dato puncto P, datâ ad rectam PR, poſitione datam, inclinatione eſt educta, poſitione & ipſa dabitur (Dat. 29.) Sed oſtenſa eſt SA poſitione data. Punctum igitur H datum (Dat. 25.) Recta igitur PH magnitudine & poſitione data (Dat. 26.) Sed SP data, id enim ſuprà oſtenſum eſt. Duarum igitur SP, PH ſumma vel differentia dabitur. Harum autem ſummæ quidem, ſi ſectio conica APD ſit Ellipſis, differentiæ verò, ſi illa ſit Hyperbola, axis tranſverſus AD eſt æqualis (Hamilton. Conic. Lib. II. 14.) Axis igitur tranſverſus magnitudine datus. Quare ſectio conica APD, cùm umbilicos S, H, datos habeat, axemque tranſverſum AD magnitudine datum, poſitione ipſa quidem dabitur. Q. E. D.

Componemus igitur Problema hoc modo.

Sit l latus rectum orbitæ pq. Ab umbilico S in rectas pr, PR deducantur ad perpendiculum sy, SY. Et à puncto P, ad perpendiculum cum rectâ PR erigatur PZ. Capiatur [illegible], ad quam SY rationem habeat eam, quam velocitas in loco p ad velocitatem in P. Capiatur etiam λ ad quam l ra-

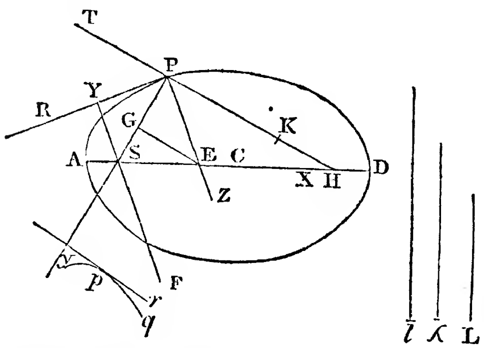
Corol. 1. Hinc in omni coni ſectione ex dato vertice principali, D, latere recto, L, & umbilico, S, datur umbilicus alter H; capiendo DH ad DS ut eſt latus rectum ad differentiam inter latus rectum & 4DS. Nam proportio SP+PH ad PH ut 2SP+2KP ad L, in caſu hujus corollarii, fit DS+DH ad DH ut 4DS ad L, & diviſim DS ad DH ut 4DS−L ad L.

Corol. 2. Unde ſi datur corporis velocitas in vertice principali D, invenietur orbita expeditè, capiendo ſcilicet latus rectum ejus ad duplam diſtantiam DS, in duplicatâ ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in circulo ad diſtantiam DS gyrantis (per Corol. 3. Prop. XVI.) dein DH ad DS ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & 4DS.

Corol. 3. Hinc etiam ſi corpus moveatur in ſectione quâcunque conicâ, & ex orbe ſuo, impulſu quocunque, exturbetur; cognoſci poteſt orbis, in quo poſtea curſum ſuum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo, quem impulſus ſolus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulſûs loco, ſecundum rectam poſitione datam, exibit.

Corol. 4. Et ſi corpus illud, vi aliquâ extrinſecus impreſſâ, continuò

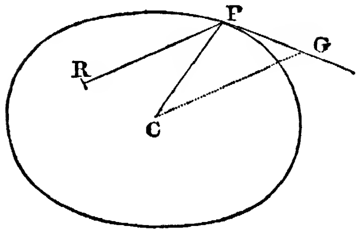
l rationem habeat quam *sy* ad SF; denique capiatur L quæ cum duabus *l*, λ proportione ſit tertia. Jungatur SP, & abſcindatur PG ſemiſſi rectæ L æqualis. A puncto G, ad perpendiculum cum rectâ PG, educatur GE, quæ cum PZ in puncto E conveniat. Jungatur SE. Et angulo EPS conſtituatur angulus EPK æqualis. Productâ KP ultra P ad T, angulus PSE angulo TPS vel æqualis erit vel non. Si ſit æqualis, recta PK parallela erit cum rectâ SE. Quod ſi acciderit Parabola ſcribatur, cujus umbilicus ſit S, axis tranſverſus SE, latus rectum L, & hæc erit orbita quam definire ſuſcepimus. Nam ſi orbita illa Ellipſis aut Hyperbola eſſet, umbilicum ſuum al-



terum ea haberet in rectâ PK poſitum, quæ propterea axem SE alicubi conveniret; quod angulorum TPS, GSE inter ipſos æqualitas fieri omnino vetat. Sin verò anguli illi inæquales ſint, rectæ PK, SE inter ſe non erunt parallelæ. Convenient igitur. Conveniant in H. Angulus GSE, dato TPS, cum illi æqualis non ſit, vel minor vel major erit. Si minor fuerit angulus GSE, rectæ PK, SE ab iis partibus rectæ SP convenient, ad quas ſitus eſt angulus PSE; & punctum E punctis S, H intermedium erit. Si verò angulus GSE angulo TPS major fuerit, rectæ SE, PK à partibus rectæ SP earum, ad quas ſitus eſt angulus PSE, contrariis convenient; & punctum E illis, H, S, minimè intermedium erit. Primum quidem ſi acciderit, Ellipſis cujus umbilici ſint S, H, axis autem tranſverſus duarum SP, PH ſummæ ſit æqualis, ſin verò poſterius, Hyperbola, cujus umbilici

tinuò perturbetur, innoteſcet curſus quàm proximè, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibuſdam inducit, &, ex ſeriei analogiâ, mutationes continuas in locis intermediis æſtimando.

Scholium.



Si corpus P vi centripetâ, ad punctum quodcunque datum R tendente, moveatur in perimetro datæ cujuſcunque ſectionis conicæ, cujus centrum ſit C; & requiratur lex vis centripetæ: ducatur CG radio RP parallela, & orbis tangenti PG occurrens in G; & vis illa (per Corol. 1. & Schol. Prop. X. & Corol. 3. Prop. VII.) erit ut $\frac{\text{CG cub.}}{\text{RP quad.}}$.

SECTIO IV.

De inventione orbium ellipticorum, parabolicorum & hyperbolicorum ex umbilico dato.

umbilici ſint S, H, axis autem tranſverſus differentiæ duarum SP, PH æquetur, orbita erit quam definire ſuſcepimus. Nam Parabola eſſe omnino illa nequit; nam ſi Parabola eſſet, recta PH cum axe SE parallela eſſet. (Hamilton. Conic. Lib. II. 5.) Neque verò, ſi primum acciderit, Hyperbola; nam in hyperbolâ punctum E (concurſus utique radii curvaturæ, qui dicitur, cum axe tranſverſo) umbilicis intermedius eſſe nequit; neque denique, ſi poſtremum acciderit, Ellipſis erit orbita illa; nam in ellipſi concurſus ille radii curvaturæ cum axe tranſverſo non eſſe nequit umbilicis intermedius. Orbita igitur, quam definire nos oportet, ſi primum acciderit, Ellipſis; ſi poſterius, Hyperbola erit, umbilicis & axibus tranſverſis quos diximus. Quod ſi neutrum acciderit, anguli autem PSE, TPS æquales ſint, orbita Parabola erit quam ſuprà definivimus. Q. E. I.

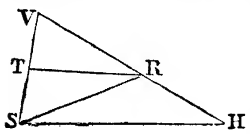
E noſtrâ verò Problematis reſolutione, æquè atque ex illâ Newtoni, patet, majorem minoremve corporis, in dato loco P, velocitatem illud eſſe, quod orbitæ cuique ſpeciem propriam inducit. Auctâ enim in loco P velocitate, cæteris manentibus, augebitur L. Auctâque L augebitur ſemiſſis ejus PG. Et quo major fuerit PG, eo, propter datam quidem SP, minor erit SG. Et in triangulo PGE ſpecie dato, quâ ratione aucta fuerit PG, eâdem augebitur GE. Auctâ igitur velocitate (cæteris manentibus) augebitur GE, atque SG imminuetur. Et utroque nomine ratio rectæ SG ad GE, ſive radii ad tangentem anguli acuti GSE, minor fiet. Imminutâ autem ratione illâ, angulus ipſe major fiet. Major itaque corporis in loco P velocitas majorem angulum GSE effecerit; creſcente autem angulo GSE, orbita à formâ ellipticâ in parabolicam, & à parabolicâ in hyperbolicam, ſenſim migrabit. Omnis igitur formæ ratio poſita eſt in modo velocitatis.

Præterea è noſtrâ reſolutione corollaria Newtoniana facilè deducenda ſunt. Capiatur enim $DX = \frac{1}{2}L$. Jam cùm recta PE angulum SPH medium dividat, idcirco erit SP ad PH ut SE ad EH: punctoque P per flexum orbitæ utcunque tranſlato, hæc ſimilitudo proportionum manebit. Igitur & ultimò manebit, ſi P in verticem D transferatur. Ultimò verò puncto P in D incidente, puncta G, E ſimul in illud X incident. Unde efficietur $DS : DH = SX : XH$. Quare $DS : DH = DS + SX : DX$. Sed $DS + SX = 2DS - DX$, et $DX = \frac{1}{2}L$. Quare $DS : DH = 2DS - \frac{1}{2}L : \frac{1}{2}L = 4DS - L : L$. Hoc eſt $DS : DH = 4DS - L : L$. Q. E. D.

LEMMA

LEMMA XV.

Si ab ellipſeos vel hyperbolæ cujuſvis umbilicis duobus S, H, *ad punctum quodvis tertium*, V, *inflectantur rectæ duæ*, SV, HV, *quarum una* HV *æqualis ſit axi principali figuræ, id eſt, axi in quo umbilici jacent, altera* SV *à perpendiculo* TR *in ſe demiſſo biſecetur in* T; *perpendiculum illud* TR *ſectionem conicam alicubi tanget: & contrà, ſi tangit, erit* HV *æqualis axi principali figuræ.*

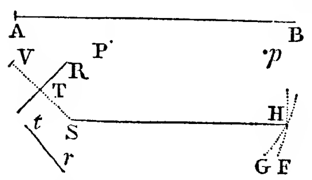


Secet enim perpendiculum TR rectam HV productam, ſi opus fuerit, in R; & jungatur SR. Ob æquales TS, TV, æquales erunt & rectæ SR, VR, & anguli TRS, TRV. Unde punctum R erit ad ſectionem conicam, & perpendiculum TR tanget eandem: & contrà. Q. E. D.

PROP. XVIII. PROB. X.

Datis umbilico & axibus principalibus, deſcribere trajectorias ellipticas & hyperbolicas, quæ tranſibunt per puncta data, & rectas poſitione datas contingent.

Sit S communis umbilicus figurarum; AB longitudo axis principalis trajectoriæ cujuſvis; P punctum per quod trajectoria debet tranſire; & TR, recta quam debet tangere. Centro P, intervallo AB−SP, ſi orbita ſit Ellipſis, vel AB+SP, ſi ea ſit Hyperbola, deſcribatur circulus HG. Ad tangentem TR demittatur perpendiculum ST, & producatur idem ad V, ut ſit TV æqualis ST; centroque V, & intervallo AB, deſcribatur circulus FH. Hâc methodo, ſive dentur duo puncta P, *p*, ſive duæ tangentes TR, *tr*, ſive punctum P & tangens TR, deſcribendi ſunt circuli duo. Sit H eorum interſectio communis, & umbilicis S, H, axe illo dato deſcribatur trajectoria. Dico factum. Nam trajectoria deſcripta (eo quòd PH+SP in Ellipſi, & PH−SP in Hyperbolâ æquatur axi) tranſibit per punctum P, & (per lemma ſuperius) tanget rectam TR. Et eodem argumento vel tranſibit eadem per puncta duo P, *p*, vel tanget rectas duas TR, *tr*. Q. E. F.

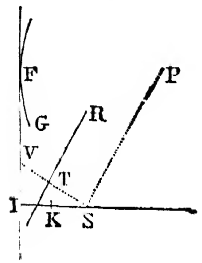


PROP.

PROP. XIX. PROB. XI.

Circa datum umbilicum trajectoriam parabolicam deſcribere, quæ tranſibit per puncta data, & rectas poſitione datas continget.

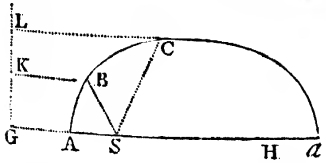
Sit S umbilicus, P punctum, & TR tangens trajectoriæ deſcribendæ. Centro P, intervallo PS, deſcribe circulum FG. Ab umbilico ad tangentem demitte perpendicularem ST, & produc eam ad V, ut ſit TV æqualis ST. Eodem modo deſcribendus eſt alter circulus *fg*, ſi datur alterum punctum *p*; vel inveniendum alterum punctum *v*, ſi datur altera tangens *tr*; dein ducenda recta IF, quæ tangat duos circulos FG, *fg*, ſi dantur duo puncta P, *p*; vel tranſeat per duo puncta V, *v*, ſi dantur duæ tangentes TR, *tr*; vel tangat circulum FG, & tranſeat per punctum V, ſi datur punctum P & tangens TR. Ad FI demitte perpendicularem SI, eamque biſeca in K; & axe SK, vertice principali K deſcribatur Parabola. Dico factum. Nam parabola, ob æquales SK & IK, SP & FP, tranſibit per punctum P; & (per Lem. XIV. Corol. 3.) ob æquales ST & TV, & angulum rectum STR, tanget rectam TR. Q. E. F.



PROP. XX. PROB. XII.

Circa datum umbilicum trajectoriam quamvis ſpecie datam deſcribere, quæ per data puncta tranſibit, & rectas tanget poſitione datas.

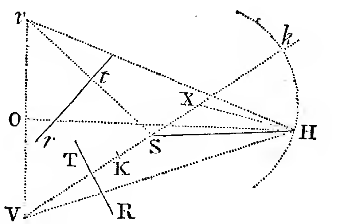
Caſ. 1. Dato umbilico S, deſcribenda ſit trajectoria ABC per puncta duo B, C. Quoniam trajectoria datur ſpecie, dabitur ratio axis principalis ad diſtantiam umbilicorum. In eâ ratione cape KB ad BS, & LC ad CS. Centris B, C, intervallis BK, CL, deſcribe circulos duos; & ad rectam KL, quæ tangat eoſdem in K & L, demitte perpendiculum SG, idemque



que

que ſeca in A & *a*, ita ut ſit GA ad AS, & *Ga* ad *as*, ut eſt KB ad BS; & axe A*a*, verticibus A, *a*, deſcribatur trajectoria. Dico factum. Sit enim H umbilicus alter figuræ deſcriptæ, & cùm ſit GA ad AS ut *Ga* ad *as*, erit diviſim *Ga*−GA, ſeu A*a*, ad *as*−AS, ſeu SH in eâdem ratione; ideoque in ratione quam habet axis principalis figuræ deſcribendæ ad diſtantiam umbilicorum ejus; & propterea figura deſcripta eſt ejuſdem ſpeciei cum deſcribendâ. Cúmque ſint KB ad BS & LC ad CS in eâdem ratione, tranſibit hæc figura per puncta B, C, ut ex conicis manifeſtum eſt.

Caſ. 2. Dato umbilico S, deſcribenda ſit trajectoria, quæ rectas duas TR, *tr* alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes demitte

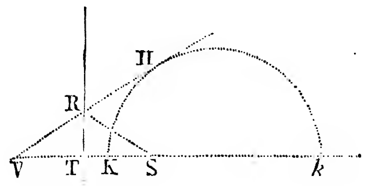


perpendicula ST, S*t*, & produc eadem ad V, *v*, ut ſint TV, *tv* æquales TS, *t*S. Biſeca V*v* in O, & erige perpendiculum infinitum OH, rectamque VS infinitè productam ſeca in K & *k*, ita ut ſit VK ad KS, & V*k* ad *k*S, ut eſt trajectoriæ deſcribendæ axis principalis ad umbilicorum diſtantiam. Super diametro K*k* deſcribatur circulus ſecans OH in H; & umbilicis S, H, axe principali ipſam VH æquante, deſcribatur trajectoria. Dico factum. Nam biſeca K*k* in X, & junge HX, HS, HV, H*v*. Quoniam eſt VK ad KS ut V*k* ad *k*S; & compoſitè ut VK+V*k* ad KS+*k*S; diviſimque ut V*k*−VK ad *k*S−KS, id eſt, ut 2VX ad 2KX & 2KX ad 2SX, ideoque ut VX ad HX & HX ad SX, ſimilia erunt triangula VXH, HXS, & propterea VH erit ad SH ut VX ad XH, ideoque ut VK ad KS. Habet igitur trajectoriæ deſcriptæ axis principalis, VH, eam rationem ad ipſius umbilicorum diſtantiam, SH, quam habet trajectoriæ deſcribendæ axis principalis ad ipſius umbilicorum diſtantiam, & propterea ejuſdem eſt ſpeciei. Inſuper cùm VH, *v*H æquentur axi principali, & VS, *v*S à rectis TR, *tr* perpendiculariter biſecentur, liquet (ex Lem. XV.) rectas illas trajectoriam deſcriptam tangere. Q. E. F.

Caſ. 3. Dato umbilico S, deſcribenda ſit trajectoria, quæ rectam TR tanget in puncto dato R. In rectam TR demitte perpendicularem ST, & produc eandem ad V, ut ſit TV æqualis ST. Junge VR, & rectam VS infinitè productam ſeca in K & *k*, ita ut ſit VK ad

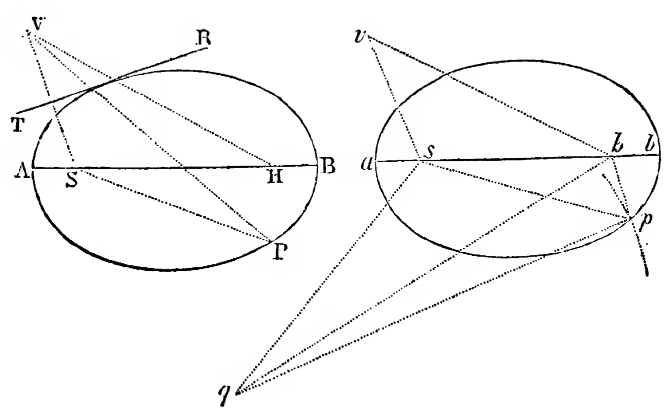
SK,

SK, & V*k* ad S*k*, ut Ellipſeos deſcribendæ axis principalis ad diſtantiam umbilicorum; circuloque



ſuper diametro K*k* deſcripto, ſecetur producta recta VR in H, & umbilicis S, H, axe principali rectam VH æquante, deſcribatur trajectoria. Dico factum. Namque VH eſſe ad SH ut VK ad SK, atque ideo ut axis principalis trajectoriæ deſcribendæ ad diſtantiam umbilicorum ejus, patet ex demonſtratis in caſu ſecundo, & propterea trajectoriam deſcriptam ejuſdem eſſe ſpeciei cum deſcribendâ, rectam verò TR, quâ angulus VRS biſecatur, tangere trajectoriam in puncto R, patet ex conicis. Q. E. F.

Caſ. 4. Circa umbilicum S deſcribenda jam ſit trajectoria APB, quæ tangat rectam TR, tranſeatque per punctum quodvis P extra tangentem datum, quæque ſimilis ſit figuræ *apb*, axe principali *ab* & umbilicis *s*, *b* deſcriptæ. In tangentem TR demitte perpendiculum ST, & produc idem ad V, ut ſit TV æqualis ST. Angulis autem VSP, SVP fac angulos *bsq*, *sbq* æquales; centroque *q*, & intervallo, quod ſit ad *ab* ut SP ad VS, deſcribe circulum ſecantem figuram *apb* in *p*. Junge *sp*, & age SH quæ ſit ad *sb* ut eſt SP ad



sp, quæque angulum PSH angulo *psb*, & angulum VSH angulo *psq* æquales conſtituat. Denique umbilicis S, H, & axe principali AB diſtantiam VH æquante, deſcribatur ſectio conica. Dico factum.

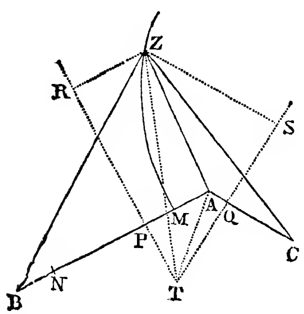
Nam

Nam ſi agatur *sv*, quæ ſit ad *sp* ut eſt *sh* ad *sq*, quæque conſtituat angulum *vsp* angulo *hsq* & angulum *vsh* angulo *psq* æquales, triangula *svh*, *spq* erunt ſimilia; & propterea *vh* erit ad *pq* ut eſt *sh* ad *sq*, id eſt (ob ſimilia triangula VSP, *hsq*) ut eſt VS ad SP ſeu *ab* ad *pq*. Æquantur ergo *vh* & *ab*. Porro ob ſimilia triangula VSH, *vsh*, eſt VH ad SH ut *vh* ad *sh*; id eſt, axis conicæ ſectionis jam deſcriptæ ad illius umbilicorum intervallum, ut axis *ab* ad umbilicorum intervallum *sh*; & propterea figura jam deſcripta ſimilis eſt figuræ *aph*. Tranſit autem hæc figura per punctum P, eo quòd triangulum PSH ſimile ſit triangulo *psh*; & quia VH æquatur ipſius axi, & VS biſecatur perpendiculariter à rectâ TR, tangit eadem rectam TR. Q. E. F.

LEMMA XVI.

A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas, quarum differentiæ vel dantur vel nullæ ſunt.

Caſ. 1. Sunto puncta illa data A, B, C, & punctum quartum Z, quod invenire oportet; ob datam differentiam linearum AZ, BZ, locabitur punctum Z in Hyperbolâ cujus umbilici ſunt A & B, & principalis axis differentia illa data. Sit axis ille MN. Cape PM ad MA ut eſt MN ad AB, & erectâ PR perpendiculari ad AB, demiſſâque ZR perpendiculari ad PR; erit, ex naturâ hujus hyperbolæ, ZR ad AZ ut eſt MN ad AB. Simili diſcurſu punctum Z locabitur in aliâ hyperbolâ, cujus umbilici ſunt A, C, & principalis axis differentia inter AZ & CZ; ducique poteſt QS ipſi AC perpendicularis, ad quam ſi ab hyperbolæ hujus puncto quovis Z demittatur normalis ZS, hæc fuerit ad AZ ut eſt differentia inter AZ & CZ ad AC. Dantur ergo rationes ipſarum ZR & ZS ad AZ, & idcirco datur earundem ZR & ZS ratio ad invicem; ideoque ſi rectæ RP, SQ concurrant in T, & agantur TZ & TA, figura TRZS dabitur ſpecie; & recta TZ, in quâ punctum Z alicubi locatur, dabitur poſitione. Dabitur etiam recta TA, ut & angulus ATZ; & ob datas rationes ipſarum AZ ac TZ ad ZS, dabitur earundem ratio ad invicem; & inde dabitur triangulum ATZ, cujus vertex eſt punctum Z. Q. E. I.



Caſ. 2. Si duæ ex tribus lineis, puta AZ & BZ, æquantur, ita age rectam TZ, ut biſecet rectam AB; dein quære triangulum ATZ, ut ſuprà.

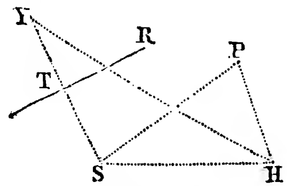
Caſ. 3. Si omnes tres æquantur, locabitur punctum Z in centro circuli per puncta A, B, C tranſeuntis. Q. E. I.

Solvitur etiam hoc lemma problematicum per librum Tactionum *Apollonii* à *Vietâ* reſtitutum.

PROP. XXI. PROB. XIII.

Trajectoriam circa datum umbilicum deſcribere, quæ tranſibit per puncta data, & rectas poſitione datas continget.

Detur umbilicus S, punctum P, & tangens TR, & inveniendus ſit umbilicus alter H. Ad tangentem demitte perpendiculum ST, & produc idem ad Y, ut ſit TY æqualis ST, & erit YH æqualis axi principali. Junge SP, HP, & erit SP differentia inter HP & axem principalem. Hoc modo ſi dentur plures tangentes TR, vel plura puncta P, devenietur ſemper ad lineas totidem YH, vel PH, à dictis punctis Y, vel P, ad umbilicum H ductas, quæ vel æquantur axibus, vel datis longitudinibus SP differunt ab iiſdem, atque ideo quæ vel æquantur ſibi invicem, vel datas habent differentias; & inde, per lemma ſuperius, datur umbilicus ille alter H. Habitis autem umbilicis unà cum axis longitudine (quæ vel eſt YH; vel, ſi trajectoria Ellipſis eſt, PH+SP; ſin Hyperbola, PH−SP) habetur trajectoria. Q. E. I.

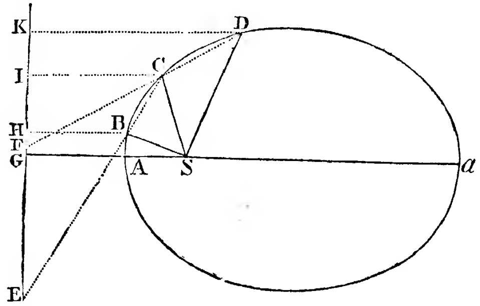


Scholium.

Ubi trajectoria eſt Hyperbola, ſub nomine hujus trajectoriæ oppoſitam hyperbolam non comprehendo. Corpus enim pergendo in motu ſuo in oppoſitam hyperbolam tranſire non poteſt.

Caſus

Casus ubi dantur tria puncta sic solvitur expeditiùs. Dentur puncta B, C, D. Junctas BC, CD produc ad E, F, ut sit EB ad EC ut SB ad SC, & FC ad FD ut SC ad SD. Ad EF ductam & productam demitte normales SG, BH, inque GS infinitè productâ cape GA ad AS, & G*a* ad *a*S, ut est HB ad BS; & erit A vertex, & A*a* axis principalis trajectoriæ: quæ, perinde ut GA major, æqualis,



vel minor fuerit quàm AS, erit Ellipsis, Parabola vel Hyperbola; puncto *a* in primo casu cadente ad eandem partem lineæ GF cum puncto A; in secundo casu abeunte in infinitum; in tertio cadente ad contrariam partem lineæ GF. Nam si demittantur ad GF perpendicula CI, DK; erit IC ad HB ut EC ad EB, hoc est, ut SC ad SB; & vicissim IC ad SC ut HB ad SB, sive ut GA ad SA. Et simili argumento probabitur esse KD ad SD in eâdem ratione. Jacent ergo puncta B, C, D in coni sectione circa umbilicum S ita descriptâ, ut rectæ omnes, ab umbilico S ad singula sectionis puncta ductæ, sint ad perpendicula à punctis iisdem ad rectam GF demissa in datâ illâ ratione.

Methodo haud multum dissimili hujus Problematis solutionem tradit clarissimus Geometra *De la Hire*, Conicorum suorum Lib. 8. Prop. XXV.

SECTIO V.

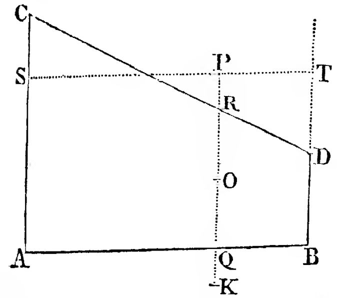
Inventio orbium ubi umbilicus neuter datur.

LEMMA XVII.

Si à datæ conicæ sectionis puncto quovis, P, *ad trapezii alicujus,* ABCD, *in conicâ illâ sectione inscripti, latera quatuor infinitè producta,* AB, CD, AC, DB, *totidem rectæ,* PQ, PR, PS, PT, *in datis angulis ducantur, singulæ ad singula: rectangulum ductarum ad opposita*

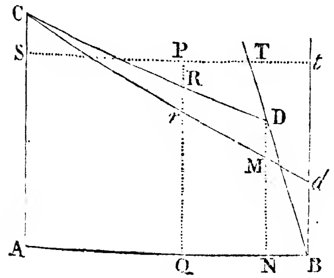
sita duo latera, PQ × PR, *erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera opposita,* PS × PT, *in datâ ratione.*

Cas. 1. Ponamus primò lineas ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, puta PQ & PR lateri AC, & PS ac PT lateri AB. Sintque insuper latera duo ex oppositis, puta AC & BD, sibi invicem parallela. Et recta, quæ bisecat parallela illa latera, erit una ex diametris conicæ sectionis, & bisecabit etiam RQ. Sit O punctum



in quo RQ bisecatur, & erit PO ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc PO ad K, ut sit OK æqualis PO, & erit OK ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cùm igitur puncta A, B, P & K sint ad conicam sectionem, & PK secet AB in dato angulo, erit (per Prop. XVII, XIX, XXI & XXIII. Lib. 3. Conicorum *Apollonii*) rectangulum PQK ad rectangulum AQB in datâ ratione. Sed QK & PR æquales sunt; utpote æqualium OK, OP, & OQ, OR differentiæ; & inde etiam rectangula PQK & PQ × PR æqualia sunt; atque ideo rectangulum PQ × PR est ad rectangulum AQB, hoc est ad rectangulum PS × PT, in datâ ratione. Q. E. D.

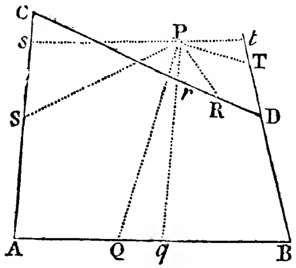
Cas. 2. Ponamus jam trapezii latera opposita AC & BD non esse parallela. Age B*d* parallelam AC & occurrentem tum rectæ ST in *t*, tum conicæ sectioni in *d*.



Junge C*d* secantem PQ in *r*, & ipsi PQ parallelam age DM secantem C*d* in M, & AB in N. Jam ob similia triangula BT*t*, DBN; est B*t*, seu PQ, ad T*t* ut DN ad NB. Sic & R*r* est ad AQ, seu PS, ut DM ad AN. Ergo, ducendo antecedentes in antecedentes, & consequentes in consequentes, ut rectangulum PQ in R*r* est ad rectangulum PS in T*t*, ita rectangulum NDM est ad rectangulum ANB, & (per Cas. 1.) ita rectangulum PQ in P*r* est ad rectangulum PS in P*t*,

ac diviſim ita rectangulum PQ × PR eſt ad rectangulum PS × PT. Q. E. D.

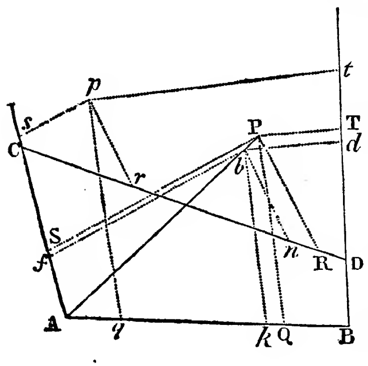
Caſ. 3. Ponamus denique lineas quatuor PQ, PR, PS, PT, non eſſe parallelas lateribus AC, AB, ſed ad ea utcunque inclinatas. Earum vice age P*q*, P*r* parallelas ipſi AC; & P*s*, P*t* parallelas ipſi AB; & propter datos angulos triangulorum PQ*q*, PR*r*, PS*s*, PT*t*, dabuntur rationes PQ ad P*q*, PR ad P*r*, PS ad P*s*, & PT ad P*t*; atque ideo rationes compoſitæ, PQ × PR ad P*q* × P*r*, & PS × PT ad P*s* × P*t*. Sed, per ſuperiùs demonſtrata, ratio P*q* × P*r* ad P*s* × P*t* data eſt: ergo & ratio PQ × PR ad PS × PT. Q. E. D.



LEMMA XVIII.

Iiſdem poſitis, ſi rectangulum ductarum ad oppoſita duo latera trapezii, PQ × PR, *ſit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera,* PS × PT, *in datâ ratione; punctum* P, *à quo lineæ ducuntur, tanget conicam ſectionem circa trapezium deſcriptam.*

Per puncta A, B, C, D & aliquod infinitorum punctorum P, puta *p*, concipe conicam ſectionem deſcribi: dico punctum P hanc ſemper tangere. Si negas, junge AP ſecantem hanc conicam ſectionem alibi quàm in P, ſi fieri poteſt, puta in *b*. Ergo ſi ab his punctis, *p* & *b*, ducantur in datis angulis ad latera trapezii rectæ *pq*, *pr*, *ps*, *pt*, & *bk*, *bn*, *bf*, *bd*; erit ut *bk* × *bn* ad *bf* × *bd* ita (per Lem. XVII.) *pq* × *pr* ad *ps* × *pt*, & ita (per hypoth.) PQ × PR ad PS × PT. Eſt & propter ſimilitudinem trapeziorum *bkAf*, PQAS, ut *bk* ad *bf* ita PQ ad PS. Quare, applicando terminos prioris proportionis ad terminos correſpondentes hujus, erit *bn* ad *bd* ut PR ad PT. Ergo trapezia æquiangula

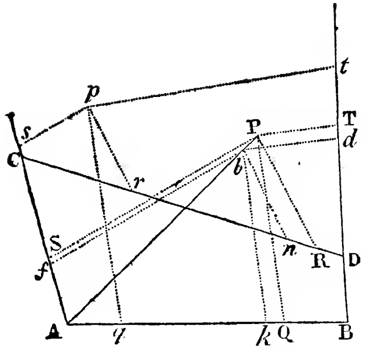


æquiangula D*nbd*, DRPT ſimilia ſunt, & eorum diagonales D*b*, DP propterea coincidunt. Incidit itaque *b* in interſectionem rectarum AP, DP, ideoque coincidit cum puncto P. Quare punctum P, ubicunque ſumatur, incidit in aſſignatam conicam ſectionem. Q. E. D.

Corol. Hinc ſi rectæ tres, PQ, PR, PS, à puncto communi P ad alias totidem poſitione datas rectas, AB, CD, AC, ſingulæ ad ſingulas, in datis angulis ducantur, ſitque rectangulum ſub duabus ductis, PQ × PR, ad quadratum tertiæ PS in datâ ratione: punctum P, à quo rectæ ducuntur, locabitur in ſectione conicâ, quæ tangit lineas AB, CD in A & C; & contrà. Nam coeat linea BD cum lineâ AC, manente poſitione trium AB, CD, AC; dein coeat etiam lineâ PT cum lineâ PS: & rectangulum PS × PT evadet PS *quad.* rectæque AB, CD, quæ curvam in punctis A & B, C & D ſecabant, jam curvam in punctis illis coeuntibus non ampliùs ſecare poſſunt, ſed tantùm tangent.

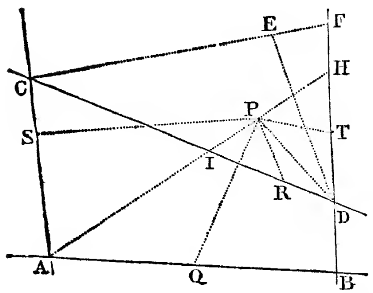
Scholium.

Nomen conicæ ſectionis in hoc Lemmate latè ſumitur, ita ut ſectio tam rectilinea, per verticem coni tranſiens, quam circularis, baſi parallela, includatur. Nam ſi punctum *p* incidit in rectam, quâ puncta A & D, vel C & B, junguntur, conica ſectio vertetur in geminas rectas, quarum una eſt recta illa in quam punctum *p* incidit, & altera eſt recta, quâ alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si trapezii anguli duo oppoſiti ſimul ſumpti æquentur duobus rectis, & lineæ quatuor PQ, PR, PS, PT ducantur ad latera ejus, vel perpendiculariter, vel in angulis quibuſvis æqualibus, ſitque rectangulum ſub duabus ductis, PQ × PR, æquale rectangulo ſub duabus aliis, PS × PT, ſectio conica evadet circulus. Idem fiet, ſi lineæ quatuor ducantur in angulis quibuſvis, & rectangulum ſub duabus ductis, PQ × PR, ſit ad rectangulum ſub aliis duabus, PS × PT, ut rectangulum ſub ſinubus angulorum, S, T, in quibus duæ ultimæ, PS, PT, ducuntur, ad rectangulum ſub ſinubus angulorum, Q, R, in quibus duæ primæ, PQ, PR, ducuntur. Cæteris in caſibus locus puncti P erit aliqua trium figurarum, quæ vulgò nominantur ſectiones conicæ. Vice autem trapezii ABCD ſubſtitui poteſt



poteſt quadrilaterum, cujus latera duo oppoſita ſe mutuò, inſtar diagonalium, decuſſant. Sed & è punctis quatuor A, B, C, D poſſunt unum vel duo abire ad infinitum, eoque pacto latera figuræ, quæ ad puncta illa convergunt, evadere parallela: quo in caſu ſectio conica tranſibit per cætera puncta, & in plagas parallelarum abibit in infinitum.

LEMMA XIX.



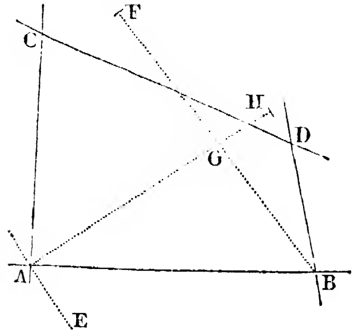
Invenire punctum P, *à quo ſi rectæ quatuor*, PQ, PR, PS, PT, *ad alias totidem poſitione datas rectas*, AB, CD, AC, BD, *ſingulæ ad ſingulas, in datis angulis ducantur, rectangulum ſub duabus ductis*, PQ×PR, *ſit ad rectangulum ſub aliis duabus*, PS×PT, *in datâ ratione.*

Lineæ AB, CD, ad quas rectæ duæ PQ, PR unum rectangulorum continentes ducuntur, conveniant cum aliis duabus poſitione datis lineis in punctis A, B, C, D. Ab eorum aliquo, A, age rectam quamlibet, AH, in quâ velis punctum P reperiri. Secet ea lineas oppoſitas BD, CD; nimirum BD in H, & CD in I; & ob datos omnes angulos figuræ, dabuntur rationes PQ ad PA, & PA ad PS, ideoque ratio PQ ad PS. Auferendo hanc à datâ ratione PQ×PR ad PS×PT, dabitur ratio PR ad PT; & addendo datas rationes PI ad PR, & PT ad PH, dabitur ratio PI ad PH, atque ideo punctum P. Q. E. I.

Corol. 1. Hinc etiam ad locum punctorum infinitorum, P, punctum quodvis D tangens duci poteſt. Nam chorda PD, ubi puncta P ac D conveniunt, hoc eſt, ubi AH ducitur per punctum D, tangens evadit. Quo in caſu, ultima ratio evaneſcentium IP & PH invenietur,

invenietur, ut ſuprà. Ipſi igitur AD duc parallelam CF, occurrentem BD in F, & in eâ ultimâ ratione ſectam in E; & DE tangens erit, propterea quòd CE & evaneſcens IH parallelæ ſunt, & in E & P ſimiliter ſectæ.

Corol. 2. Hinc etiam locus punctorum omnium P definiri poteſt. Per quodvis punctorum A, B, C, D, puta A, duc loci tangentem AE, & per aliud quodvis punctum B duc tangenti parallelam BF occurrentem loco in F.



Invenietur autem punctum F per Lem. XIX. Biſeca BF in G, & acta indefinita AG erit poſitio diametri, ad quam BG & FG ordinatim applicantur. Hæc AG occurrat loco in H, & erit AH diameter ſive latus tranſverſum, ad quod latus rectum erit ut BG*q* ad AG×GH. Si AG nuſquam occurrit loco, lineâ AH exiſtente infinitâ, locus erit Parabola, & latus rectum ejus ad diametrum AG pertinens erit $\frac{BGq}{AG}$. Sin ea alicubi occurrit, locus Hyperbola erit, ubi puncta A & H ſita ſunt ad eaſdem partes ipſius G: & Ellipſis, ubi G intermedium eſt; niſi forte angulus AGB rectus ſit, & inſuper BG *quad.* æquale rectangulo AGH, quo in caſu Circulus habebitur.

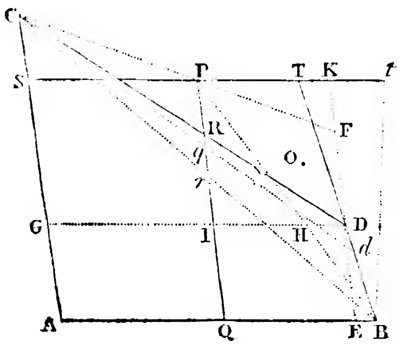
Atque ita Problematis Veterum de *Quatuor Lineis*, ab Euclide incœpti & ab Apollonio continuati, non calculus, ſed compoſitio geometrica, qualem Veteres quærebant, in hoc corollario exhibetur.

LEMMA XX.

Si parallelogrammum quodvis, ASPQ, *angulis duobus oppoſitis*, A & P, *tangit ſectionem conicam in punctis* A & P; & *lateribus unius angulorum illorum infinitè productis*, AQ, AS, *occurrit eidem ſectioni conicæ in* B & C; *à punctis autem occurſuum*, B & C, *ad quintum quodvis ſectionis conicæ punctum*, D, *agantur rectæ duæ*, BD, CD, *occurrentes alteris duobus infinitè productis parallelogrammi lateribus*, PS, PQ, *in* T & R: *erunt ſemper abſciſſæ laterum partes*, PR & PT, *ad invicem in datâ ratione. Et contrà*,

contrà, ſi partes illæ abſciſſæ ſunt ad invicem in datâ ratione, punctum D *tanget ſectionem conicam per puncta quatuor* A, B, C, P *tranſeuntem.*

Caſ. 1. Jungantur BP, CP, & à puncto D agantur rectæ duæ DG, DE, quarum prior DG ipſi AB parallela ſit, & occurrat PB, PQ, CA, in H, I, G; altera DE parallela ſit ipſi AC, & occurrat PC, PS, AB in F, K, E: & erit (per Lem. XVII.) rectangulum DE×DF ad rectangulum DG×DH in ratione datâ. Sed eſt PQ ad DE (ſeu IQ) ut PB ad HB, ideoque ut PT ad DH; & viciſſim PQ ad PT ut DE ad DH. Eſt & PR ad DF ut RC ad DC, ideoque ut (IG vel) PS ad DG, & viciſſim PR ad PS ut DF ad DG; &, conjunctis rationibus, fit rectangulum PQ×PR ad rectangulum PS×PT ut rectangulum DE×DF ad rectangulum DG×DH, atque ideo in datâ ratione. Sed dantur PQ & PS, & propterea ratio PR ad PT datur. Q. E. D.



Caſ. 2. Quòd ſi PR et PT ponantur in datâ ratione ad invicem, tum ſimili ratiocinio regrediendo, ſequetur eſſe rectangulum DE×DF ad rectangulum DG×DH in ratione datâ; ideoque punctum D (per Lem. XVIII.) contingere conicam ſectionem tranſeuntem per puncta A, B, C, P. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi agatur BC ſecans PQ in *r*, & in PT capiatur P*t* in ratione ad P*r* quam habet PT ad PR: erit B*t* tangens conicæ ſectionis ad punctum B. Nam concipe punctum D coire cum puncto B, ita ut, chordâ BD evaneſcente, BT tangens evadat; & CD ac BT coincident cum CB et B*t*.

Corol. 2. Et vice verſâ ſi B*t* ſit tangens, & ad quodvis conicæ ſectionis punctum D conveniant BD, CD; erit PR ad PT ut P*r* ad P*t*. Et contrà, ſi ſit PR ad PT ut P*r* ad P*t*; convenient BD, CD ad conicæ ſectionis punctum aliquod D.

Corol. 3. Conica ſectio non ſecat conicam ſectionem in punctis

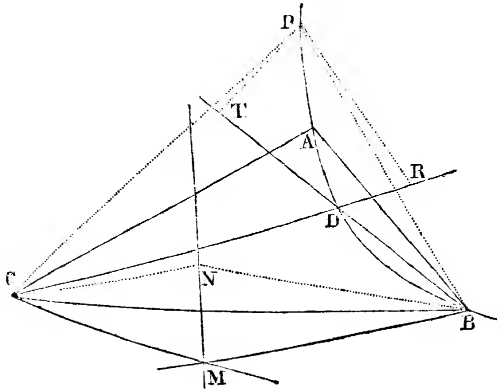
5 pluribus

pluribus quàm quatuor. Nam, ſi fieri poteſt, tranſeant duæ conicæ ſectiones per quinque puncta A, B, C, P, O; eaſque ſecet recta BD in punctis D, *d*, & ipſam PQ ſecet recta C*d* in *q*. Ergo PR eſt ad PT ut P*q* ad PT; unde PR & P*q* ſibi invicem æquantur, contra hypotheſin.

LEMMA XXI.

Si rectæ duæ mobiles & infinitæ, BM, CM, *per data puncta,* B, C, *ceu polos ductæ, concurſu ſuo,* M, *deſcribant tertiam poſitione datam rectam,* MN; *& aliæ duæ infinitæ rectæ,* BD, CD, *cum prioribus duabus ad puncta illa data* B, C *datos angulos,* MBD, MCD, *efficientes ducantur: dico, quòd hæ duæ,* BD, CD, *concurſu ſuo,* D, *deſcribent ſectionem conicam per puncta* B, C *tranſeuntem. Et vice verſâ, ſi rectæ* BD, CD *concurſu ſuo* D *deſcribant ſectionem conicam per puncta data* B, C, A *tranſeuntem, & ſit angulus* DBM *ſemper æqualis angulo dato* ABC, *angulusque* DCM *ſemper æqualis angulo dato* ACB: *punctum* M *continget rectam poſitione datam.*

Nam in rectâ MN detur punctum N, & ubi punctum mobile M incidit in immotum N, incidat punctum mobile D in immotum P. Junge CN, BN, CP, BP, & à puncto P age rectas PT, PR occurrentes ipſis BD, CD in T & R, & facientes angulum BPT æqualem angulo dato BNM, & angulum CPR æqualem angulo dato CNM.

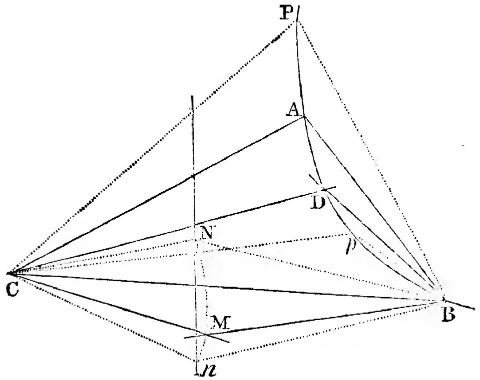


Cùm ergo (ex hypotheſi) æquales ſint anguli MBD, NBP, ut & anguli MCD, NCP; aufer communes NBD & NCD, & reſtabunt æquales NBM & PBT, NCM & PCR: ideoque triangula NBM, PBT ſimilia ſunt, ut & triangula NCM, PCR. Quare PT eſt ad NM ut PB ad NB, & PR ad NM ut PC ad NC. Sunt autem puncta B, C,

N, P

N, P immobilia. Ergo PT & PR datam habent rationem ad NM, proindeque datam rationem inter ſe; atque ideo (per Lem. XX.) punctum D, perpetuus rectarum mobilium BT & CR concurſus, contingit ſectionem conicam, per puncta B, C, P tranſeuntem. Q. E D.

Et contrà, ſi punctum mobile D contingat ſectionem conicam tranſeuntem per data puncta B, C, A, & ſit angulus DBM ſemper æqualis angulo dato ABC, & angulus DCM ſemper æqualis angulo dato ACB, & ubi punctum D incidit ſucceſſivè in duo quævis ſectionis puncta immobilia *p*, P, punctum mobile M incidat ſucceſſivè in puncta duo immobilia *n*, N: per eadem *n*, N agatur recta *n*N, & hæc erit locus perpetuus puncti illius mobilis M.



Nam, ſi fieri poteſt, verſetur punctum M in lineâ aliquâ curvâ. Tanget ergo punctum D ſectionem conicam per puncta quinque B, C, A, *p*, P tranſeuntem, ubi punctum M perpetuò tangit lineam curvam. Sed & ex jam demonſtratis tanget etiam punctum D ſectionem conicam per eadem quinque puncta B, C, A, *p*, P, tranſeuntem, ubi punctum M perpetuò tangit lineam rectam. Ergo duæ ſectiones conicæ tranſibunt per eadem quinque puncta, contra Corol. 3. Lemmat. XX. Igitur punctum M verſari in lineâ curvâ abſurdum eſt. Q. E. D.

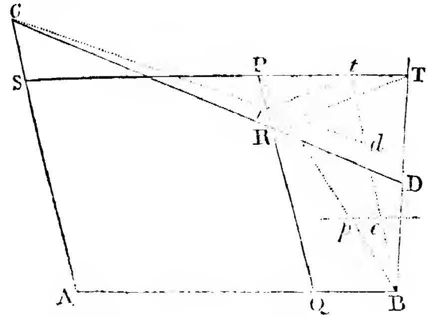
PROP. XXII. PROB. XIV.

Trajectoriam per data quinque puncta deſcribere.

Dentur puncta quinque, A, B, C, P, D. Ab eorum aliquo, A, ad alia duo quævis, B, C, quæ poli nominentur, age rectas AB, AC; hiſque parallelas TPS, PRQ per punctum quartum P. Deinde à polis duobus B, C age per punctum quintum, D, duas BDT, CRD, noviſſimè ductis, TPS, PRQ, (priorem priori & poſteriorem poſteriori) occurrentes in T & R. Denique de rectis PT, PR, actâ rectâ *tr* ipſi

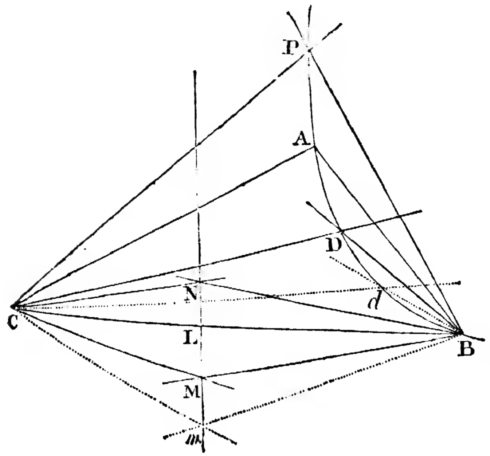
ipſi

ipſi TR parallelâ, abſcinde quaſvis P*t*, P*r* ipſis PT, PR proportionales; & ſi per earum terminos, *t*, *r*, & polos B, C actæ B*t*, C*r* concurrant in *d*, locabitur punctum illud *d* in trajectoriâ quæſitâ.



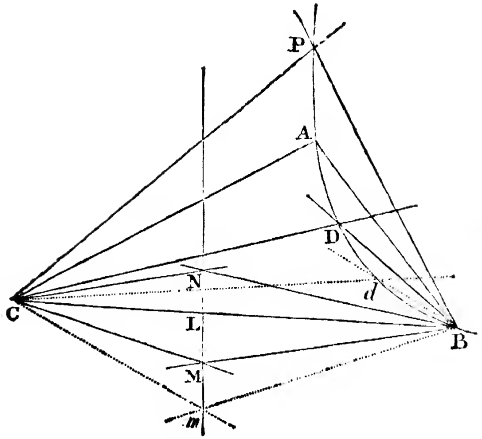
Nam punctum illud *d* (per Lem. XX.) verſatur in conicâ ſectione per puncta quatuor A, B, C, P tranſeunte; & lineis R*r*, T*t* evaneſcentibus, coit punctum *d* cum puncto D. Tranſit ergo ſectio conica per puncta quinque A, B, C, P, D. Q. E. D.

Idem aliter.



E punctis datis junge tria quævis, A, B, C; & circum duo eorum, B, C, ceu polos, rotando angulos magnitudine datos ABC, ACB, applicentur crura BA, CA primò ad punctum D, deinde ad punctum P, & notentur puncta M, N in quibus altera crura BL, CL caſu utroque ſe decuſſant. Agatur recta infinita MN, & rotentur anguli illi mobiles circum polos ſuos B, C, eâ lege, ut crurum, BL, CL, vel BM, CM, interſectio, quæ jam ſit *m*, incidat ſemper in rectam illam infinitam MN; & crurum BA, CA, vel BD, CD, interſectio, quæ jam ſit *d*, trajectoriam quæſitam PAD*d*B delineabit. Nam punctum *d* (per Lem. XXI.) continget ſectionem conicam per puncta B, C tranſeuntem; & ubi punctum *m* accedit ad puncta L, M, N, punctum *d* (per conſtructionem) accedet ad puncta A, D, P. Deſcribetur itaque ſectio conica tranſiens per puncta quinque A, B, C, P, D. Q. E. F.

Corol.



Corol. 1. Hinc recta expeditè duci potest, quæ trajectoriam quæsitam in puncto quovis dato B continget. Accedat punctum *d* ad punctum B, & recta B*d* evadet tangens quæsita.

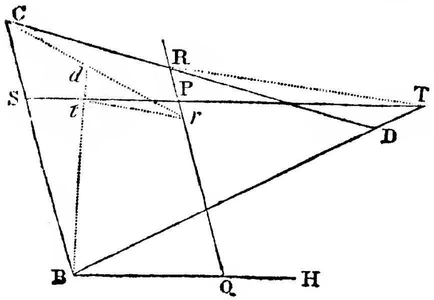
Corol. 2. Unde etiam trajectoriarum centra, diametri, & latera recta inveniri possunt, ut in corollario secundo Lemmatis XIX.

Scholium.

Constructio prior evadet paulo simplicior jungendo BP, & in eâ, si opus est productâ, capiendo B*p* ad BP ut est PR ad PT; & per *p* agendo rectam infinitam *pe* ipsi SPT parallelam, & in eâ capiendo semper *pe* æqualem P*r*; & agendo rectas B*e*, C*r* concurrentes in *d*. Nam cùm sint P*r* ad P*t*, PR ad PT, *p*B ad PB, *pe* ad P*t* in eâdem ratione; erunt *pe* & P*r* semper æquales. Hâc methodo puncta trajectoriæ inveniuntur expeditissimè, nisi mavis curvam, ut in constructione secundâ, describere mechanicè.

PROP. XXIII. PROB. XV.

Trajectoriam describere, quæ per data quatuor puncta transibit, & rectam continget positione datam.

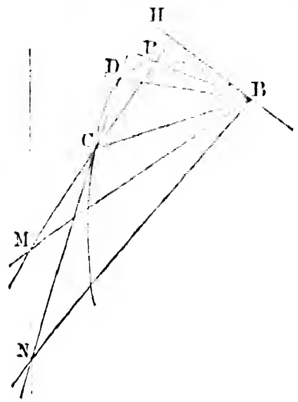


Cas. 1. Dentur tangens HB, punctum contactûs B, & alia tria puncta C, D, P. Junge BC, & agendo PS parallelam rectæ BH, & PQ parallelam rectæ BC, comple parallelogrammum BSPQ. Age BD secantem SP in T, & CD secantem PQ

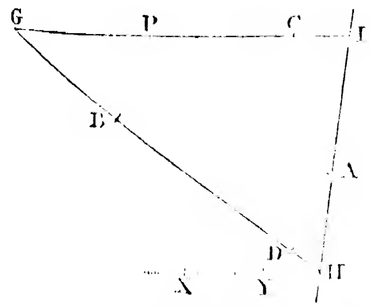
PQ in R. Denique, agendo quamvis *tr* ipsi TR parallelam, de PQ, PS abscinde P*r*, P*t* ipsis PR, PT proportionales respective; & actarum C*r*, B*t* concursus *d* (per Lem. XX.) incidet semper in trajectoriam describendam.

Idem aliter.

Revolvatur tum angulus magnitudine datus, CBH, circa polum B, tum radius quilibet rectilineus & utrinque productus, DC, circa polum C. Notentur puncta, M, N, in quibus anguli crus BC secat radium illum, ubi crus alterum, BH, concurrit cum eodem radio in punctis P & D. Deinde & actam infinitam MN concurrant perpetuo radius ille CP, vel CD, & anguli crus BC, & cruris alterius BH concursus cum radio delineabit trajectoriam quæsitam.



Nam si in constructionibus Problematis superioris accedat punctum A ad punctum B, lineæ CA & CB coincident, & linea AB in ultimo suo situ fiet tangens BH; atque ideo constructiones ibi positæ evadent eædem cum constructionibus hic descriptis. Delineabit igitur cruris BH concursus cum radio sectionem conicam per puncta C, D, P transeuntem, & rectam BH tangentem in puncto B. Q. E. F.



Cas. 2. Dentur puncta quatuor B, C, D, P, extra tangentem HI sita. Junge bina lineis BD, CP concurrentibus in G, tangentique occurrentibus in H & I. Secetur tangens in A, ita ut sit HA ad IA, ut est rectangulum sub mediâ proportionali inter CG & GP & mediâ proportionali inter BH & HD, ad rectangulum sub mediâ proportionali inter DG & GB & mediâ proportionali inter

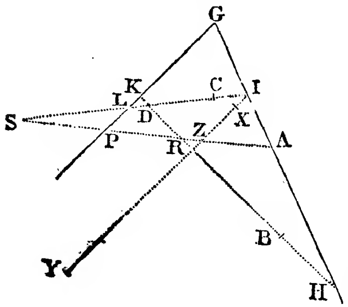
ter PI & IC; & erit A punctum contactûs. Nam si rectæ PI parallela HX trajectoriam secet in punctis quibusvis, X & Y: erit (ex conicis) punctum A ita locandum, ut fuerit HA *quad.* ad AI *quad.* in ratione compositâ ex ratione rectanguli XHY ad rectangulum BHD, seu rectanguli CGP ad rectangulum DGB, & ex ratione rectanguli BHD ad rectangulum PIC. Invento autem contactûs puncto A, describetur trajectoria ut in casu primo. Q. E. F.

Capi autem potest punctum A vel inter puncta H & I, vel extra; & perinde trajectoria dupliciter describi.

PROP. XXIV. PROB. XVI.

Trajectoriam describere, quæ transibit per data tria puncta, & rectas duas positione datas continget.

Dentur tangentes HI, KL, & puncta B, C, D. Per punctorum duo quævis, B, D, age rectam infinitam, BD, tangentibus occurrentem in punctis H, K. Deinde etiam per alia duo quævis, C, D, age infinitam CD tangentibus occurrentem in punctis I, L. Actas ita seca in R & S, ut sit HR ad KR ut est media proportionalis inter BH & HD ad mediam proportionalem inter BK & KD; & IS ad LS ut est media proportionalis inter CI & ID ad mediam proportionalem inter CL & LD. Seca autem pro lubitu vel inter puncta K & H, I & L, vel extra eadem; dein age RS secantem tangentes in A & P, & erunt A & P puncta contactuum. Nam si A & P supponantur esse puncta contactuum alicubi in tangentibus sita; & per punctorum H, I, K, L quodvis I, in tangente alterutrâ HI



situm, agatur recta IY tangenti alteri KL parallela, quæ occurrat curvæ in X & Y, & in eâ sumatur IZ media proportionalis inter IX & IY: erit, ex conicis, rectangulum XIY, seu IZ *quad.* ad LP *quad.* ut rectangulum CID ad rectangulum CLD, id est (per constructionem) ut SI *quad.* ad SL *quad.* atque ideo IZ ad LP ut SI ad SL. Jacent ergo puncta

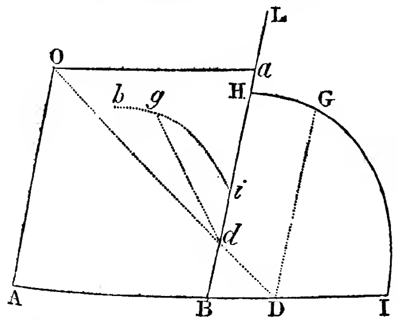
puncta S, P, Z in unâ rectâ. Porro tangentibus concurrentibus in G, erit (ex conicis) rectangulum XIY, seu IZ *quad.* ad IA *quad.* ut GP *quad.* ad GA *quad.* ideoque IZ ad IA ut GP ad GA. Jacent ergo puncta P, Z & A in unâ rectâ; ideoque puncta S, P & A sunt in unâ rectâ. Et eodem argumento probabitur quòd puncta R, P & A sunt in unâ rectâ. Jacent igitur puncta contactuum A & P in rectâ RS. Hisce autem inventis, trajectoria describetur ut in casu primo Problematis superioris. Q. E. F.

In hâc Propositione, & casu secundo Propositionis superioris, constructiones eædem sunt, sive recta XY trajectoriam secet in X & Y, sive non secet; eæque non pendent ab hâc sectione. Sed demonstratis constructionibus ubi recta illa trajectoriam secat, innotescunt constructiones, ubi non secat; iisque ultrà demonstrandis, brevitatis gratiâ, non immoror.

LEMMA XXII.

Figuras in alias ejusdem generis figuras mutare.

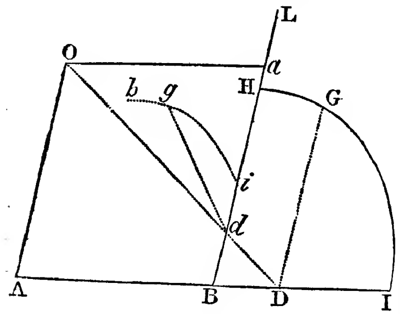
Transmutanda sit figura quævis HGI. Ducantur pro lubitu rectæ duæ parallelæ, AO, BL, tertiam quamvis positione datam, AB, secantes in A & B; & à figuræ puncto quovis, G, ad rectam AB ducatur quævis GD, ipsi OA parallela. Deinde à puncto aliquo O, in lineâ OA dato, ad punctum D ducatur recta OD, ipsi BL occurrens in *d*, & à puncto occursûs erigatur recta *dg* datum quemvis angulum cum rectâ BL continens, atque eam habens rationem ad *od*, quam habet DG ad OD; & erit *g* punctum in figurâ novâ *hgi* puncto G respondens. Eâdem ratione puncta singula figuræ primæ dabunt puncta totidem figuræ



novæ. Concipe igitur punctum G motu continuo percurrere puncta omnia figuræ primæ, & punctum *g* motu itidem continuo percurret puncta omnia figuræ novæ & eandem describet. Distinctionis gratiâ nominemus DG ordinatam primam, *dg* ordinatam

natam novam; AD abſciſſam primam, *ad* abſciſſam novam; O polum, OD radium abſcindentem, OA radium ordinatum primum, & O*a* (quo parallelogrammum OAB*a* completur) radium ordinatum novum.

Dico jam quòd, ſi punctum G tangit rectam lineam poſitione datam, punctum *g* tanget etiam lineam rectam poſitione datam. Si punctum G tangit conicam ſectionem, punctum G tanget etiam conicam ſectionem. Conicis ſectionibus hic circulum annumero. Porro ſi punctum G tangit lineam tertii ordinis analytici, punctum *g* tanget lineam tertii itidem ordinis; & ſic de curvis lineis ſuperiorum ordinum. Lineæ duæ erunt ejuſdem ſemper ordinis analytici quas puncta G, *g* tangunt. Etenim ut eſt *ad* ad OA ita ſunt O*d* ad OD, *dg* ad DG, & AB ad AD; ideoque AD æqualis eſt $\frac{OA \times AB}{ad}$, & DG æqualis eſt $\frac{OA \times dg}{ad}$. Jam ſi punctum G tangit rectam lineam, atque ideo in æquatione quâvis, quâ relatio inter abſciſſam AD & ordinatam DG habetur, indeterminatæ illæ AD & DG ad unicam tantùm dimenſionem aſcendunt, ſcribendo in hâc æquatione $\frac{OA \times AB}{ad}$ pro AD, & $\frac{OA \times dg}{ad}$ pro DG, producetur æquatio nova; in quâ abſciſſa nova, *ad*, & ordinata nova, *dg*, ad unicam tantùm dimenſionem aſcendent, atque ideo quæ deſignat lineam rectam. Sin AD & DG, vel earum alterutra, aſcendebant ad duas dimenſiones in æquatione primâ, aſcendent itidem *ad* & *dg* ad duas in æquatione ſecundâ. Et ſic de tribus vel pluribus dimenſionibus. Indeterminatæ, *ad*, *dg*, in æquatione ſecundâ, & AD, DG in prima, aſcendent ſemper ad eundem dimenſionum numerum, & propterea lineæ, quas puncta G, *g* tangunt, ſunt ejuſdem ordinis analytici.



Dico præterea, quòd ſi recta aliqua tangat lineam curvam in figurâ primâ; hæc recta, eodem modo cum curvâ in figuram novam tranſlata, tanget lineam illam curvam in figurâ novâ; & contrà. Nam ſi curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem & coeunt

coeunt in figurâ primâ, puncta eadem tranſlata accedent ad invicem & coibunt in figurâ novâ; atque ideo rectæ, quibus hæc puncta junguntur, ſimul evadent curvarum tangentes in figurâ utrâque.

Componi poſſent harum aſſertionum demonſtrationes more magis geometrico. Sed brevitati conſulo.

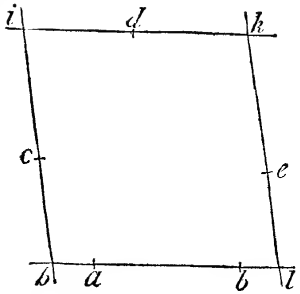
Igitur ſi figura rectilinea in aliam tranſmutanda eſt, ſufficit rectarum, à quibus conflatur, interſectiones transferre, & per eaſdem in figurâ novâ lineas rectas ducere. Sin curvilineam tranſmutare oportet, transferenda ſunt puncta, tangentes, & aliæ rectæ, quarum ope curva linea definitur. Inſervit autem hoc Lemma ſolutioni difficiliorum Problematum, tranſmutando figuras propoſitas in ſimpliciores. Nam rectæ quævis convergentes tranſmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo lineam quamvis rectam, quæ per concurſum convergentium tranſit; idque quia concurſus ille hoc pacto abit in infinitum; lineæ autem parallelæ ſunt, quæ nuſquam concurrunt. Poſtquam autem Problema ſolvitur in figurâ novâ; ſi per inverſas operationes tranſmutetur hæc figura in figuram primam, habebitur ſolutio quæſita.

Utile eſt etiam hoc Lemma in ſolutione ſolidorum Problematum. Nam quoties duæ ſectiones conicæ obvenerint, quarum interſectione Problema ſolvi poteſt, tranſmutare licet earum alterutram, ſi Hyperbola ſit vel Parabola, in Ellipſin: deinde Ellipſis facile mutatur in Circulum. Recta item & ſectio conica, in conſtructione planorum Problematum, vertuntur in rectam & circulum.

PROP. XXV. PROB. XVII.

Trajectoriam deſcribere, quæ per data duo puncta tranſibit, & rectas tres continget poſitione datas.

Per concurſum tangentium quarumvis duarum cum ſe invicem, & concurſum tangentis tertiæ cum rectâ illâ, quæ per puncta duo data tranſit, age rectam infinitam; eâque adhibitâ pro radio ordinato primo, tranſmutetur figura, per Lemma ſuperius, in figuram novam. In hâc figurâ tangentes illæ duæ evadent ſibi invicem



invicem parallelæ, & tangens tertia fiet parallela rectæ per puncta duo data tranſeunti. Sunto *hi*, *kl* tangentes illæ duæ parallelæ, *ik* tangens tertia, & *hl* recta huic parallela tranſiens per puncta illa, *a*, *b*, per quæ conica ſectio in hâc figurâ novâ tranſire debet, & parallelogrammum *hikl* complens. Secentur rectæ *hi*, *ik*, *kl* in *c*, *d*, *e*, ita ut ſit *hc* ad latus quadratum rectanguli *ahb*, *ic* ad *id*, & *ke* ad *kd*, ut eſt ſumma rectarum *hi* & *kl* ad ſummam trium linearum, quarum prima eſt recta *ik*, & alteræ duæ ſunt latera quadrata rectangulorum *ahb* & *alb*: & erunt *c*, *d*, *e* puncta contactuum. Etenim, ex conicis, ſunt *hc* quadratum ad rectangulum *ahb*, & *ic* quadratum ad *id* quadratum, & *ke* quadratum ad *kd* quadratum, & *el* quadratum ad rectangulum *alb* in eâdem ratione; & propterea *hc* ad latus quadratum ipſius *ahb*, *ic* ad *id*, *ke* ad *kd*, & *el* ad latus quadratum ipſius *alb* ſunt in ſubduplicatâ illâ ratione; & compoſitè, in datâ ratione omnium antecedentium *hi* & *kl* ad omnes conſequentes, quæ ſunt latus quadratum rectanguli *ahb*, & recta *ik*, & latus quadratum rectanguli *alb*. Habentur igitur, ex datâ illâ ratione, puncta contactuum *c*, *d*, *e*, in figurâ novâ. Per inverſas operationes Lemmatis noviſſimi transferantur hæc puncta in figuram primam, & ibi (per Prob. XIV.) deſcribetur trajectoria. Q. E. F. Cæterùm perinde ut puncta *a*, *b* jacent vel inter puncta *h*, *l*, vel extra, debent puncta *c*, *d*, *e* vel inter puncta *h*, *i*, *k*, *l* capi, vel extra. Si punctorum *a*, *b* alterutrum cadit inter puncta *h*, *l*, & alterum extra, Problema impoſſibile eſt.

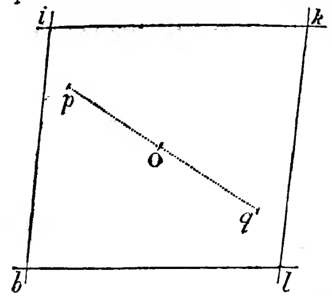
PROP. XXVI. PROB. XVIII.

Trajectoriam deſcribere, quæ tranſibit per punctum datum, & rectas quatuor poſitione datas continget.

Ab interſectione communi duarum quarumlibet tangentium ad interſectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita; &, eâdem pro radio ordinato primo adhibitâ, tranſmutetur

I figura

figura (per Lem. XXII.) in figuram novam, & tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum primum concurrebant, jam evadent

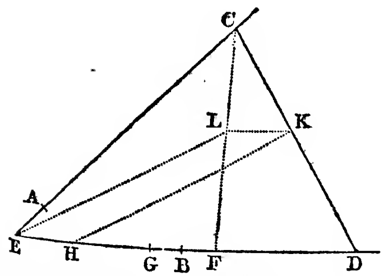


parallelæ. Sunto illæ *hi* & *kl*, *ik* & *hl*, continentes parallelogrammum *hikl*. Sitque *p* punctum, in hâc novâ figurâ, puncto in figurâ primâ dato reſpondens. Per figuræ centrum *o* agatur *pq*, & exiſtente *oq* æquali *op*, erit *q* punctum alterum, per quod ſectio conica in hâc figurâ novâ tranſire debet. Per Lemmatis XXII. operationem inverſam transferatur hoc punctum in figuram primam, & ibi habebuntur puncta duo per quæ trajectoria deſcribenda eſt. Per eadem vero deſcribi poteſt trajectoria illa per Problema XVII. Q. E. F.

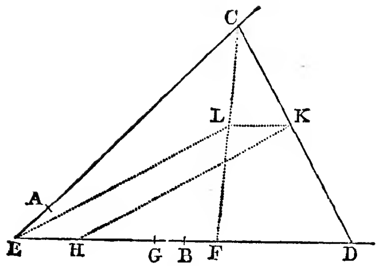
LEMMA XXII.

Si rectæ duæ poſitione datæ, AC, BD, *ad data puncta,* A, B, *terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, & recta* CD, *quâ puncta indeterminata* C, D *junguntur, ſecetur in ratione datâ in* K: *dico, quòd punctum* K *locabitur in rectâ poſitione datâ.*

Concurrant enim rectæ AC, BD in E, & in BE capiatur BG ad AE ut eſt BD ad AC, ſitque FD ſemper æqualis datæ EG; & erit



ex conſtructione EC ad GD, hoc eſt, ad EF, ut AC ad BD, ideoque in ratione datâ, & propterea dabitur ſpecie triangulum EFC. Secetur CF in L, ut ſit CL ad CF in ratione CK ad CK; &, ob datam illam rationem, dabitur etiam ſpecie triangulum EFL; proindeque punctum L locabitur in rectâ EL poſitione datâ. Junge LK, & ſimilia erunt triangula CLK, CFD; & ob datam FD & datam rationem LK ad FD, dabitur LK. Huic æqualis capiatur EH, & erit



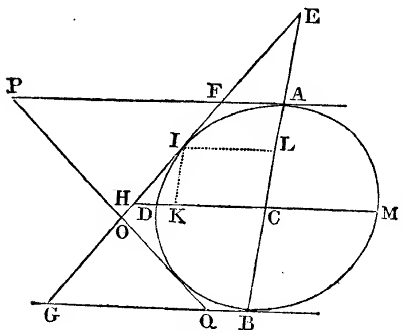
erit ſemper ELKH parallelogrammum. Locatur igitur punctum K in parallelogrammi illius latere poſitione dato HK. Q. E. D.

Corol. Ob datam ſpecie figuram EFLC, rectæ tres EF, EL & EC, id eſt, GD, HK & EC, datas habent rationes ad invicem.

LEMMA XXIV.

Si rectæ tres tangant quamcunque coni ſectionem, quarum duæ parallelæ ſint ac dentur poſitione; dico, quòd ſectionis ſemidiameter hiſce duabus parallela, ſit media proportionalis inter harum ſegmenta, punctis contactuum & tangenti tertiæ interjecta.

Sunto AF, GB parallelæ duæ coni ſectionem ADB tangentes in A & B; EF recta tertia coni ſectionem tangens in I, & occurrens prioribus tangentibus in F & G; ſitque CD ſemidiameter figuræ tangentibus parallela: dico quòd AF, CD, BG ſunt continuè proportionales.



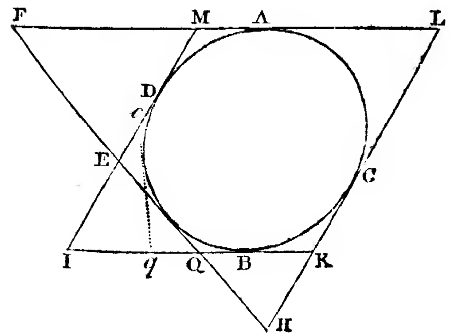
Nam ſi diametri conjugatæ AB, DM tangenti FG occurrant in E & H, ſeque mutuò ſecent in C, & compleatur parallelogrammum IKCL; erit, ex naturâ ſectionum conicarum, ut EC ad CA ita CA ad CL, & ita diviſim EC−CA ad CA−CL, ſeu EA ad AL, & compoſitè EA ad EA+AL, ſeu EL, ut EC ad EC+CA, ſeu EB; ideoque, ob ſimilitudinem triangulorum EAF, ELI, ECH, EBG, AF ad LI ut CH ad BG. Eſt itidem, ex naturâ ſectionum conicarum, LI ſeu CK ad CD ut CD ad CH; atque ideo ex æquo perturbatè AF ad CD ut CD ad BG. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi tangentes duæ FG, PQ tangentibus parallelis AF, BG occurrant in F & G, P & Q, ſeque mutuò ſecent in O; erit ex æquo perturbatè AF & BQ ut AP ad BG, & diviſim ut FP ad GQ, atque ideo ut FO ad OG.

Corol. 2. Unde etiam rectæ duæ, PG, FQ, per puncta P & G, F & Q ductæ, concurrent ad rectam ACB per centrum figuræ & puncta contactuum, A, B, tranſeuntem.

LEMMA XXV.

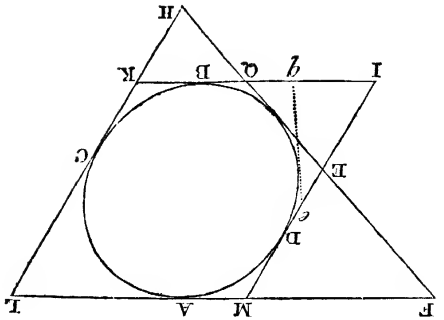
Si parallelogrammi latera quatuor infinitè producta tangant ſectionem quamcunque conicam, & abſcindantur ad tangentem quamvis quintam; ſumantur autem laterum quorumvis duorum conterminorum abſciſſæ terminatæ ad angulos oppoſitos parallelogrammi: dico, quòd abſciſſa alterutra ſit ad latus illud à quo eſt abſciſſa, ut pars lateris alterius contermini, inter punctum contactûs & latus tertium, eſt ad abſciſſarum alteram.



Tangant parallelogrammi MLIK latera quatuor, ML, IK, KL, MI, ſectionem conicam in A, B, C, D; & ſecet tangens quinta, FQ, hæc latera in F, Q, H & E; ſumantur autem laterum MI, KI abſciſſæ ME, KQ, vel laterum KL, ML abſciſſæ KH, MF: dico, quòd ſit ME ad MI ut BK ad KQ; & KH ad KL ut AM ad MF. Nam per corollarium primum Lemmatis ſuperioris eſt ME ad EI ut AM, ſeu BK, ad BQ; & componendo, ME ad MI ut BK ad KQ. Q. E. D. Item KH ad HL ut BK, ſeu AM, ad AF; & dividendo, KH ad KL ut AM ad MF. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi datur parallelogrammum IKLM, circa datam ſectionem conicam deſcriptum, dabitur rectangulum KQ×ME, ut & huic æquale rectangulum KH×MF. Æquantur enim rectangula illa ob ſimilitudinem triangulorum KQH, MFE.

 Corol.



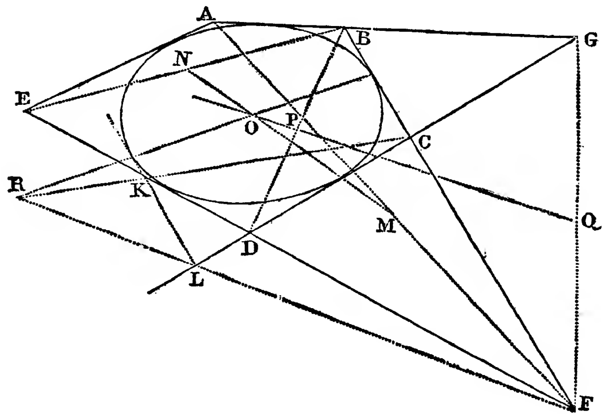
Corol. 2. Et ſi ſexta ducatur tangens, *eq*, tangentibus KI, MI occurrens in *q* & *e*; rectangulum KQ × ME æquabitur rectangulo K*q* × M*e*; eritque KQ ad M*e* ut K*q* ad ME, & diviſim ut Q*q* ad E*e*.

Corol. 3. Unde etiam ſi E*q*, *e*Q jungantur & biſecentur, & recta per puncta biſectionum agatur, tranſibit hæc per centrum ſectionis conicæ. Nam cùm ſit Q*q* ad E*e* ut KQ ad M*e*, tranſibit eadem recta per medium omnium E*q*, *e*Q, MK (per Lem. XXIII.) & medium rectæ MK eſt centrum ſectionis.

PROP. XXVII. PROB. XIX.

Trajectoriam deſcribere, quæ rectas quinque poſitione datas continget.

Dentur poſitione tangentes ABG, BCF, GCD, FDE, EA. Figuræ quadrilateræ ſub quatuor quibuſvis contentæ, ABFE, diagonales, AF, BE, biſeca in M & N, & (per Corol. 3. Lem. XXV.) recta MN, per



puncta

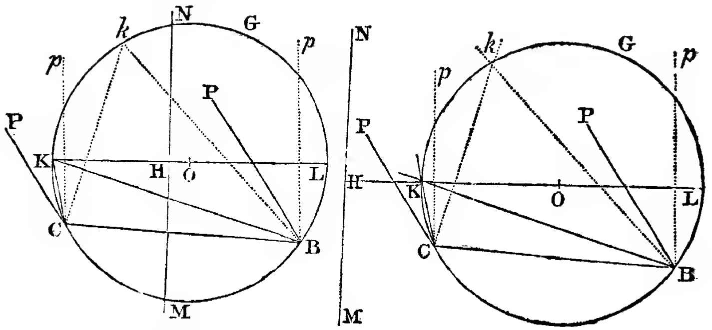
puncta biſectionum acta, tranſibit per centrum trajectoriæ. Rurſus figuræ quadrilateræ, BGDF, ſub aliis quibuſvis quatuor tangentibus contentæ, diagonales (ut ita dicam) BD, GF biſeca in P & Q: & recta PQ, per puncta biſectionum acta, tranſibit per centrum trajectoriæ. Dabitur ergo centrum in concurſu biſecantium. Sit illud O. Tangenti cuivis, BC, parallelam age KL, ad eam diſtantiam, ut centrum O in medio inter parallelas locetur, & acta KL tanget trajectoriam deſcribendam. Secet hæc tangentes alias quaſvis duas, GCD, FDE, in L & K. Per harum tangentium non parallelarum CL, FK cum parallelis CF, KL concurſus, C & K, F & L, age CK, FL concurrentes in R, & recta OR ducta & producta ſecabit tangentes parallelas CF, KL in punctis contactuum. Patet hoc per Corol. 2. Lem. XXIV. Eâdem methodo invenire licet alia contactuum puncta, & tum demum per conſtruct. Prob. XIV. trajectoriam deſcribere. Q. E. F.

Scholium.

Problemata, ubi dantur trajectoriarum vel centra vel aſymptoti, includuntur in præcedentibus. Nam datis punctis & tangentibus unà cum centro, dantur alia totidem puncta aliæque tangentes à centro ex alterâ ejus parte æqualiter diſtantes. Aſymptotos autem pro tangente habenda eſt, & ejus terminus infinitè diſtans (ſi ita loqui fas ſit) pro puncto contactûs. Concipe tangentis cujuſvis punctum contactûs abire in infinitum, & tangens vertetur in Aſymptoton, atque conſtructiones Problematum præcedentium vertentur in conſtructiones ubi Aſymptotos datur.

Poſtquam trajectoria deſcripta eſt, invenire licet axes & umbilicos ejus hâc methodo. In conſtructione & figurâ Lemmatis XXI. fac ut angulorum mobilium PBN, PCN crura, BP, CP, quorum concurſu trajectoria deſcribebatur, ſint ſibi invicem parallela, eumque ſervantia ſitum revolvantur circa polos ſuos B, C in figurâ illâ. Interea verò deſcribant altera angulorum illorum crura, CN, BN, concurſu ſuo K vel *k*, circulum BGKC. Sit circuli hujus centrum O. Ab hoc centro ad regulam MN, ad quam altera illa crura, CN, BN, interea concurrebant, dum trajectoria deſcribebatur demitte normalem OH circulo occurrentem in K & L. Et ubi

crura



crura illa altera CK, BK concurrunt ad punctum illud K, quod regulæ propius eſt, crura prima, CP, BP, parallela erunt axi majori, & perpendicularia minori; & contrarium eveniet, ſi crura eadem concurrunt ad punctum remotius L. Unde ſi detur trajectoriæ centrum, dabuntur axes. Hiſce autem datis, umbilici ſunt in promptu.

Axium verò quadrata ſunt ad invicem ut KH ad LH, & inde facile eſt trajectoriam ſpecie datam per data quatuor puncta deſcribere. Nam ſi duo ex punctis datis conſtituantur poli C, B, tertium dabit angulos mobiles, PCK, PBK; his autem datis deſcribi poteſt circulus BGKC. Tum, ob datam ſpecie trajectoriam, dabitur ratio OH ad OK, ideoque ipſa OH. Centro O, & intervallo OH, deſcribe alium circulum, & recta, quæ tangit hunc circulum, & tranſit per concurſum crurum CK, BK, ubi crura prima, CP, BP, concurrunt ad quartum datum punctum, erit regula illa MN cujus ope trajectoria deſcribetur. Unde etiam viciſſim trapezium ſpecie datum (ſi caſus quidam impoſſibiles excipiantur) in datâ quâvis ſectione conicâ inſcribi poteſt.

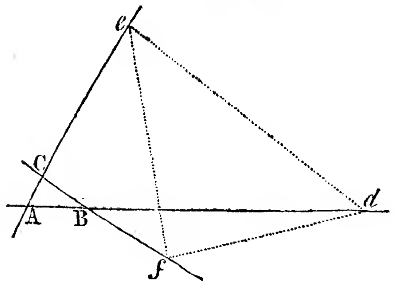
Sunt & alia Lemmata, quorum ope trajectoriæ ſpecie datæ, datis punctis & tangentibus, deſcribi poſſunt. Ejus generis eſt quòd, ſi recta linea per punctum quodvis poſitione datum ducatur, quæ datam coni ſectionem in punctis duobus interſecet, & interſectionum intervallum biſecetur, punctum biſectionis tanget aliam coni ſectionem ejuſdem ſpeciei cum priore, atque axes habentem prioris axibus parallelos. Sed propero ad magis utilia.

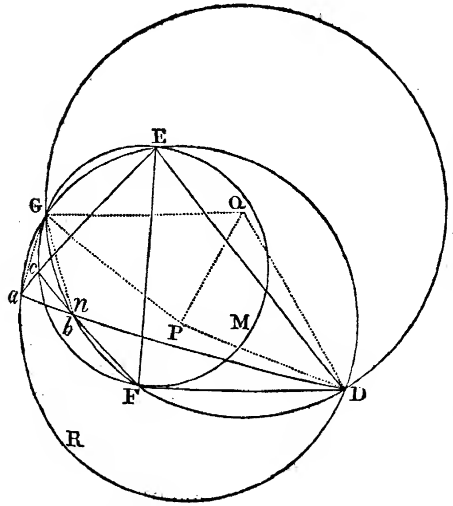
LEMMA.

LEMMA XXVI.

Trianguli, ſpecie & magnitudine dati, tres angulos ad rectas totidem poſitione datas, quæ non ſunt omnes parallelæ, ſingulos ad ſingulas ponere.

Dantur poſitione tres rectæ infinitæ AB, AC, BC, & oportet triangulum DEF ita locare, ut angulus ejus D lineam AB, angulus E lineam AC, & angulus F lineam BC tangat. Super DE, DF & EF deſcribe tria circulorum ſegmenta DRE, DGF, EMF; quæ capiant angulos angulis BAC, ABC, ACB æquales reſpectivè. Deſcribantur autem hæc ſegmenta ad eas partes linearum DE, DF, EF, ut literæ D, R, E, D eodem ordine cum literis B, A, C, B; literæ D, G, F, D eodem cum literis A, B, C, A; & literæ E, M, F, E eodem cum literis A, C, B, A in orbem redeant; deinde compleantur hæc ſegmenta in circulos integros. Secent circuli duo priores ſe mutuò in G, ſintque centra eorum P & Q. Junctis GP, PQ, cape G*a* ad AB ut eſt GP ad PQ; & centro G, intervallo G*a*, deſcribe circulum, qui ſecet circulum primum, DGE, in *a*. Jungatur tum *a*D ſecans circulum ſecundum, DFG, in *b*, tum *a*E ſecans circulum tertium, EMF, in *c*. Et jam licet figuram ABC*def* conſtituere

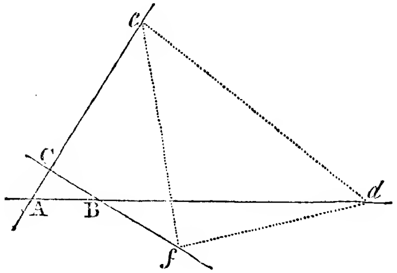


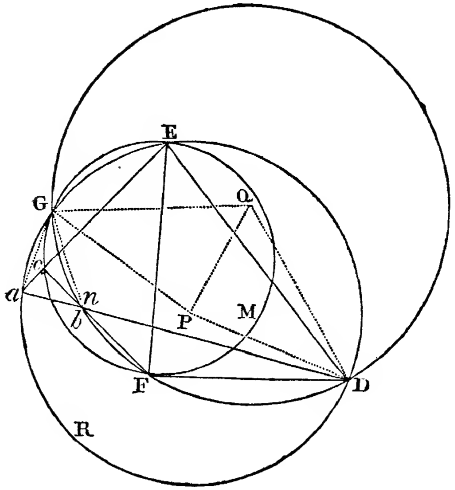


ſtituere

ſtituere ſimilem & æqualem figuræ *abc*DEF. Quo facto perficitur Problema.

Agatur enim FC ipſi *a*D occurrens in *n*, & jungantur *a*G, *b*G, QG, QD, PD. Ex conſtructione eſt angulus E*a*D æqualis angulo CAB, & angulus *ac*F æqualis angulo ACB, ideoque triangulum *anc* triangulo ABC æquiangulum. Ergo angulus *anc*, ſeu F*n*D, angulo ABC, ideoque angulo F*b*D æqualis eſt; & propterea punctum *n* incidit in punctum *b*. Porro angulus GPQ, qui dimidius eſt anguli ad centrum GPD, æqualis eſt angulo ad circumferentiam G*a*D; & angulus GQP, qui dimidius eſt anguli ad centrum GQD, æqualis eſt complemento ad duos rectos anguli ad circumferentiam G*b*D, ideoque æqualis angulo G*ba*; ſuntque ideo triangula GPQ, G*ab* ſimilia; & G*a* eſt ad *ab* ut GP ad PQ; id eſt (ex conſtructione) ut G*a* ad AB. Æquantur itaque *ab* & AB; & propterea triangula *abc*, ABC, quæ modò ſimilia eſſe probavimus, ſunt etiam æqualia. Unde, cùm tangant inſuper trianguli DEF anguli, D, E, F trianguli *abc* latera *ab*, *ac*, *bc*, reſpectivè, compleri poteſt figura ABC*def* figuræ *abc*DEF ſimilis & æqualis, atque eam complendo ſolvetur Problema. Q. E. F.





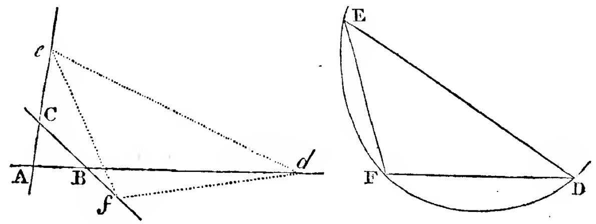
Corol. Hinc recta duci poteſt, cujus partes, longitudine datæ, rectis tribus poſitione datis interjacebunt. Concipe triangulum DEF, puncto D ad latus EF accedente, & lateribus DE, DF in directum

rectum poſitis, mutari in lineam rectam, cujus pars data, DE, rectis poſitione datis AB, AC, & pars data, DF, rectis poſitione datis AB, BC, interponi debet; & applicando conſtructionem præcedentem ad hunc caſum ſolvetur Problema.

PROP. XXVIII. PROB. XX.

Trajectoriam ſpecie & magnitudine datam deſcribere, cujus partes datæ rectis tribus, poſitione datis, interjacebunt.

Deſcribenda ſit trajectoria, quæ ſit ſimilis & æqualis lineæ curvæ DEF, quæque à rectis tribus, AB, AC, BC, poſitione datis, in partes datis hujus partibus, DE & EF, ſimiles & æquales ſecabitur. Age rectas DE, EF, DF, & trianguli hujus, DEF, pone angulos D, E, F ad rectas illas poſitione datas (per Lem. XXVI.) dein circa triangulum deſcribe trajectoriam curvæ DEF ſimilem & æqualem. Q. E. F.



LEMMA XXVII.

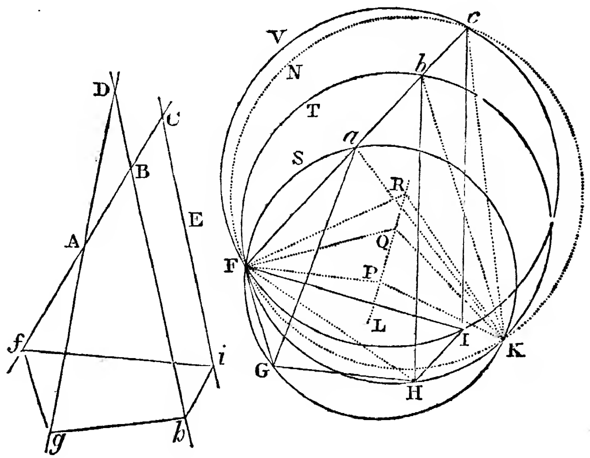
Trapezium ſpecie datum deſcribere, cujus anguli ad rectas quatuor poſitione datas, quæ neque omnes parallelæ ſunt, neque ad commune punctum convergunt, ſinguli ad ſingulas conſiſtent.

Dentur poſitione rectæ quatuor, ABC, AD, BD, CE; quarum prima ſecet ſecundam in A, tertiam in B, & quartam in C: & deſcribendum ſit trapezium *fghi*, quod ſit trapezio FGHI ſimile; & cujus angulus *f*, angulo dato F æqualis, tangat rectam ABC; cæterique anguli *g*, *h*, *i*, cæteris angulis datis G, H, I æquales, tangant cæteras lineas AD, BD, CE reſpectivè. Jungatur FH, & ſuper FG, FH, FI deſcribantur totidem circulorum ſegmenta FSG, FTH,

FVI;

De Motu Corporum

FVI; quorum primum FSG capiat angulum æqualem angulo BAD; ſecundum FTH capiat angulum æqualem angulo CBD; ac tertium



FVI capiat angulum æqualem angulo ACE. Deſcribi autem debent ſegmenta ad eas partes linearum FG, FH, FI, ut literarum F, S, G, F idem ſit ordo circularis, qui literarum B, A, D, B; utque literæ F, T, H, F eodem ordine cum literis C, B, D, C; & literæ F, V, I, F eodem cum literis A, C, E, A in orbem redeant. Compleantur ſegmenta in circulos integros, ſitque P centrum circuli primi FSG, & Q centrum ſecundi FTH. Jungatur & utrinque producatur PQ, & in eâ capiatur QR, in eâ ratione ad PQ, quam habet BC ad AB. Capiatur autem QR ad eas partes puncti Q, ut literarum P, Q, R idem ſit ordo atque literarum A, B, C: centroque, R & intervallo RF, deſcribatur circulus quartus, FN*c*, ſecans circulum tertium, FVI, in *c*. Jungatur F*c* ſecans circulum primum in *a*, & ſecundum in *b*. Agantur *a*G, *b*H, *c*I, & figuræ *abc*FGHI ſimilis conſtitui poteſt figura ABC*fgbi*. Quo facto erit trapezium *fgbi* illud ipſum, quod conſtituere oportebat.

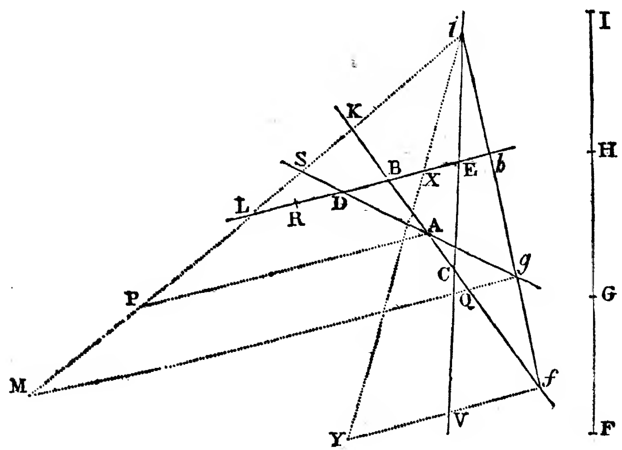
Secent enim circuli duo primi, FSG, FTH, ſe mutuò in K. Jungantur PK, QK, RK, *a*K, *b*K, *c*K, & producatur QP ad L. Anguli ad circumferentias, F*a*K, F*b*K, F*c*K, ſunt ſemiſſes angulorum FPK, FQK, FRK ad centra; ideoque angulorum illorum dimidiis, LPK, LQK,

Liber Primus.

LQK, LRK, æquales. Eſt ergo figura PQRK figuræ *abc*K æquiangula & ſimilis; & propterea *ab* eſt ad *bc* ut PQ ad QR, id eſt, ut AB ad BC. Angulis inſuper F*a*G, F*b*H, F*c*I æquantur *f*A*g*, *f*B*b*, *fci*, per conſtructionem. Ergo figuræ *abc*FGHI figura ſimilis ABC*fgbi* compleri poteſt. Quo facto trapezium *fgbi* conſtituetur ſimile trapezio FGHI, & angulis ſuis, *f*, *g*, *b*, *i*, tanget rectas ABC, AD, BD, CE. Q. E. F.

Corol. Hinc recta duci poteſt, cujus partes, rectis quatuor poſitione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli FGH, GHI uſque eo, ut rectæ FG, GH, HI in directum jaceant; & in hoc caſu, conſtruendo Problema, ducetur recta *fgbi*, cujus partes, *fg*, *gb*, *bi*, rectis quatuor poſitione datis, AB & AD, AD & BD, BD & CE, interjectæ, erunt ad invicem ut lineæ FG, GH, HI, eundemque ſervabunt ordinem inter ſe. Idem verò ſic fit expeditiùs.

Producantur AB ad K, & BD ad L, ut ſit BK ad AB ut HI ad GH; & DL ad BD ut GI ad FG; & jungatur KL occurrens rectæ CE in *i*.

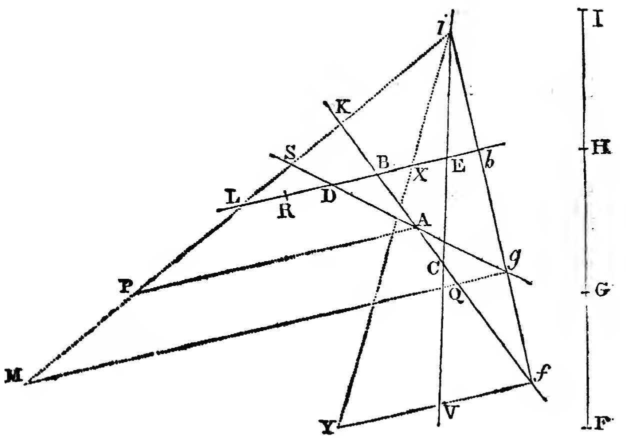


Producatur *i*L ad M, ut ſit LM ad *i*L ut GH ad HI, & agatur tum MQ ipſi LB parallela, rectæque AD occurrens in *g*, tum *gi* ſecans AB, BD in *f*, *b*. Dico factum.

Secent enim M*g* rectam AB in Q; & AD, rectam KL in S; & agatur

gatur AP, quæ ſit ipſi BD parallela, & occurrat *i*L in P; & erunt *g*M ad L*h* (*gi* ad *hi*, M*i* ad L*i*, GI ad HI, AK ad BK) & AP ad BL in eâdem ratione. Secetur DL in R, ut ſit DL ad RL in eâdem illâ ratione; &, ob proportionales *g*S ad *g*M, AS ad AP, & DS ad DL, erit, ex æquo, ut *g*S ad L*h* ita AS ad BL, & DS ad RL; & mixtim, BL−RL ad L*h*−BL ut AS−DS ad *g*S−AS. Id eſt, BR ad B*h* ut AD ad A*g*, ideoque ut BD ad *g*Q. Et viciſſim, BR ad BD ut B*h* ad *g*Q, ſeu *fh* ad *fg*. Sed, ex conſtructione, linea BL eâdem ratione ſecta fuit in D & R, atque linea FI in G & H: ideoque eſt BR ad BD ut FH ad FG. Ergo *fh* eſt ad *fg* ut FH ad FG. Cùm igitur ſit etiam *gi* ad *hi* ut M*i* ad L*i*, id eſt, ut GI ad HI, patet lineas FI, *fi*, in *g* & *h*, G & H, ſimiliter ſectas eſſe. Q. E. F.

In conſtructione Corollarii hujus, poſtquam ducitur LK ſecans



CE in *i*, producere licet *i*E ad V, ut ſit EV ad E*i* ut FH ad HI, & agere V*f* parallelam ipſi BD. Eodem recidit ſi centro *i*, intervallo IH, deſcribatur circulus ſecans BD in X, & producatur *i*X ad Y, ut ſit *i*Y æqualis IF, & agatur Y*f* ipſi BD parallela.

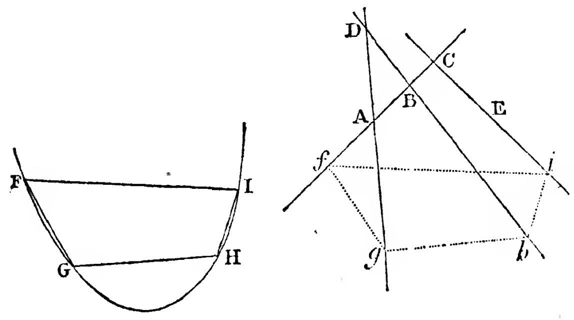
Problematis hujus ſolutiones alias *Wrennus* & *Walliſius* olim excogitârunt.

PROP.

PROP. XXIX. PROB. XXI.

Trajectoriam ſpecie datam deſcribere, quæ à rectis quatuor, poſitione datis, in partes ſecabitur, ordine, ſpecie & proportione datas.

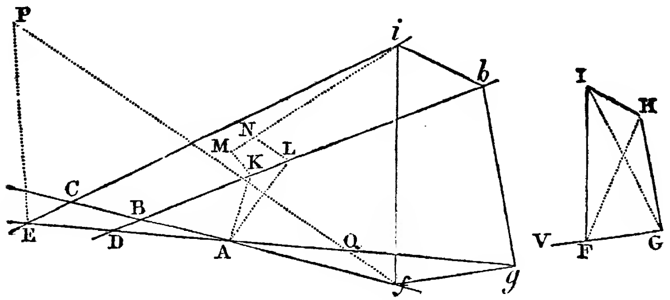
Deſcribenda ſit trajectoria, quæ ſimilis ſit lineæ curvæ FGHI, & cujus partes, illius partibus FG, GH, HI ſimiles & proportionales, rectis AB & BD, AD & BD, BD & CE poſitione datis, prima primis, ſecunda ſecundis, tertia tertiis interjaceant. Actis rectis FG, GH, HI, FI, deſcribatur (per Lem. XXVII.) Trapezium *fghi* quod ſit trapezio FGHI ſimile, & cujus anguli *f*, *g*, *h*, *i* tangant rectas illas poſitione datas AB, AD, BD, CE, ſinguli ſingulas dicto ordine. Dein circa hoc trapezium deſcribatur trajectoria curvæ lineæ FGHI conſimilis.



Scholium.

Conſtrui etiam poteſt hoc Problema ut ſequitur. Junctis FG, GH, HI, FI, produc GF ad V, jungeque FH, IG, & angulis FGH, VFH fac angulos CAK, DAL æquales. Concurrant AK, AL cum rectâ BD in K & L, & inde agantur KM, LN; quarum KM conſtituat angulum AKM æqualem angulo GHI, ſitque ad AK ut eſt HI ad GH; & LN conſtituat angulum ALN æqualem angulo FHI, ſitque ad AL ut HI ad FH. Ducantur autem AK, KM, AL, LN ad eas partes linearum AD, AK, AL, ut literæ C,A,K,M,C; A,L,K,A; D,A,L,N,D; eodem ordine cum literis F,G,H,I,F in orbem redeant; & acta MN occurrat rectæ CE in *i*. Fac angulum *i*EP æqualem angulo IGF; ſitque PE ad E*i* ut FG ad GI; & per P agatur PQ*f*, quæ cum rectâ ADE contineat angulum PQE æqualem angulo FIG, rectæque AB occurrat in *f*, & jungatur *fi*. Agantur autem PE ad PQ, ad eas partes linearum CE, PE, ut literarum P,E,*i*,P & P,E,Q,P idem ſit ordo circularis qui literarum F,G,H,I,F; & ſi ſuper lineâ *fi*, eodem quoque

quoque literarum ordine, conſtituatur trapezium, *fgbi*, trapezio



FGHI ſimile, & circumſcribatur trajectoria ſpecie data, ſolvetur Problema.

Hactenus de orbibus inveniendis. Supereſt ut motus corporum in orbibus inventis determinemus.

SECTIO VI.

De inventione motuum in orbibus datis.

PROP. XXX. PROB. XXII.

Corporis in datâ trajectoriâ parabolicâ moti invenire locum ad tempus aſſignatum.

Sit S umbilicus, & A vertex principalis Parabolæ, ſitque $4AS \times M$ æquale

(a) A puncto H in PO deducatur ad perpendiculum recta HR. Propter angulum ad G rectum, rectaſque GA, GS inter ſe æquales, junctæ HA, HS inter ſe æquales erunt. Punctum igitur A eſt ad circulum centro H radio HS ſcriptum, ad quem eſt etiam punctum parabolæ P. Duæ igitur HA, HP inter ſe æquales; et quadrata ex HG, AG ſimul ſumpta, cùm propter angulum ad G rectum quadrato ex HA æqualia ſint, quadrato quoque ex HP erunt æqualia. Sed propter angulum ad R rectum, quadratum ex HP duobus quadratis ex HR, RP ſimul ſumptis æquale eſt. Et cùm propter figuram HROG parallelogrammam, æquales inter ſe ſint illæ HR, GO, necnon illæ HG, RO, erit $HR^2 = GO^2 = \overline{AO-AG}|^2$, et $PR^2 = \overline{PO-GH}|^2$. Quare HP^2, ſive $AG^2 + GH^2 = \overline{AO-AG}|^2 + \overline{PO-GH}|^2$. *(Eadem fere Le Sœur & Jacquier.)*

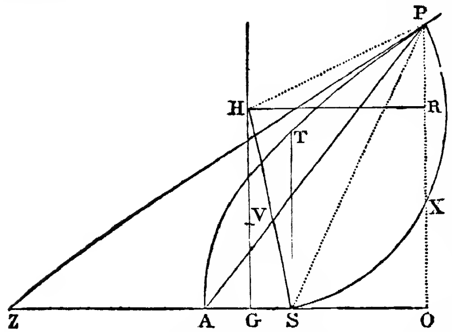
(b) $2AG \times AO = SA \times AO$; nempe cùm GA ipſius SA ſemiſſis ſit. Et $SA \times AO = \frac{1}{4}PO^2$, propter parabolam. Quare $AO^2 + PO^2 - 2GAO = AO^2 + PO^2 - \frac{1}{4}PO^2 = AO^2 + \frac{3}{4}PO^2$. *(Eadem fere Le Sœur & Jacquier, et in notis ſuis MSS. Gregorius.)*

(c) $\frac{4AS-3SO}{6} \times PO = \frac{2}{3}AO \times OP - \frac{1}{2}SO \times OP$. Sed ſpatium $\frac{2}{3}AO \times OP$ æquale eſt areæ parabolicæ APO. (Hamilton. Conic. Lib. III. 13.) & $\frac{1}{2}SO \times OP$ æquale eſt triangulo SOP. Quare $\frac{2}{3}AO \times OP - \frac{1}{2}SO \times OP$ æquale erit areæ parabolicæ APS. *(Eadem fere Le Sœur & Jacquier, et in notis ſuis MSS. Gregorius.)*

Verùm tota hæc demonſtratio magis geometricè ad hunc ferè modum concinnari poteſt.

Capiatur

æquale areæ parabolicæ abſcindendæ APS, quæ, radio SP, vel poſt



exceſſum corporis de vertice deſcripta fuit, vel ante appulſum ejus ad verticem deſcribenda eſt. Innoteſcit quantitas areæ illius abſcindendæ ex tempore ipſi proportionali. Biſeca AS in G, erigeque perpendiculum GH æquale 3M; & circulus centro H, intervallo HS, deſcriptus ſecabit Parabolam in loco quæſito P. Nam, demiſſâ ad axem perpendiculari PO, & ductâ PH, eſt $AGq + GHq$ ($= HPq = \overline{AO-AG}$: *quad.* + $\overline{PO-GH}$: *quad.* (a) $= AOq + POq - 2GAO - 2GH \times PO + AGq + GHq$. Unde $2GH \times PO$ $(= AOq + POq - 2GAO) = AOq + \frac{3}{4}POq$ (b). Pro AOq ſcribe $AO \times \frac{POq}{4AS}$; &, applicatis terminis omnibus ad 3PO, ductiſque in 2AS, fiet $\frac{4}{3}GH \times AS$ $(= \frac{1}{6}AO \times PO + \frac{1}{2}AS \times PO = \frac{AO+3AS}{6} \times PO = \frac{4AO-3SO}{6} \times PO =$ areæ $\overline{APO-SPO}$) (c) = areæ APS. Sed GH erat 3M, & inde $\frac{4}{3}GH \times AS$ eſt $4AS \times M$. Ergo area abſciſſa APS æqualis eſt abſcindendæ $4AS \times M$. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc GH eſt ad AS, ut tempus, quo corpus deſcripſit arcum AP, ad tempus, quo corpus deſcripſit arcum inter verticem A &

Capiatur AZ tripla ipſius AS; jungantur AP, ZP. Recta autem PO circulo, centro H, radio HS ſcripto, iterum in puncto X occurrat. Jam cùm puncta quatuor A, S, P, X ad circulum illum ſint, idcirco rectangula POX, AOS erunt inter ſe æqualia. (El. III. 36.) Quare ſi rectangulum OAS utrique æqualium addatur, duo POX, OAS ſimul ſumpta duobus AOS, OAS ſimul ſumptis, hoc eſt (per El. II. 2.) quadrato ex AO, æqualia erunt. Addatur utrinque rectangulum $PO \times XR$: erunt tria illa, POX, $PO \times XR$, OAS, ſimul ſumpta duobus, quadrato ex AO et rectangulo $PO \times XR$, ſimul ſumptis æqualia. Sed è tribus illis POX, $PO \times XR$, OAS, duo quidem, POX, $PO \times XR$, rectangulum POR conficiunt. (El. II. 2.) Quare duo POR, OAS ſimul ſumpta, duobus, quadrato ex AO rectanguloque $PO \times XR$, erunt æqualia. Sive, cùm rectæ XR, PR inter ſe æquales ſint (El. III. 3.) duo POR, OAS, duobus, quadrato ex AO rectanguloque $PO \times PR$, æqualia erunt. Additoque utrinque rectangulo POR, fiet duplum rectanguli POR cum rectangulo OAS, quadratis ex AO, PO ſimul ſumptis æquale. Hoc eſt, cùm recta OR ipſi GH ſit æqualis, et rectangulum OAS (propter parabolam) æquale ſit parti quartæ quadrati ex PO, erit rectangulum $2GH \times PO$ cum parte quartâ quadrati ex PO, æquale quadratis duobus ex AO, PO ſimul ſumptis. Ablatâque utrinque parte quartâ quadrati ex PO, erit $GH \times 2PO = AO^2 + \frac{3}{4}PO^2$. Sed $\frac{3}{4}PO^2 = OA \times 3AS$ (propter parabolam) $= OA \times AZ$. Quare $AO^2 + \frac{3}{4}PO^2 = AO^2 + OA \times AZ = ZO \times OA$. Erit igitur $GH \times 2PO = ZO \times OA$. Quapropter $GH \times 2PO : GH \times 4AS = ZO \times OA : GH \times 4AS$. (El. V. 7.) Sed $GH \times 2PO : GH \times 4AS = 2PO : 4AS$ (El. VI. 1.) $= PO : 2AS$ (El. V. 15.) $= AO : \frac{1}{2}PO$ (propter parabolam). Quare $ZO \times OA : GH \times 4AS = AO : \frac{1}{2}PO$. (El. V. 11.) Sed ut AO ad $\frac{1}{2}PO$ ita eſt quadratum ex AO ad triangulum POA. (El. I. 41. & VI. 1.) Quare $ZO \times OA$ eſt ad $GH \times 4AS$ ut AO^2 ad triangulum POA. Et permutando ZO ad AO ut $GH \times 4AS$ ad triangulum POA. Sed ut ZO ad AO ita eſt triangulum POZ ad triangulum POA.

A & perpendiculum ad axem ab umbilico S erectum ([d]).

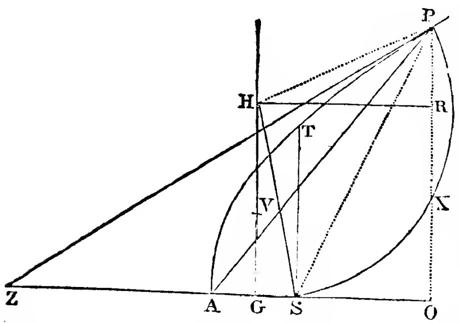
Corol. 2. Et circulo ASP per corpus motum P perpetuò tranſeunte, velocitas puncti H eſt ad velocitatem, quam corpus habuit in vertice A, ut 3 ad 8; ideoque in eâ etiam ratione eſt linea GH ad lineam rectam, quam corpus, tempore motûs ſui ab A ad P, eâ cum velocitate quam habuit in vertice A, deſcribere poſſet ([e]).

Corol. 3. Hinc etiam vice verſâ inveniri poteſt tempus, quo corpus deſcripſit arcum quemvis aſſignatum AP. Junge AP & ad medium ejus punctum erige perpendiculum rectæ GH occurrens in H ([f]).

LEMMA XXVIII.

Nulla extat figura ovalis, cujus area, rectis pro lubitu abſciſſa, poſſit per æquationes numero terminorum ac dimenſionum finitas generaliter inveniri.

Intra ovalem detur punctum quodvis, circa quod, ceu polum, revolvatur perpetuò linea recta, uniformi cum motu, & interea in rectâ illâ exeat punctum mobile de polo, pergatque ſemper eâ cum velocitate, quæ ſit ut rectæ illius intra ovalem quadratum. Hoc motu punctum illud deſcribet ſpiralem gyris infinitis. Jam ſi areæ ovalis, à rectâ illâ abſciſſæ, portio per finitam æquationem inveniri poteſt, invenietur etiam per eandem æquationem diſtantia



POA. (El. VI. 1.) Triangulum igitur POZ et rectangulum GH × 4AS ad triangulum POA eandem utrumque rationem habet. Triangulum igitur ZOP rectangulo GH × 4AS æquale erit. Et cùm recta M pars tertia ſit rectæ GH, ac proinde rectangulum M × 4AS triens rectanguli GH × 4AS, idcirco pars tertia trianguli ZOP rectangulo M × 4AS æquale erit. Jam verò triangulum ZOP è duobus componitur, PAZ, PAO. Horum alterius quidem, PAZ, triangulum PSA pars tertia eſt (nempe per El. VI. 1. cùm recta AZ facta eſt tripla ipſius AS). Alterius autem, PAO, ſegmentum parabolicum ATP pars tertia eſt. (Hamilton. Conic. Lib. III. 13.) Ex triangulo igitur PSA cum ſegmento parabolico ATP conſit pars tertia trianguli POZ. Sed ex eodem triangulo PSA cum ſegmento parabolico ATP conſit ſector parabolicus SAP. Sector igitur ille trianguli POZ parti tertiæ eſt æqualis, hoc eſt rectangulo M × 4AS. Q. E. D.

(d) Recta

tia puncti à polo, quæ huic areæ proportionalis eſt; ideoque omnia ſpiralis puncta per æquationem finitam inveniri poſſunt: & propterea rectæ cujuſvis poſitione datæ interſectio cum ſpirali inveniri etiam poteſt per æquationem finitam. Atqui recta omnis infinitè producta ſpiralem ſecat in punctis numero infinitis; & æquatio, quâ interſectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum interſectiones omnes radicibus totidem, ideoque aſcendit ad tot dimenſiones, quot ſunt interſectiones. Quoniam circuli duo ſe mutuò ſecant in punctis duobus, interſectio una non invenietur niſi per æquationem duarum dimenſionum, quâ interſectio altera etiam inveniatur. Quoniam duarum ſectionum conicarum quatuor eſſe poſſunt interſectiones, non poteſt aliqua earum generaliter inveniri, niſi per æquationem quatuor dimenſionum, quâ omnes ſimul inveniantur. Nam ſi interſectiones illæ ſeorſim quærantur, quoniam eadem eſt omnium lex & conditio, idem erit calculus in caſu unoquoque, & propterea eadem ſemper concluſio; quæ igitur debet omnes interſectiones ſimul complecti & indifferenter exhibere. Unde etiam interſectiones ſectionum conicarum & curvarum tertiæ poteſtatis, eò quòd ſex eſſe poſſunt, ſimul prodeunt per æquationes ſex dimenſionum; & interſectiones duarum curvarum tertiæ poteſtatis, quia novem eſſe poſſunt, ſimul prodeunt per æquationes dimenſionum novem. Id niſi neceſſariò fieret, reducere liceret Problemata omnia ſolida ad plana, & pluſquam ſolida ad ſolida. Loquor hic de curvis

(d) Recta ab umbilico S ad perpendiculum cum axe educta Parabolæ in T occurrat, et capiatur recta GV tripla ejus, quæ cum 4AS rectangulum claudat ſpatio ATS æquale. Erit $\frac{4}{3}$GV × AS = ATS. Sed ATPS = $\frac{4}{3}$GH × AS. Quare ATPS erit ad ATS, hoc eſt, tempus quo conficitur arcus AP ad tempus quo conficitur arcus AT, ut GH ad GV. Præterea cùm area ATS ſit $\frac{2}{3}$AS × ST, et ST æqualis ſit duplæ AS, erit ATS = $\frac{4}{3}$AS². Sed ATS = $\frac{4}{3}$GV × AS. Quare AS² = GV × AS. Ac proinde GV = AS. Tempus igitur quo conficitur arcus AP erit ad tempus quo conficitur AT ut GH ad AS. Q. E. D. *(Eadem fere Le Sœur & Jacquier.)*

(e) Nascente arcu AP, ſector parabolicus ASP triangulo rectilineo ASP fit primò æqualis, ſive dimidio rectanguli AS × PO. Quare cùm rectangulum $\frac{4}{3}$GH × AS ſectori ASP ſemper ſit æqualis, erit primò, congruentibus punctis P, A, $\frac{4}{3}$GH × AS = $\frac{1}{2}$PO × AS. Ac propterea $\frac{4}{3}$GH = $\frac{1}{2}$PO, et 8GH = 3PO. Quare GH : PO = 3 : 8; primò ſcilicet, arcu AP naſcente. Sed cùm recta PO arcuſque AP naſcentes ſint primò inter ſe æquales (Lem. VII.) ratio prima naſcentis rectæ GH, motu puncti H ſcriptæ, ad naſcentem PO, ea erit quam celeritas puncti H (ſaltem quâ motum ſuum incipiet) habebit ad velocitatem corporis, per parabolam delati, in ipſo vertice A. Sed æquabilis eſt motus puncti H, propter æquabilem areæ ASP deſcriptionem, cujus utique rationem recta GH, creſcendo, conſtanter ſervat. Velocitas igitur æquabilis puncti H ad celeritatem corporis in parabolæ vertice A, rationem habebit eam quam 3 ad 8. Q. E. D.

(f) Propter æquales HP, HA, punctum H erit ad rectam à medio puncto rectæ AP ad perpendiculum eductam.

poteſtate

poteſtate irreducibilibus. Nam ſi æquatio, per quam curva definitur, ad inferiorem poteſtatem reduci poſſit: curva non erit unica, ſed ex duabus vel pluribus compoſita, quarum interſectiones per calculos diverſos ſeorſim inveniri poſſunt. Ad eundem modum interſectiones binæ rectarum & ſectionum conicarum prodeunt ſemper per æquationes duarum dimenſionum; ternæ rectarum & curvarum irreducibilium tertiæ poteſtatis, per æquationes trium; quaternæ rectarum & curvarum irreducibilium quartæ poteſtatis, per æquationes dimenſionum quatuor; & ſic in infinitum. Ergo rectæ & ſpiralis interſectiones numero infinitæ, cùm curva hæc ſit ſimplex, & in curvas plures irreducibilis, requirunt æquationes numero dimenſionum & radicum infinitas, quibus interſectiones omnes poſſunt ſimul exhiberi. Eſt enim eadem omnium lex & idem calculus. Nam ſi à polo in rectam illam ſecantem demittatur perpendiculum, & perpendiculum illud, unà cum ſecante, revolvatur circa polum, interſectiones ſpiralis tranſibunt in ſe mutuò, quæque prima erat, ſeu proxima, poſt unam revolutionem ſecunda erit; poſt duas, tertia; & ſic deinceps: nec interea mutabitur æquatio, niſi pro mutatâ magnitudine quantitatum, per quas poſitio ſecantis determinatur. Unde cùm quantitates illæ poſt ſingulas revolutiones redeunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam primam; ideoque una eademque exhibebit interſectiones omnes, & propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes exhiberi poſſunt. Nequit ergo interſectio rectæ & ſpiralis per æquationem finitam generaliter inveniri, & idcirco nulla extat ovalis, cujus area, rectis imperatis abſciſſa, poſſit per talem æquationem generaliter exhiberi.

Eodem argumento, ſi intervallum poli & puncti, quo ſpiralis deſcribatur, capiatur Ovalis perimetro abſciſſæ proportionale, probari poteſt, quòd longitudo perimetri nequit per finitam æquationem generaliter exhiberi. De ovalibus autem hìc loquor, quæ non tanguntur à figuris conjugatis in infinitum pergentibus.

Corollarium.

Hinc area Ellipſeos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile finitam;

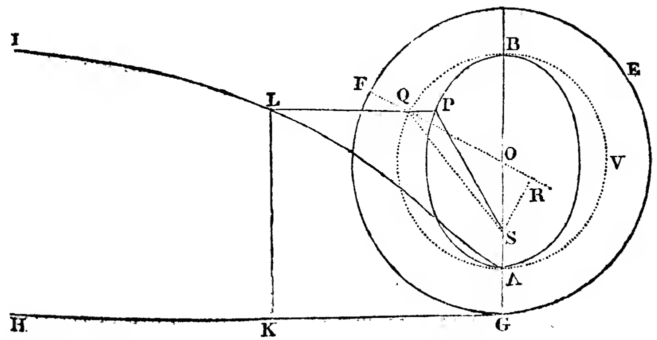
(g) Sicut ante Newtonum Walliſius fecerat. Nempe ejus eſt conſtructio Problematis Kepleriani

ducto deſcribitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam; & propterea per deſcriptionem curvarum geometricè rationalium determinari nequit. Curvas geometricè rationales appello, quarum puncta omnia per longitudines æquationibus definitas, id eſt, per longitudinum rationes complicatas, determinari poſſunt; cæteraſque (ut ſpirales, quadratrices, trochoides) geometricè irrationales. Nam longitudines quæ ſunt vel non ſunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo Elementorum) ſunt arithmeticè rationes vel irrationales. Aream igitur Ellipſeos tempori proportionalem abſcindo per Curvam geometricè irrationalem (g), ut ſequitur.

PROP. XXXI. PROB. XXIII.

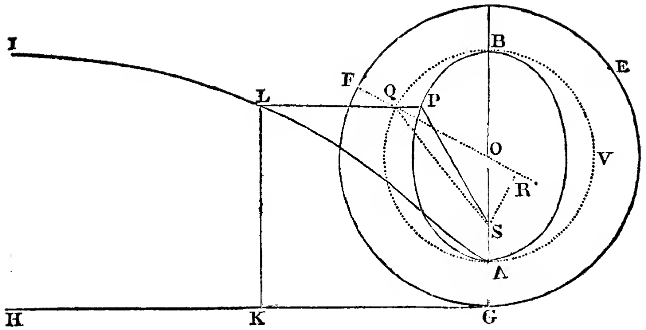
Corporis in datâ trajectoriâ ellipticâ moti invenire locum ad tempus aſſignatum.

Ellipſeos APB ſit A vertex principalis, S umbilicus, & O centrum, ſitque P corporis locus inveniendus. Produc OA ad G, ut ſit OG ad OA ut OA ad OS. Erige perpendiculum GH, centroque O, & intervallo OG, deſcribe circulum GEF, & ſuper regulâ GH, ceu fundo, progrediatur rota GEF, revolvendo circa axem ſuum, & interea, puncto ſuo A, deſcribendo Trochoidem ALI. Quo facto,



cape GK in ratione ad rotæ perimetrum GEFG, ut eſt tempus, quo corpus progrediendo ab A deſcripſit arcum AP, ad tempus revolutionis unius in Ellipſi. Erigatur perpendiculum KL occurrens Trochoidi

riani quam Newtonus traditurus eſt. *Vide Walliſii libellum de Cycloide & Ciſſoide.*



Trochoidi in L, & acta LP, ipſi KG parallela, occurret Ellipſi in corporis loco quæſito P.

Nam centro O, intervallo OA, deſcribatur ſemicirculus AQB; & arcui AQ occurrat LP, ſi opus eſt producta, in Q; junganturque SQ, OQ. Arcui EFG occurrat OQ in F, & in eandem OQ demittatur perpendiculum SR. Area APS eſt ut area AQS, id eſt, ut differentia inter ſectorem OQA & triangulum OQS, ſive ut differentia rectangulorum $\frac{1}{2}$OQ×AQ & $\frac{1}{2}$OQ×SR; hoc eſt, ob datam $\frac{1}{2}$OQ, ut differentia inter arcum AQ & rectam SR, ideoque (cùm eædem ſint datæ rationes SR ad ſinum arcûs AQ, OS ad OA, OA ad OG, AQ ad

(h) Hæc quidem explicatiùs dici poſſint hoc modo. Area APS eſt ad aream totam Ellipſeos APB, ut area AQS ad aream circuli ABV (Lemma IV. Cor. H. I): hoc eſt ut differentia ſectoris OQA trianguli que OQS ad aream circuli ABV, ſive ut differentia rectangulorum $\frac{1}{2}$OQ×AQ & $\frac{1}{2}$OQ×SR ad rectangulum ſub $\frac{1}{2}$OQ & toto ambitu circuli ABV: ſive rurſum, ut differentia arcûs AQ rectæque SR ad totum ambitum circuli ABV. Arcus autem AQ eſt ad ambitum circuli ABV, ut arcus GF ad ambitum circuli GFE. Et recta SR ad ambitum circuli ABV rationem habet, quæ compoſita eſt è rationibus rectæ SR ad ſinum arcûs AQ, ſinûſque ejus ad ambitum ABV. Sed, propter angulum ad R rectnm, recta SR erit ad SO ut ſinus anguli SOR, ſive, arcûs AQ, ad radium OA. Permutando, SR erit ad ſinum arcûs AQ, ut SO ad OA. Sed SO : OA = OA : OG. Ita enim factum eſt. Et OA eſt ad OG ut ambitus circuli ABV ad ambitum circuli GFV. Erit igitur SR ad ſinum arcûs AQ ut ambitus circuli ABV ad ambitum circuli GFV. (El. V. II.) Quæ igitur è rationibus rectæ SR ad ſinum arcûs AQ, ſinûſque illius ad ambitum ABV, compoſita eſt ratio, ea quidem componetur è rationibus ambitûs ABV ad ambitum GFE, ſinûſque arcûs AQ ad ambitum ABV. Verùm ex eiſdem compoſita eſt ratio, quam ſinus arcûs AQ habet ad ambitum circuli GFE. Quare recta SR erit ad ambitum circuli ABV ut ſinus arcûs AQ ad ambitum circuli GFE. Cùm igitur ſit arcus AQ ad ambitum ABV ut arcus GF ad ambitum GFE; atque rurſum recta SR ad ambitum ABV ut ſinus arcûs AQ ad ambitum GFE: idcirco differentia arcûs AQ rectæque SR erit ad ambitum ABV, ut differentia arcûs GF ſinûſque arcûs AQ ad ambitum GFE (El. V. 24.)

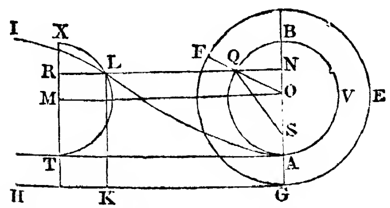
Quare area APS erit ad aream totam Ellipſeos ut differentia arcûs GF ſinûſque arcûs AQ ad ambitum circuli GFE. Sed recta GK differentiæ arcûs GF ſinûſque arcûs AQ æqualis eſt. Quare area APS erit ad aream ellipſeos ut recta GK ad ambitum GFE; hoc eſt, ut tempus, quo confecta eſt area APS, ad tempus converſionis integræ per ambitum Ellipſeos. Namque ſumpta eſt GK, quæ haberet ad ambitum GFE hanc rationem. Q. E. D.

Rectam autem GK æqualem eſſe differentiæ arcûs GF ſinûſque arcûs AQ, id oſtendimus hoc modo. Lineæ Trochoidis, ALI, ea eſt deſcriptio, ut rotâ GFE, circum centrum ſuum O, æquabiliter ſe convertente, centrum ipſum O motu æquabili transferatur ſecundum rectam cum rectâ GH parallelam; atque

ad GF, & diviſim AQ−SR ad GF − ſinu arcûs AQ) ut GK differentia inter arcum GF & ſinum arcûs AQ(h). Q. E. D.

Scholium.

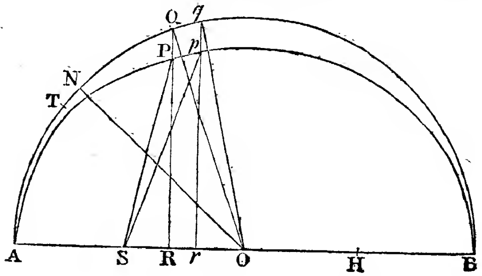
Cæterùm, cùm difficilis ſit hujus Curvæ deſcriptio, præſtat ſolutionem vero proximam exhibere. Inveniatur tum angulus quidam B, qui ſit ad angulum graduum 57.29578, quem arcus radio æqualis ſubtendit, ut eſt umbilicorum diſtantia SH ad Ellipſeos diametrum AB; tum etiam longitudo quædam L, quæ ſit ad radium in eâdem ratione inverſè. Quibus ſemel inventis, Problema deinceps confit per ſequentem analyſin. Per conſtructionem quamvis, vel utcunque conjecturam faciendo, cognoſcatur corporis locus P proximus vero ejus loco *p*. Demiſſâque ad axem ellipſeos ordinatim applicatâ PR, ex proportione diametrorum ellipſeos, dabitur circuli circumſcripti, AQB, ordinatim applicata RQ, quæ ſinus eſt anguli AOQ exiſtente AO radio, quæque ellipſin ſecat in P. Sufficit angulum illum rudi calculo in numeris proximis invenire. Cognoſcatur etiam angulus tempori proportionalis, id eſt, qui ſit ad quatuor rectos, ut eſt tempus, quo corpus deſcripſit arcum A*p*, ad tempus revolutionis unius in Ellipſi. Sit angulus iſte N. Tum capiatur & angulus D ad angulum B, ut eſt ſinus iſte anguli AOQ ad radium; & angulus E ad angulum N−AOQ+D,



atque eâ quidem velocitate, ut ſpatium, quod tempore integræ converſionis rotæ emenſum fuerit, rotæ ambitui GFE æquale ſit. Sit igitur M locus centri rotæ, O, quo tempore punctum ejus A locum L occupat. Circulus centro M, radio ML, ſcriptus poſitionem circuli AQB referet, quo tempore centrum rotæ in locum M pervenerit; junctaque OM cum rectâ GH parallela erit. Et ſi per A ducatur recta AT cum rectâ GK parallela, quæ circulo TLX in T occurrat, hæc circulos æquales, AQB, TLX, in punctis A, T continget; junctaque MT rectam AT ad perpendiculum inſiſtet; ac proinde cum rectâ OA parallela erit. Recta igitur LQ rectis inter ſe parallelis OA, TM, in punctis N, R occurrat. Erunt duæ NR, OM, necnon duæ TR, AN inter ſe æquales. Quare in circulis æqualibus, AQB, TLX, cum diametrorum AB, TX partes illæ, AN, TR, inter ſe æquales ſint; ordinatim eductæ, NQ, RL, erunt etiam inter ſe æquales. Quapropter arcus etiam AQ, TL, quorum ſinus ſunt illæ NQ, RL, erunt inter ſe æquales. Jam verò cùm centrum rotæ O, rectâ progrediendo, & punctum A, converſione rotæ circumactum, in loca M, L ſimul devenerint, recta OM et arcus TL ſpatia erunt, quæ puncta illa ſimul confecerint. Recta igitur OM erit ad arcum TL, ſive illi æqualem AQ, ut velocitas puncti O ad velocitatem puncti A. Eſt autem ambitus circuli GFE ad ambitum circuli ABV ut velocitas puncti O ad velocitatem puncti A. Recta igitur OM erit ad arcum AQ ut ambitus circuli GFE ad ambitum circuli ABV. (El. V. II.) Eſt autem arcus GF ad arcum AQ ut ambitus circuli GFE ad ambitum circuli ABV. Recta igitur OM arcuſque GF ad arcum AQ eandem proportionem habent. Recta igitur OM, ſive illi æqualis RN, arcui GF æqualis erit. (El. V. 9.) Quare NL, cui æqualis eſt GK, arcûs GF rectæque RL differentia erit. Sed oſtenſa eſt RL ſinui arcûs AQ æqualis. Quare GK differentia erit arcûs GF ſinûſque arcûs AQ. Q. E. D.

ut

ut eſt longitudo L ad longitudinem eandem L coſinu anguli AOQ diminutam, ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Poſtea capiatur tum angulus F ad angulum B, ut eſt ſinus anguli AOQ+E ad radium, tum angulus G ad angulum N−AOQ−E+F ut eſt longitudo L ad longitudinem eandem coſinu anguli AOQ+E diminutam, ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Tertià vice capiatur angulus H ad angulum B, ut eſt ſinus anguli AOQ+E+G ad radium; & angulus I ad angulum N−AOQ−E−G+H, ut eſt longitudo L ad eandem longitudinem coſinu anguli AOQ+E+G diminutam, ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Et ſic pergere licet in infinitum. Denique capiatur angulus AOq æqualis angulo AOQ+E+G+I+ &c. Et ex coſinu ejus Or & ordinatâ pr, quæ eſt ad ſinum ejus qr ut ellipſeos axis minor ad axem majorem, habebitur corporis locus correctus p. Si quando angulus N−AOQ+D negativus eſt, debet ſignum + ipſius E ubique

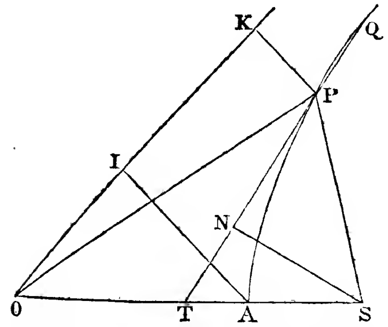


(i) CAPIATUR ſcilicet arcus AN, qui ſit ad ambitum Circuli AQB, ut tempus quo conficitur area ASP ad tempus converſionis integræ per ambitum Ellipſeos; et jungantur ON, SQ. Jam cùm ſector AON ſit ad aream circuli AQB ut arcus AN ad ambitum; cùm ſit etiam area ASQ ad aream circuli ut area elliptica PSA ad aream totam ellipſeos, hoc eſt ut arcus AN ad ambitum circuli ANB; idcirco ſector AON et area ASQ inter ſe æquales erunt. Quare ſi æqualium hoc et illud ſectori AOQ dematur, quæ relinquentur, ea quoque inter ſe æqualia erunt. Sector igitur NOQ triangulo SOQ æqualis. Quare arcus NQ rectæ à puncto S in radium OQ ad perpendiculum demiſſæ æqualis erit. Circuli AQB ſit arcus QT anguli B menſura. Et cùm arcus circuli cujuſvis ſint inter ſe ut anguli quos metiuntur, erit arcus ille circuli AQB qui radio OA æqualis eſt, ad arcum TQ ut angulus 57°,29578 ad angulum B, hoc eſt ut OA ad OS. Arcus igitur TQ rectæ SO æqualis erit. Et cùm arcus NQ rectæ à puncto S in rectam OQ ad perpendiculum deductæ æqualis ſit, erit TQ ad NQ ut radius ad ſinum anguli AOQ.

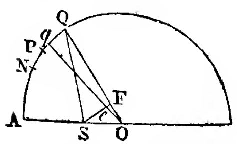
Jam cùm angulus AON, motûs utique medii, ex dato temporis ſpatio, quod elapſum fuerit ab appulſu planetæ ad apſidem A, datus ſit, et cùm ex angulo illo dato punctum N detur, ſi quo modo definiri poſſet amplitudo arcûs NQ, datum eſſet punctum Q. Et ex dato Q, ad circulum, daretur P ad ellipſin. Daretur autem arcus NQ, ſi quidem angulus QOA ad centrum circuli datus eſſet. Nimirum cùm arcus ille NQ is ſit, ad quem datus arcus TQ rationem habeat, quam radius ad ſinum anguli QOA. Atqui cùm ignotus ſit angulus PSA, ſeu motûs veri, angulus QOA æquè ignorabitur. Neque è ratione radii ad anguli ignoti ſinum arcus NQ, exquiſitâ ſaltem ratione, definiri poteſt. Illud igitur agendum, quoniam via recta indaginis nulla pateat, ut anguli QOA æſtimatio quædam conjecturâ fiat; et, elicitâ arcûs NQ magnitudine, quæ conjecturæ illi reſpondeat, videndum, an arcus AN, arcu illo NQ auctus, aſſumpto AQ æqualis ſit, vel quantum ab eo diſcrepet. Ita errorem aſſumptionis æſtimare liceat, et novam anguli AOQ conjecturam, vero propriorem, capere. Quæ quidem ipſa ſimili examini ſubjicienda, et novis rurſus aſſumptionibus emendanda erit; donec, errores ſenſim amoliendo, tantùm non ipſam veritatem aſſecuti ſimus. Nempe invento puncto N, ponatur arcus Nq (in figurâ appoſitâ) æqualis menſuræ anguli D, quo Newtonus docet modo definiendi.

E ubique mutari in −, & ſignum − in +. Idem intelligendum eſt de ſignis ipſorum G & I, ubi anguli N−AOQ−E+F, & N−AOQ−E−G+H negativi prodeunt. Convergit autem ſeries infinita AOQ+E+G+I+ &c. quàm celerrimè, adeo ut vix unquam opus fuerit ultrà progredi quàm ad terminum ſecundum E. Et fundatur calculus in hoc Theoremate, quòd area APS ſit ut differentia inter arcum AQ & rectam ab umbilico S in radium OQ perpendiculariter demiſſam (i).

Non diſſimili calculo conficitur Problema in Hyperbolâ. Sit ejus centrum O, vertex A, umbilicus S, & Aſymptotos OK. Cognoſcatur quantitas areæ abſcindendæ tempori proportionalis. Sit ea A, & fiat conjectura de poſitione rectæ SP, quæ aream APS abſcindat veræ proximam. Jungatur OP, & ab A & P ad Aſymptoton agantur AI, PK Aſymptoto alteri parallelæ, & per tabulam logarithmorum dabitur area AIKP, eique æqualis area OPA (k), quæ ſubducta de tri-



definiendi. Si locus P in ellipſi (in figurâ Newtonianâ) pro planetæ loco verè aſſumptus fuerit, verè etiam æſtimatus fuerit angulus AOQ. Itaque arcus NQ illi Nq lineationis noſtræ æqualis erit, et punctum q in ipſum Q incidet. Si q in ipſum Q non incidat, minùs exquiſitè collocatum erit punctum Q. Sit P punctum ubi Q collocari oportuit. Junctâ Oq, à puncto S in OQ ad perpendiculum demittatur SF, quæ rectæ Oq in e occurrat. Exiguo exiſtente angulo QOq, id enim ponimus, angulus SeO tantùm non rectus erit, et recta eF differentiæ rectarum, quæ à puncto S in rectas Oq, OQ ad perpendiculum demittantur, tantùm non æqualis erit. Sed earum differentiæ arcus Pq tantùm non æqualis eſt. Nempe cùm alteri rectarum arcus Nq æqualis ſit, alteri arcus NP propemodum ſaltem æqualis. Quare Pq : Qq = eF : qQ. Sed eF : Qq = OF : OQ propemodum. Ergo Pq : Qq = OF : OQ, et PQ : Qq = OF + OQ : OQ propemodum. Sed cùm OQ, QF propè ſint æquales, ut OQ + OF ad OQ ita erit OQ ad QF quàm proximè. Quare PQ : Qq = OQ : QF quàm proximè. Jam verò capiatur L quæ ſit ad R, hoc eſt ad ipſam OQ, ut OQ ad OS. Erit igitur quadratum ex OQ æquale rectangulo SO × L. Eſt autem SO ad OF, ut radius, hoc eſt ut OQ, ad coſinum anguli AOQ (propter angulum ad F rectum). Quare coſin. AOQ × SO = OQ × OF. Quare L × SO : coſin. AOQ × SO = OQ² : OQ × OF. Quare rurſum L : coſ. AOQ = OQ : OF. Et convertendo L : L − coſin. AOQ = OQ : QF. Sed OQ : QF = PQ : Qq quàm proximè (ex priùs oſtenſis). Quare L : L − coſin. AOQ = PQ : Qq quàm proximè. Ac proinde junctâ OP, angulus QOP erit quàm proximè ad angulum QOq ut longitudo L ad eandem L coſinu anguli AOQ imminutam. Sed ut L ad L − coſin. AOQ ita eſt angulus E Newtonianus ad angulum N − AOQ + D. Et angulus N − AOQ + D = AON − AOQ + NOq = − qOQ. Quare E = − QOP quàm proximè. Angulo igitur E illi AOQ ablato, reſtabit AOP quàm proximè. Et calculis ad Newtoni præcepta refectis, ſi quid reliquum eſt erroris, penitus id tandem amoliri licebit. [*Hæc ferè Keillius, vel horum ſaltem non multum diſſimilia, in Actis Philoſoph. & in 25a Lectionum ſuarum Aſtronomicarum.*]

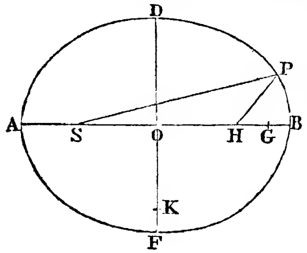


(k) Hamilton. Conic. Lib. 4. Prop. XV. & Cor.

De Motu Corporum

angulo OPS relinquet aream abſciſſam APS. Applicando areæ abſcindendæ A & abſciſſæ APS differentiam duplam, 2APS − 2A, vel 2A − 2APS, ad lineam SN, quæ ab umbilico S in tangentem TP perpendicularis eſt, orietur longitudo chordæ PQ. Inſcribatur autem chorda illa PQ inter A & P, ſi area abſciſſa, APS, major ſit areâ abſcindendâ A; ſecus ad puncti P contrarias partes: & punctum Q erit locus corporis accuratior [l]. Et computatione reperitâ invenietur idem accuratior in perpetuum.

Atque his calculis Problema generaliter confit analyticè. Verùm uſibus aſtronomicis accommodatior eſt calculus particularis, qui ſequitur. Exiſtentibus AO, OB, OD ſemiaxibus Ellipſeos, & L ipſius latere recto, ac D differentiâ inter ſemiaxem minorem OD & lateris recti ſemiſſem $\frac{1}{2}$L; quære tum angulum Y, cujus ſinus ſit ad radium ut eſt rectangulum ſub differentiâ illâ D, & ſemiſummâ axium, AO + OD, ad quadratum



([l]) Puta enim Q verum eſſe planetæ locum; junctis PQ, SQ, ſi locus P pro vero aſſumptus à vero non multum aberraverit, ſector hyperbolicus SPQ parvus erit, et triangulo SPQ haud multo major. Sed triangulum SPQ, rectanguli SN × PQ dimidium erit; nimirum cùm, ob parvitatem arcûs PQ, angulus TPQ duobus rectis tantùm non æqualis fiat, ut duæ rectæ TP, PQ pro unâ haberi poſſint. Sector igitur hyperbolicus SPQ, ſeu differentia areæ abſciſſæ ASP, et abſcindendæ ASQ, dimidio rectanguli SN × PQ haud multo major erit. Quare dupla illa differentia, ſive 2APS − 2A, rectangulo illo haud multo major. Ac proinde recta PQ non multo minor erit quàm recta $\frac{2APS - 2A}{SN}$. Si igitur, aut verſus verticem, A, aut ad partes puncti P contrarias, prout area APS major quàm abſcindenda minorve fuerit, inſcribatur chorda PQ rectæ $\frac{2APS - 2A}{SN}$ æqualis, erit Q locus planetæ accuratior; vero tamen ejus loco promotior citeriorve, prout area APS juſto minor majorve ſumpta fuerit. Calculis autem refectis error ſenſim amoliendus erit. *(Eadem ferè Le Sœur & Jacquier, & in notis ſuis MSS Gregorius.)*

([m]) Vel quod eodem redit, ſicut mox oſtendam (Lemm. H. VII.) capiatur angulus Y cujus ſinus ſit ad radium, vel potius qui ipſe ſit ad angulum 57°,29578 ut parallelopipedon ſuper quadratum ex OS, altitudine quæ rectæ OD æqualis ſit, ad quadruplum cubi è dimidio axe tranſverſo.

([n]) Vel, quod eodem redit, capiatur angulus Z qui ſit ad Y ut 8SH ad $3.\overline{AO + OD}$.

([o]) Hujus computationis rationes abditiſſimas ut in lucem proferamus, ante omnia ex angulo mediæ quem vocant anomaliæ, anguli BHP, ad umbilicum orbitæ ſuperiorem conſtituti, formula quædam generalis conficienda eſt (quæ alia ſanè ac ſeries infinita eſſe nequit) cujus ope angulorum illorum differentiam æſtimare liceat. Huic differentiæ æquationem Newtonianam, X ± V, in orbibus quorum exigua eſt umbilicorum diſtantia ratione axis tranſverſi, ita non æqualem oſtendemus, ut illud quo hæc ab illâ aberit, in omnium quidem planetarum orbitis, ſi unum Mercurium exceperis, pro nihilo habendum ſit. Sed ad formulæ illius inventionem, et ad alia quæ polliciti ſumus præſtanda, nonnullis è Geometriâ aſſumptis via nobis munienda eſt.

LEMMA

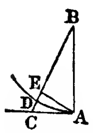
Liber Primus.

tum axis majoris AB [m]; tum angulum Z, cujus ſinus ſit ad radium ut eſt duplum rectangulum ſub umbilicorum diſtantiâ, SH, & differentiâ illâ, D, ad triplum quadratum ſemiaxis majoris AO [n]. His angulis ſemel inventis; locus corporis ſic deinceps determinabitur. Sume angulum T proportionalem tempori, quo arcus BP deſcriptus eſt, ſeu motui medio (ut loquuntur) æqualem; & angulum V, primam medii motûs æquationem, ad angulum Y, æquationem maximam primam, ut eſt ſinus dupli anguli T ad radium; atque angulum X, æquationem ſecundam, ad angulum Z, æquationem maximam ſecundam, ut eſt cubus ſinûs anguli T ad cubum radii. Angulorum, T, V, X, vel ſummæ, T + X + V, ſi angulus T recto minor eſt, vel differentiæ, T + X − V, ſi is recto major eſt rectiſque duobus minor, æqualem cape angulum BHP, motum medium æquatum [o]; & ſi HP occurrat ellipſi in P, acta SP abſcindet aream BSP tempori proportionalem quàm proximè.

Hæc

LEMMA II. III.

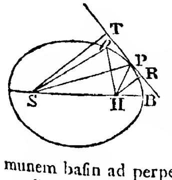
Si trianguli ABC *angulus ad* A *rectus ſit, anguluſque ad* B *ſit perexiguus, longitudo quâ latus* BC, *angulo recto adverſum, ſuperat latus* BA, *recto angulo exiguoque contiguum, cum duplo latere* BC, *latereque* AC, *quod exiguo angulo adverſum eſt, quàm proximè proportione tertia erit.*



Centro B, radio BA, ſcribatur circulus, qui rectæ BC in D occurrat. Erit CD longitudo illa, quâ latus BC latus BA ſuperat. Dico 2BC : CA = CA : CD quàm proximè. A puncto enim A in rectam BD deducatur ad perpendiculum recta AE. Propter angulos ad A et E rectos, erit BC : BA = BA : BE (El. VI. 8.) Hoc eſt, cùm BA, BD, propter circulum, ſint inter ſe æquales, BC : BD = BD : BE. Convertendo, BC : CD = BD : DE. Sed propter perexiguam anguli ABC amplitudinem, illæ BC, BD inter ſe tantùm non æquales erunt. Quare et illæ CD, DE, inter ſe tantùm non æquales. (El. V. 14.) Quare CD tantùm non ſemiſſis erit rectæ CE. Sed propter angulos ad A et E rectos, erit BC : CA = CA : CE. Ac proinde 2BC : CA = 2CA : CE = CA : $\frac{1}{2}$CE. Hoc eſt, cùm CD tantùm non æqualis ſit dimidiæ CE, 2BC : CA = CA : CD. Q. E. D.

LEMMA H. IV.

Si à puncto quovis, P, *ad Ellipſin, cujus* S, H *umbilici, ducantur rectæ* PS, PH *ad umbilicos, puncto* P *per circuitum ellipſeos utcunque tranſlato, fluxio ſectoris* BHP *erit ad fluxionem ſectoris* BSP *ut recta* HP, *ad rectam* SP.



Ducatur enim recta TPR quæ ellipſin in puncto P contingat, & in illam à punctis S, H ad perpendiculum deducantur ST, HR. Sit p aliud punctum ad ellipſin, et jungantur Sp, Hp, Pp. Jam fluxio ſectoris BHP ad fluxionem ſectoris BSP rationem habebit eam, quæ, coeuntibus punctis P, p, ſectoris PHp naſcentis ad naſcentem PSp prima erit: ſive (per Lemma VI.) quæ trianguli naſcentis PHp ad naſcens triangulum PSp prima erit. Sed cùm triangula illa baſin Pp ſemper communem habeant, eadem ſemper erit triangulorum ratio, quæ rectarum ab horum verticibus, H, S, in communem baſin ad perpendiculum demiſſarum. Et rectæ in communem naſcentium baſin ad perpendiculum demiſſæ ſunt ipſæ HR, ST. Quare fluxio ſectoris BHP erit ad fluxionem ſectoris BSP ut

HR

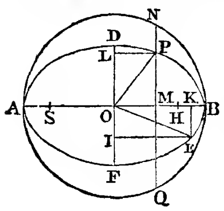
Hæc praxis satis expedita videtur, propterea quòd angulorum perexiguorum V & X, in minutis secundis, si placet, positorum, figuras duas tresve primas invenire sufficit. Sed & satis accurata est ad theoriam Planetarum. Nam in orbe vel Martis ipsius, cujus æquatio

HR ad ST. Verùm anguli HPR, SPT inter se æquales sunt (Hamilton. Conic. Lib. II. 16.) et anguli ad R et T sunt recti. Quare triangula HPR, SPT erunt inter se similia, et $HR : ST = HP : SP$. Fluxio igitur areæ BHP erit ad fluxionem areæ BSP ut HP ad SP. (El. V. 11.) Q. E. D.

LEMMA H. V.

Si à puncto quovis P in Ellipsi, cujus umbilici, S, H, centrum O, axes AOB, FOD, ducatur PM ad axem transversum AB ordinatim, spatium, quo quadratum ex semidiametro, quæ semidiametri OP est conjugata, superat quadratum ex semiaxe secundo, ad quadratum ex ordinatâ PM rationem habebit eam, quam quadratum ex dimidiâ umbilicorum distantiâ ad quadratum ex semiaxe secundo.

Per centrum Ellipseos O ducatur semidiameter OE conjugata ejus quæ per P ducitur. Dico $OE^2 - OD^2 : PM^2 = OH^2 : OD^2$.



A punctis E, P, diametrorum conjugatarum OE, OP verticibus, ducantur EK, PL, in axes AB, FD ordinatim. Ducatur etiam EI in axem FD ordinatim. Centroque O, radio OB, qui est semiaxis transversus ellipseos, scribatur circulus, qui rectæ PM in punctis N, Q occurrat. Propter angulum ad K rectum, quadratum ex OE, duobus quadratis ex EK, OK, sive duobus ex OI, OK simul sumptis, æquale est. Horum autem illud ex OI rectangulo FLD, alterum ex OK rectangulo AMB æquale est. (Hamilton. Conic. Lib. IV. 2.) Quadratum igitur ex OE, rectangulis duobus FLD, AMB simul sumptis æquale erit. Utrique æqualium auferatur quadratum ex OD; relinquentur $OE^2 - OD^2$, $AMB - OL^2$ inter se æqualia. Sed, propter circulum, rectangulum $AMB = NM^2$; et, propter figuram LPMO parallelogrammam, $OL^2 = PM^2$. Quare $OE^2 - OD^2 = NM^2 - PM^2 = NPQ$. Jam verò cùm propter Ellipsin, rectangulum AMB (hoc est quadratum ex NM) sit ad quadratum ex PM ut quadratum ex OB ad quadratum ex OD; dividendo, erit $NPQ : PM^2 = OH^2 : OD^2$. Quare cùm NPQ spatio $OE^2 - OD^2$ modò ostensum sit æquale, erit etiam $OE^2 - OD^2 : PM^2 = OH^2 : OD^2$. Q. E. D.

Cor. 1. Deductâ PM à quovis puncto P, eorum quæ ad ellipsin, in axem transversum ordinatim, erit illud quo rectangulum AMB, sub segmentis axis, superat quadratum ex ordinatâ PM, æquale illi quo quadratum ex semidiametro OE, conjugatâ utique ejus quæ per P ducitur, superat quadratum ex semiaxe secundo OD.

Cor. 2. Deductâ PL à quovis puncto P, eorum quæ ad ellipsin, in axem secundum OD ordinatim, erit illud quo quadratum ex ordinatâ PL superat rectangulum FLD, sub segmentis axis, æquale illi quo quadratum ex semiaxe transverso OB superat quadratum ex semidiametro OE conjugatâ utique ejus, quæ per P ducitur. Nam cùm quadratum ex OE æquale sit duobus rectangulis AMB, FLD simul sumptis, si æqualium hoc et illud quadrato ex OB auferatur, relinquentur $OB^2 - OE^2$, $OM^2 - FLD$, sive $PL^2 - FLD$, inter se æqualia.

Cor. 3. Deductâ PL in axem secundum ordinatim, spatium quo quadratum ex semidiametro OE, conjugatâ quidem ejus quæ per P ducitur, superatur à quadrato ex semiaxe transverso OB, erit ad quadratum ex ordinatâ PL, ut quadratum ex dimidiâ umbilicorum distantiâ ad quadratum ex semiaxe transverso. Dico $OB^2 - OE^2 : PL^2 = OH^2 : OB^2$. Nam, propter ellipsin, $PL^2 : FLD = OB^2 : OD^2$. Convertendo, $PL^2 : PL^2 - FLD = OB^2 : OH^2$. Et invertendo, $PL^2 - FLD : PL^2 = OH^2 : OB^2$. Sed $PL^2 - FLD = OB^2 - OE^2$. (Cor. 2.) Quare $OB^2 - OE^2 : PL^2 = OH^2 : OB^2$. Q. E. D. Sunt hæc quidem Corollaria à negotio nostro aliena: sed rerum convenientias contemplari juvat.

LEMMA

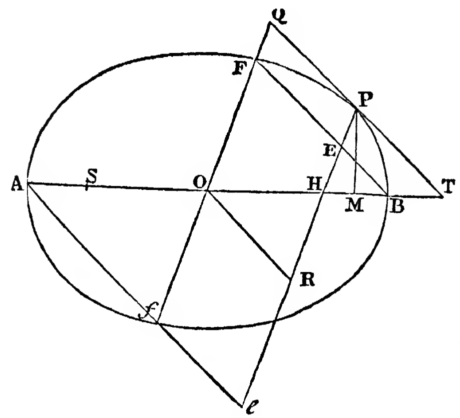
æquatio centri maxima est graduum decem, error vix superabit minutum unum secundum. Invento autem angulo motûs medii æquati, BHP, angulus veri motûs BSP & distantia SP in promptu sunt per methodum notissimam.

Hactenus

LEMMA H. VI.

Lineâ rectâ Ellipsin in quovis puncto contingente, si à puncto illo recta ducatur ad alterutrum umbilicorum ellipseos, aliaque ad axem transversum ordinatim, tum si per verticem axis transversi ducatur recta cum contingente parallela, hæc ab illâ, quæ per umbilicum ducta est, partem abscindet, contingentem versus, illi quam ordinatim deducta ab axe transverso absciderit, verticem versus per quem ducta fuerit recta cum contingente parallela, æqualem.

Ellipsin, cujus axis transversus AB, centrum O, umbilici S, H, in puncto quolibet P recta PT contingat. A puncto P ad alterutrum umbilicorum, puta ad H, ducatur recta PH, rectaque PM ad axem transversum AB ordinatim. Per verticem alterutrum axis transversi, puta per B, ducatur recta BE cum contingente PT parallela, quæ rectæ ad umbilicum ductæ, PH, in E occurrat. Dico rectæ PH segmentum PE, quod recta BE ab illâ absciderit à parte contingentis, æquale esse illi MB, quod ordinata PM ab axe transverso absciderit à parte verticis B. Occurrat enim axis transversus productus rectæ PT in T. Ducatur per O, centrum ellipseos, recta OQ cum illâ PH parallela, quæ contingenti TP in Q occurrat, rectæque BE in F *. Erit $OT : OB = OB : OM$ (Hamilton. Conic. Lib. 1. XLVIII.) Convertendo $OT : TB = OB : BM$. Sed propter



rectas TQ, BF inter se parallelas, $OT : TB = OQ : QF$. (El. VI. 2.) Quare $OB : BM = OQ : QF$. Sunt autem OB, OQ inter se æquales. (Hamilton. Conic. Lib. 2. XXIII.) Quare BM, QF inter se æquales. (El. V. 14.) Sed, propter figuram PEFQ parallelogrammam, erunt PE, QF inter se æquales. Quare et BM, PE inter se æquales erunt. Q. E. D.

Et si ab altero axis transversi vertice, A, ducatur Ae cum contingente parallela, quæ rectæ PH per umbilicum ductæ in e occurrat, similibus argumentis efficientur AM, Pe inter se æquales. Rectæ enim Ae recta QO producta in f occurrat. Jam cùm sit $OT : OB = OB : OM$, erit etiam $OT + OB$, sive AT, ad $OB + OM$, sive AM, ut OT ad OB. Permutando $AT : OT = AM : OB$. Sed, propter rectas TQ, Ae inter se parallelas, erit $AT : TO = fQ : QO$. Quare $AM : OB = fQ : QO$. Sunt autem OB, QO inter se æquales. Quare AM, fQ, ac propterea AM, eP inter se æquales. Q. E. D.

Cor. 1. Rectæ per umbilicum pars illa, Ee, quæ rectis parallelis BE, Ae intercepta est, duplæ distantiæ ordinatæ PM à centro, hoc est, duplæ OM æqualis erit. Nam cùm $Pe = AM$, et $PE = BM$, erit $Ee = AM - BM = 2OB - 2BM = 2OM$.

Cor. 2. Segmentum rectæ per umbilicum, inter umbilicum et rectam cum contingente parallelam, est ad segmentum axis inter ordinatam et centrum, ut distantia umbilici à vertice illo, per quem ducta est recta cum contingente parallela, ad dimidium axis transversi. Per centrum enim O ducatur recta OR cum contingente PT parallela, quæ rectæ PH, per umbilicum ductæ, in R occurrat. Propter figuram PROQ parallelogrammam erit PR æqualis illi OQ, cui ostensa est æqualis OB. Quare PR, OB inter se æquales. Sed PE, BM inter se æquales. Æquales igitur OM, ER. Ad utramque igitur æqualium OM, ER illa EH eandem rationem habet. (El. V. 7.) Sed, propter

* *Cave credas punctum V necessariò ad Ellipsin esse. Id enim in appositâ figurâ fortuitum est.*

rectas

Hactenus de motu corporum in lineis curvis. Fieri autem poteſt ut mobile rectâ deſcendat vel rectâ aſcendat, & quæ ad iſtiuſmodi motus ſpectant, pergo jam exponere.

SECTIO

rectas EF, RO inter ſe parallelas, $\mathrm{EH : ER = HB : BO}$. Quare $\mathrm{EH : OM = HB : BO}$. Similibus argumentis efficietur $\mathrm{eH : OM = AH : AO}$. Q. E. D.

LEMMA H. VII.

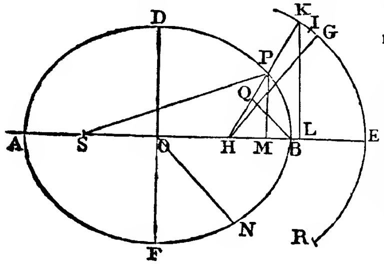
In Ellipſi rectangulum ſub dimidiâ axium ſummâ dimidiâque lateris recti et axis ſecundi differentiâ ad quadratum è dimidiâ umbilicorum diſtantiâ rationem habet quam axis ſecundus ad axem tranſverſum.

Sit Ellipſis cujus axis tranſverſus AB, ſecundus DF, centrum O umbilici S, H (fig. text. p. 134.) Capiatur OG dimidio axi ſecundo OD æqualis, et OK æqualis dimidio lateri recto. Ita erit AG dimidia axium ſumma, et FK dimidia axis ſecundi lateriſque recti differentia erit. Dico eſſe $\mathrm{FK \times AG : OH^2 = OF : OA}$.

Erit enim $\mathrm{FK \times AG}$ duobus $\mathrm{FK \times AO}$, $\mathrm{FK \times OG}$ ſimul ſumptis æquale. Quorum illud $\mathrm{FK \times AO = OF \times OA - OK \times OA = OF \times OA - OF^2}$ (nempe cùm propter trium AO, OF, OK continuam proportionis convenientiam rectangulum $\mathrm{OK \times AO}$ quadrato ex OF æquale ſit.) Verùm, propter OG, OF inter ſe æquales, $\mathrm{FK \times OG = OF^2 - OF \times OK}$. Quare $\mathrm{FK \times AO + FK \times OG = AO \times OF - OF \times OK}$. Quare $\mathrm{FK \times AG = AO \times OF - OF \times OK}$. Jam verò $\mathrm{AO \times OF : AO^2 = OF : AO = OK : OF = OF \times OK : OF^2}$. Quare (per El. V. 12.) $\mathrm{AO \times OF - OF \times OK : AO^2 - OF^2 = OK : OF = OF : OA}$. Hoc eſt, cùm $\mathrm{AO \times OF - OF \times OK}$ æquale ſit rectangulo $\mathrm{FK \times AG}$ (ex modò oſtenſis), et cum $\mathrm{AO^2 - OF^2}$ æquale ſit quadrato ex OH (propter ellipſin) idcirco erit $\mathrm{FK \times AG : OH^2 = OF : OA}$. Q. E. D.

Horum tandem ope facilis erit formulæ, quâ opus eſt, inventio; quæ, ſi omnia calculorum vi perficere voluiſſemus, magno quidem conſtitiſſet labore.

1. In orbe Elliptico cujus axes, tranſverſus quidem AB, ſecundus FD, centrum O, umbilici S, H, ſit S umbilicorum is quem vires centripetæ reſpiciant, punctum P locus quilibet planetæ in hoc orbe circumacti. Junctis PS, PH, centro H, radio HE, qui dimidio axi tranſverſo OB æqualis ſit, ſcribatur circulus; et hujus circuli capiatur arcus EG, qui ad totum circuli circuitum rationem habeat, quam ſector BSP ad aream totam ellipſeos. Junctâ igitur HG erit angulus EHG mediæ quem vocant anomaliæ, ejuſque menſura pro radio HE erit arcus EG. Et ſi producatur HP circulum uſque, cui in K occurrat, erit arcus EK menſura anguli, BHP, ad umbilicum orbitæ ſuperiorem conſtituti.



2. Significetur arcus EG literâ T, arcus EK literâ z. A punctis K, P in axem ellipſeos AB deducantur ad perpendiculum KL, PM. Erit KL ſinus, HL coſinus arcûs EK; quorum KL ſignificetur literâ s, HL literâ x. Jungatur HD, et per O ducatur ſemidiameter ON, conjugata ejus quæ per P. Æquales OB, HE, HD literâ a communiter ſignificentur. Semiaxis ſecundus OD ſignificetur literâ c; et OH, dimidia umbilicorum diſtantia, literâ n.

3. Jam puncto P per ellipſeos circuitum tranſlato, fluxio ſectoris circularis EHK erit ad fluxionem ſectoris elliptici BHP ut quadratum ex HK ad quadratum ex HP. (Ideo ſcilicet quia naſcentia ſectorum EHK, BHP incrementa ſunt primò inter ſe ſicut triangula inter ſe ſimilia, quorum triangulorum ſunt HK, HP latera homologa.) Sed fluxio ſectoris elliptici BHP ad fluxionem ſectoris elliptici BSP erit ut HP ad PS (Lemma H. 4.) hoc eſt ut quadratum ex HP ad rectangulum $\mathrm{HP \times PS}$ vel ut quadratum ex HP ad quadratum ex ON; nam quadratum ex ON rectangulo $\mathrm{HP \times PS}$ eſt æquale.

SECTIO VII.

De corporum aſcenſu & deſcenſu rectilineo.

PROP.

quale. (Hamilton. Conic. Lib. II. 19.) Cùm igitur ſit fluxio ſectoris circularis EHK ad fluxionem ſectoris elliptici BHP ut quadratum ex HK ad quadratum ex HP, et fluxio ſectoris elliptici BHP ad fluxionem ſectoris elliptici BSP ut quadratum ex HP ad quadratum ex ON, erit ex æquo fluxio ſectoris circularis EHK ad fluxionem ſectoris elliptici BSP ut quadratum ex HK ad quadratum ex ON. Hoc eſt $\dot{\overline{\mathrm{EHK}}} : \dot{\overline{\mathrm{BSP}}} = \mathrm{HK^2 : ON^2}$. Quare cùm $\dot{\overline{\mathrm{EHK}}}$ æqualis ſit rectangulo $\frac{1}{2}\mathrm{HE} \times \dot{\overline{\mathrm{EK}}}$, ſive $\frac{1}{2}a\dot{z}$, erit $\dot{\overline{\mathrm{BSP}}} = \frac{\mathrm{ON}^2}{2a}\dot{z}$.

4. Sed (per Lemma H. V.) eſt $\mathrm{ON^2 - OD^2 : PM^2 = OH^2 : OD^2}$. Quare $\overline{\mathrm{ON^2 - OD^2}} \times \frac{\mathrm{OD}^2}{\mathrm{OH}^2}$, ſive $\overline{\mathrm{ON}^2 - cc} \times \frac{cc}{nn}, = \mathrm{PM}^2$. Sed propter rectas PM, KL parallelas, erit $\mathrm{KL : PM = KH : HP}$. Quare $\mathrm{KL}^2 \times \frac{\mathrm{HP}^2}{\mathrm{KH}^2}$, ſive $\frac{ss \times \mathrm{HP}^2}{a^2}, = \mathrm{PM}^2$. Quare $\overline{\mathrm{ON}^2 - cc} \times \frac{cc}{nn} = \frac{ss}{a^2} \times \mathrm{HP}^2$. Et $\mathrm{ON}^2 = cc + \frac{nn.ss}{cca^2}\mathrm{HP}^2$.

5. Agatur per B recta BQ cum rectâ ON parallela, quæ rectæ HP in Q occurrat. Ita dividetur HP in partes duas, PQ, QH; quarum altera quidem, PQ, æqualis erit abſciſſæ ab axe BM, altera vero $\mathrm{QH} = \frac{\mathrm{OM \times HB}}{\mathrm{OB}}$. (Lemma H. VI. & Cor. ejus 2.) Propter rectas KL, PM inter ſe parallelas, erit $\mathrm{HL : HM = HK : HP}$. Quare $\mathrm{HM} = \frac{\mathrm{HL \times HP}}{\mathrm{HK}} = \frac{x \times \mathrm{HP}}{a}$. Sed $\mathrm{HB} = a - n$. Quare $\mathrm{BM} = a - n - \frac{x \times \mathrm{HP}}{a}$. Et $\mathrm{OM} = n + \frac{x \times \mathrm{HP}}{a}$. Quare $\mathrm{QH}\ (= \frac{\mathrm{OM \times HB}}{\mathrm{OB}}) = \overline{n + \frac{x \times \mathrm{HP}}{a}} \times \frac{a-n}{a} = \overline{n + \frac{x \times \mathrm{HP}}{a}} - \frac{n^2}{a} - \overline{\frac{nx \times \mathrm{HP}}{a^2}}$. Quare rurſum $\mathrm{PH} = (\mathrm{BM + QH}) = a - \frac{n^2}{a} - \frac{nx \times \mathrm{HP}}{a^2} = \frac{a^2 - n^2}{a} - \frac{nx \times \mathrm{HP}}{a^2} = \frac{c^2}{a} - \frac{nx \times \mathrm{HP}}{a^2}$. Et tranſponendo $\mathrm{HP} \times \frac{a^2 + nx}{a^2} = \frac{c^2}{a}$. Quare $\mathrm{HP} = \frac{ac^2}{a^2 + nx}$. Et $\mathrm{HP}^2 = \frac{a^2.c^4}{\overline{a^2 + nx}|^2}$. Quare $\frac{nn.ss}{cca^2}\mathrm{HP}^2 = \frac{nn.ss.cc}{\overline{a^2 + nx}|^2}$. Additoque utrinque cc, erit $cc + \frac{nnss}{cca^2}\mathrm{HP}^2$, hoc eſt ex ſuprà oſtenſis (§ 4.) $\mathrm{ON}^2, = cc + \frac{nn.ss.cc}{\overline{a^2 + nx}|^2}$. Quare fluxioni areæ BSP, cui illud $\frac{\mathrm{ON}^2}{2a}\dot{z}$ jam ſuprà (§ 3.) oſtenſum eſt æquale, erit hoc etiam æquale, $\frac{cc\dot{z}}{2a} + \frac{nn.ss.cc}{2a \times \overline{a^2 + nx}|^2}\dot{z}$. Erit inquam $\dot{\overline{\mathrm{BPS}}} = \frac{cc}{2a}\dot{z} + \frac{nn.cc.ss}{2a \times \overline{a^4 + 2a\ nx + n^2x^2}|}\dot{z}$.

6 Hujus membro poſteriore in ſeriem infinitam, diviſionis operâ, explicato, erit $\dot{\overline{\mathrm{BPS}}} = \frac{cc}{2a}\dot{z} + \frac{nn.cc.ss}{2a^5}\dot{z} - \frac{n^3cc.ss.x}{a^7}\dot{z} + \frac{3n^4c^2ssx^2}{2a^9}\dot{z} - .$ Hæc ſeries, ſi exigua ſit n, dimidia umbilicorum diſtantia ratione dimidii axis tranſverſi, a, qualiſcunque fuerit arcûs z amplitudo, celerrimè quidem ad metam properabit: ut tria prima ejus membra pro ſummâ totius haberi poſſint. Ponatur igitur $\dot{\overline{\mathrm{BPS}}} = \frac{cc}{2a}\dot{z} + \frac{nnccss}{2a^5}\dot{z} - \frac{n^3ccssx}{a^7}\dot{z}$.

7. Jam cùm ſit $\dot{z} : \dot{x} = a : s$ (Excerpt. ex Epiſt. IV. Not. [k]. Cor.) erit $s\dot{z} = a\dot{x}$. Rurſum, cùm ſit $\dot{z} : \dot{s} = a : x$ (Excerpt. ex Epiſt. IV. Not. [l]. Cor.) erit $x\dot{z} = a\dot{s}$. Quare quantitatis ejus, cui inventa eſt $\dot{\overline{\mathrm{BPS}}}$ æqualis, ejus inquam membro ſecundo erit hoc æquale, $\frac{nnccs}{2a^4}\dot{x}$; tertio autem, hoc, $\frac{n^3cc.s^2s}{a^6}$.

PROP. XXXII. PROB. XXIV.

Posito quòd vis centripeta sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ locorum à centro, spatia definire, quæ corpus, rectâ cadendo, datis temporibus describit.

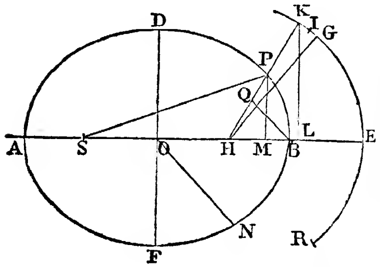
Cas.

$\frac{n^3 cc.s^2 \dot{s}}{a^6}$.

Hinc $\dot{\overline{BPS}} = \frac{cc}{2a}\dot{z} + \frac{nnccs\dot{x}}{2a^4} - \frac{n^3 ccs^2\dot{s}}{a^6}$.

Atque hinc efficitur $BPS = \frac{ccz}{2a} + \boxed{\frac{n^2 ccs\dot{x}}{2a^4}} - \frac{n^3 ccs^3}{3a^6}$.

Sed $\boxed{\frac{n^2 ccsx}{2a^4}} = \frac{n^2c^2}{2a^4} EKL$. Et $EKL = HKE - HKL = \frac{1}{2}az - \frac{1}{2}xs$. Quare $BPS = \overline{\frac{cc}{2a} + \frac{n^2 cc}{4a^3}}\,z - \frac{n^2cc}{4a^4}xs - \frac{n^3 ccs^3}{3a^6}$.



8. Atque formulam hujus quidem simillimam, vel re potius eandem, notis autem aliam, et aliâ longè ratione inventam, in notationibus suis Anglicis Emersonus tradidit. Qui tamen formulâ quam invenerat, ad explicationem eorum, quæ à Newtono sunt præcepta, minùs feliciter usus est; calculorum ut opinor fastidio, haud enim ingenii tarditate lapsus; à quâ suspicione vir ille acutissimus procul abest. Nos autem ad propositum revertamur. Cùm arcus circularis EG sit ad totum circuli circuitum ut area BPS ad aream totam ellipseos (ita enim factum est), erit sector circularis EHG ad aream circuli ut sector ellipticus BPS ad aream ellipseos. Et permutando, sector EHG erit ad sectorem BPS ut circulus ad ellipsin; hoc est, ut quadratum ex HE ad rectangulum $OB \times OD$; vel, cùm æquales sint HE, OB, ut HE ad OD, sive ut a ad c. Quare sector $EHG = \frac{BPS \times a}{c}$. Quare arcus EG, sive T, $= \frac{2BPS}{c} = \overline{\frac{c}{a} + \frac{n^2c}{2a^2}}\,z - \frac{n^2c}{2a^4}xs - \frac{2n^3c}{3a^6}s^3$. Capiatur igitur arcus ER ad quem EK, vel z, rationem habeat quam $2a^3$ ad $\overline{2a^2+n^2}\,c$. Erit $T = ER - \frac{n^2c}{2a^4}xs - \frac{2n^3c}{3a^6}s^3$.

9. Jam cùm n, dimidia umbilicorum distantia, exigua sit ratione ipsius a, dimidii axis transversi (id enim semper ponimus) hoc est, cùm in triangulo DOH, cujus angulus ad O rectus est, angulus ODH sit exiguus, erit OH^2, sive n^2, $= 2DH \times \overline{DH - DO} = 2a \times \overline{a-c}$ (Lemma H. III.) et $n^2c = 2a^2c - 2ac^2$. Hinc $2a^3 : \overline{2a^2+n^2}\,c = 2a^3 : \overline{4a^2 - 2ac}\,c = a^2 : 2ac - c^2$. Differentia duarum a, c designetur literâ p, ut sit $a - c = p$. Erit igitur $2ac - c^2 = a^2 - p^2$. Hinc $a^2 : 2ac - c^2 = a^2 : a^2 - p^2$. Quare $2a^3$ erit ad $\overline{2a^2+n^2}\,c$, hoc est arcus EK ad arcum ER ut a^2 ad $a^2 - p^2$. Sed cùm p non nisi pars multessima sit ipsius a; hinc ratio illorum a^2, $a^2 - p^2$, tantùm non æqualium ratio erit, et arcus ER, EK inter se tantùm non æquales. Pro æqualibus igitur habendi sunt. Inde erit $T = EK - \frac{n^2c}{2a^4}xs - \frac{2n^3c}{3a^6}s^3$.

Vel transponendo, $T + \frac{n^2c}{2a^4}xs + \frac{2n^3c}{3a^6}s^3 = EK$. Ablatoque $EG = T$, erit $\frac{n^2c}{2a^4}xs + \frac{2n^3c}{3a^6}s^3 = GK$. Atqui arcus GK mensura est anguli GHK, seu differentiæ anguli anomaliæ mediæ angulique BHP ad umbilicum orbitæ superiorem. Hæc ita se habent si angulus BHP recto minor sit. Quòd si recto major ille fuisset, calculis simili modo subductis, provenisset arcus $GK = -\frac{n^2c}{2a^4}xs + \frac{2n^3c}{3a^6}s^3$.

10. Osten-

Cas. 1. Si corpus non cadit perpendiculariter, describet id (per Corol. 1. Prop. XIII.) sectionem aliquam conicam, cujus umbilicus congruit cum centro virium. Sit sectio illa conica ARPB, & umbilicus ejus S. Et primò si figura Ellipsis est, super hujus axe majore, AB, describatur semicirculus ADB; & per corpus deci-

10. Ostendendum est igitur mensuram æquationis Newtonianæ, $X \pm V$, pro radio HE, arcui GH modò invento æqualem esse.

Divisum puta arcum GK in duos GI, IK, quorum alter GI æqualis sit illi $\frac{n^2c}{2a^4}xs$, alter IK æqualis sit $\frac{2n^3c}{3a^6}s^3$.

11. Cùm litera s sinum, x cosinum arcûs EK significet, existente a radio, erit rectangulum $2xs = a \times$ sin. 2EK. Duplum enim rectanguli sub sinu et cosinu arcûs cujuspiam circularis rectangulo sub radio & sinu arcûs dupli æquale est. (Keill. Trigonom. Plan. Prop. IV. Cor.) Quare $\frac{n^2c}{2a^4}xs = \frac{n^2c}{4a^3}$ sin. 2T propemodum. Arcus igitur GI illi $\frac{n^2c}{4a^3}$ sin. 2T tantùm non æqualis erit.

12. Jam verò sinus anguli V Newtoniani est ad radium ut $D \times \overline{AO + OD}$ ad $4AO^2$. Quare sinus anguli V, sive cùm angulus V exiguus sit, arcus, qui mensura est anguli V pro radio AO, erit $\frac{D \times \overline{AO + OD}}{4AO}$, sive $D \times \frac{a+c}{4a}$. Et cùm arcus ille sit ad alium, qui mensura erit anguli V, ut radius ad sinum dupli arcûs T, erit arcus ille quem angulus V mensuram habet, $\frac{D \times \overline{a+c} \times \text{sin. } 2T}{4a^2}$. Sed (per Lemma H. VII.) $D = \frac{OH^2 \times OD}{\overline{AO + OD} \times AO} = \frac{n^2c}{\overline{a+c} \times a}$. Quare $\frac{D \times \overline{a+c}}{4a^2} = \frac{n^2c}{4a^3}$. Quare arcus, quem angulus Newtoni V mensuram habet pro radio a vel AE, erit $\frac{n^2c}{4a^3}$ sin. 2T, cui ostensus est arcus GI tantùm non æqualis (§ 11). Angulus igitur V Newtonianus angulo GHI tantùm non æqualis.

13. Rursum propter arcus EG, EK tantùm non æquales, eorum sinus tantùm non æquales erunt. Quare $s^3 = \overline{\text{sin. } T}|^3$ propemodum. Hinc arcus $IK = \frac{2n^3c}{3a^6}\overline{\text{sin. } T}|^3$ propemodum.

14. Verùm sinus anguli Z Newtoniani, vel, si angulus exiguus sit, arcus ipse, quem angulus ille Z mensuram habet, est ad radium ut $4D \times OH$ ad $3AO^2$, sive ut $4D \times n$ ad $3a^2$. Quare arcus ille $= \frac{4n \times D}{3a} = \frac{4n^3c}{3a^2 \times \overline{a+c}}$. Et cùm arcus ille sit ad alium, quem angulus X mensuram habet, ut a^2 ad $\overline{\text{sin. } T}|^3$, erit arcus, quem angulus X mensuram habet, $= \frac{4n^3c}{3a^5 \times \overline{a+c}} \times \overline{\text{sin. } T}|^3$. Vel si pro $a+c$ ponatur $2a$, nempe cùm perexigua sit illarum a, c differentia, erit mensura anguli X Newtoniani pro radio a, vel HE, $= \frac{4n^3c}{6a^6}\overline{\text{sin. } T}|^3 = \frac{2n^3c}{3a^6}\overline{\text{sin. } T}|^3$, cui ostensus est arcus IK tantùm non æqualis (§ 13). Quare angulus X Newtonianus angulo IHK tantùm non æqualis est. Quare $X \pm V$ angulo $KHI \pm IHG$, hoc est angulo KHG, tantùm non æqualis. Q. E. D.

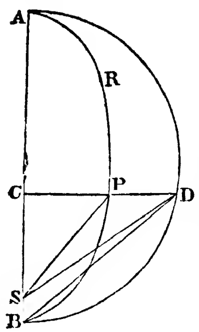
		Y	Z
		° ′ ″	° ′ ″
In orbita	☿	0 — 38 — 5	0 — 21 — 30
	♀	0 — 00 — 2½	0 — 00 — 00,04
	⊖	0 — 00 — 14	0 — 00 — 00, 6
	♂	0 — 7 — 4	0 — 1 — 42
	♃	0 — 1 — 57	0 — 0 — 15
	♄	0 — 2 — 58	0 — 0 — 28

14. Calculis subductis invenio angulos Y, Z in orbitis planetarum, quales hæc Tabella indicat.

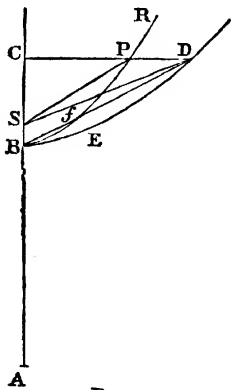
15. Cæterùm in orbitâ Mercurii, computatio ex Newtoni præceptis instituta æquationem maximam dabit $24^\circ - 7' - 31''$; quam Halleius partibus, $25' - 02''$, minorem statuit.

dens

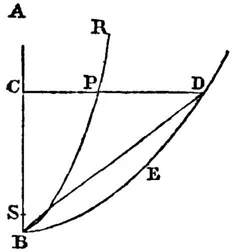
dens tranſeat recta DPC perpendicularis ad axem; actiſque DS, PS, erit area ASD areæ ASP, atque ideo etiam tempori proportionalis. Manente axe AB, minuatur perpetuò latitudo ellipſeos; & ſemper manebit area ASD tempori proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum: &, orbe APB jam coincidente cum axe AB, & umbilico S cum axis termino B, deſcendet corpus in rectâ AC, & area ABD evadet tempori proportionalis. Dabitur itaque ſpatium AC, quod corpus de loco A, perpendiculariter cadendo, tempore dato deſcribit, ſi modò tempori proportionalis capiatur area ABD, & à puncto D ad rectam AB demittatur perpendicularis DC. Q. E. I.



Caſ. 2. Si figura illa RPB Hyperbola eſt, deſcribatur ad eandem diametrum principalem AB hyperbola rectangula BED: & quoniam areæ CSP, CB*f*P, SP*f*B ſunt ad areas CSD, CBED, SDEB, ſingulæ ad ſingulas, in datâ ratione altitudinum CP, CD [a]; & area SP*f*B proportionalis eſt tempori quo corpus P movebitur per arcum P*f*B; erit etiam area SDEB eidem tempori proportionalis. Minuatur latus rectum hyperbolæ RPB in infinitum, manente latere tranſverſo, & coibit arcus PB cum rectâ CB, & umbilicus S cum vertice B, & recta SD cum rectâ BD. Proinde area BDEB proportionalis erit tempori quo corpus C, recto deſcenſu, deſcribit lineam CB. Q.E.I.



Caſ. 3. Et ſimili argumento ſi figura RPB Parabola eſt, & eodem vertice principali, B, deſcribatur alia Parabola BED, quæ ſemper maneat data, interea dum parabola prior, in cujus perimetro corpus P movetur, diminuto & in nihilum redacto ejus latere recto, conveniat cum lineâ CB; fiet ſegmentum

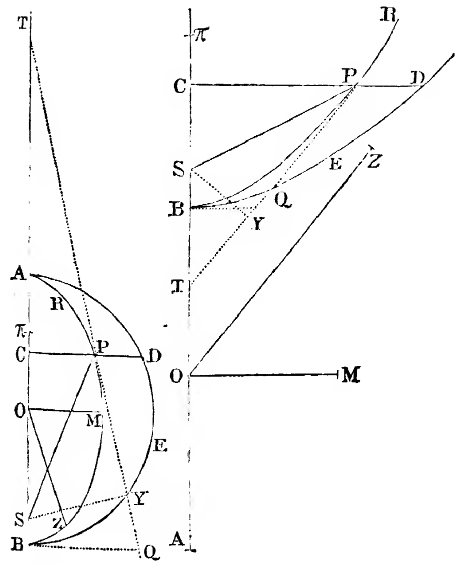


ſegmentum parabolicum BDEB proportionale tempori, quo corpus illud, P vel C, deſcendet ad centrum S vel B. Q. E. I.

PROP. XXXIII. THEOR. IX.

Poſitis jam inventis, dico, quòd corporis cadentis velocitas, in loco quovis C, *eſt ad velocitatem corporis, centro* B, *intervallo* BC, *Circulum deſcribentis, in ſubduplicatâ ratione quam* AC, *diſtantia corporis à Circuli vel Hyperbolæ rectangulæ vertice ulteriore* A, *habet ad figuræ ſemidiametrum principalem* $\frac{1}{2}$ AB.

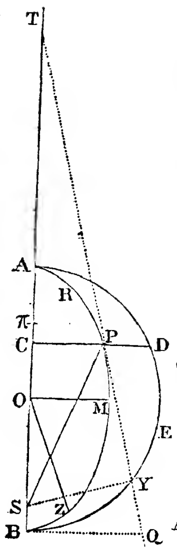
Biſecetur AB, communis utriuſque figuræ RPB, DEB diameter, in O; & agatur recta PT, quæ tangat figuram RPB in P, atque etiam ſecet communem illam diametrum AB (ſi opus eſt productam) in T; ſitque SY ad hanc rectam, & BQ ad hanc diametrum perpendicularis, atque figuræ RPB latus rectum ponatur L. Conſtat per Corol. 9. Prop. XVI. quòd corporis, in lineâ RPB circa centrum S moventis, velocitas in loco quovis P ſit ad velocitatem corporis, intervallo SP, circa idem centrum, Circulum deſcribentis in ſubduplicatâ ratione rectanguli $\frac{1}{2}$ L × SP ad SY quadratum. Eſt autem ex conicis ACB ad CP*q* ut 2AO ad L; ideoque $\frac{2CPq \times AO}{ACB}$ æquale L. Ergo velocitates illæ ſunt ad invicem in ſubduplicatâ ratione $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ ad SY *quad.* Porro ex conicis, eſt CO ad BO ut BO ad TO [b]; & compoſitè, vel diviſim, ut CB ad BT. Unde, vel dividendo, vel componendo, fit BO − vel + CO ad BO ut CT ad

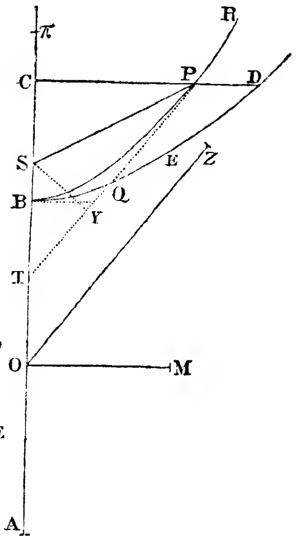


[a] Spatiis utique hyperbolicis CE*f*P, CBED eadem inter ipſa eſt ratio, quæ rectis CP, CD. (Lemma IV. Cor. H. I.) Sed eadem quoque triangulis CSP, CSD. (El. VI. I.) Quare & ſectoribus hyperbolicis SP*f*B, SDEB inter ipſos ratio eadem intercedet. (El. V. II.)

[b] Hamilton. Conic. Lib. I. XLVIII. XLIX.

BT,





BT, id est, AC ad AO ut CP ad BQ; indeque $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ æquale est $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$. Minuatur jam in infinitum figuræ RPB latitudo CP; sic ut punctum P coeat cum puncto C, punctumque S cum puncto B, & linea SP cum lineâ BC, lineaque SY cum lineâ BQ; & corporis, jam rectâ descendentis in lineâ CB, velocitas fiet ad velocitatem corporis centro B intervallo BC circulum describentis, in subduplicatâ ratione ipsius $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$ ad SYq, hoc est (neglectis æqualitatis rationibus SP ad BC & BQq ad SYq) in subduplicatâ ratione AC ad AO sive $\frac{1}{2}$AB. Q. E. D (c).

Corol. 1. Punctis B & S coeuntibus, fit TC ad TS ut AC ad AO.

Corol. 2. Corpus ad datam à centro distantiam in circulo quovis revolvens, motu suo sursum verso ascendet ad duplam suam à centro distantiam.

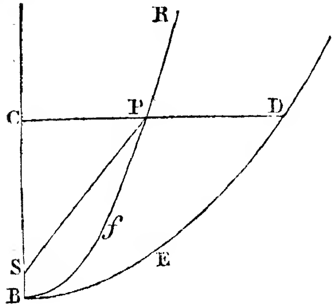
PROP. XXXIV. THEOR. X.

Si figura BED *Parabola est, dico, quòd corporis cadentis velocitas, in loco*

(c) ALITER.

Per centrum O ducatur OM, semiaxis secundus orbitæ RPB, et OZ, semidiameter ejus cum con-
tingente TP parallela; & sit m ad n ut velocitas corporis, circum umbilicum S in orbitâ RPB lati, in
loco P, ad velocitatem corporis, circum centrum S ad distantiam SP, in circulo circumacti. Erit
igitur m^2 ad n^2 ut rectangulum $\frac{1}{2}L \times SP$ ad quadratum ex SY (XVI. Cor. 9.) Jam verò rectan-
gulum $\frac{1}{2}L \times SP$ ad quadratum ex SY rationem habet, quæ componitur è rationibus rectanguli
$\frac{1}{2}L \times SP$ ad quadratum ex SP, quadratique ex SP ad quadratum ex SY; sive è rationibus rectæ $\frac{1}{2}L$
ad rectam SP, quadratique ex SP ad quadratum ex SY; sive rursum è rationibus rectæ $\frac{1}{2}L$ ad
rectam SP, quadratique ex OZ ad quadratum ex OM. Est enim $SP^2 : SY^2 = OZ^2 : OM^2$ (Hamil-
ton. Conic. Lib. II. 31.) Habet igitur m^2 ad n^2 rationem eam, quæ componitur è rationi-
bus rectæ $\frac{1}{2}L$ ad SP, quadratique ex OZ ad quadratum ex OM; sive eam, quæ est parallelepipedi
$\frac{1}{2}L \times OZ^2$ ad parallelepipedon $\frac{1}{2}L \times AO \times SP$; rectangulum enim $\frac{1}{2}L \times AO$ quadrato ex OM æquale
est.

loco quovis C, *æqualis est velocitati quâ corpus, centro* B, *dimidio intervalli sui* BC, *circulum uniformiter describere potest.*



Nam corporis Parabolam RPB circa centrum S describentis velocitas in loco quovis P (per Corol. 7. Prop. XVI.) æqualis est velocitati corporis, dimidio intervalli SP, circulum circa idem centrum S uniformiter describentis. Minuatur parabolæ latitudo CP in infinitum eo, ut arcus parabolicus PfB cum rectâ CB, centrum S cum vertice B, & intervallum SP cum intervallo BC coincidat, & constabit propositio. Q. E. D.

PROP. XXXV. THEOR. XI.

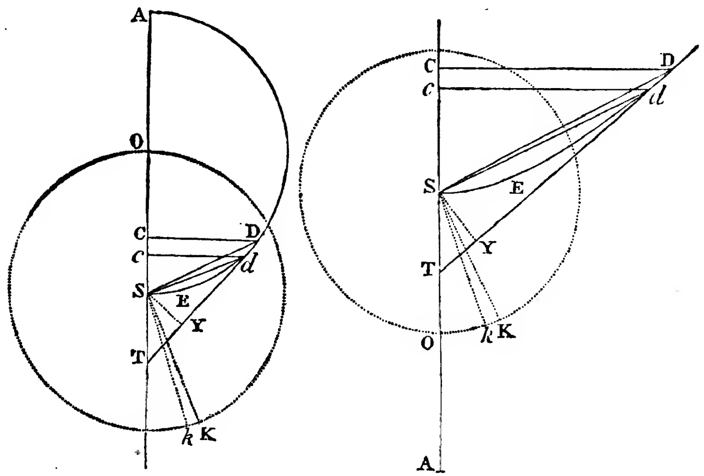
Iisdem positis, dico quòd area figuræ DES, *radio indefinito* SD *descripta, æqualis sit areæ quam corpus, radio dimidium lateris recti figuræ* DES *æquante, circa centrum* S *uniformiter gyrando, eodem tempore describere potest.*

Nam concipe corpus C, quàm minimâ temporis particulâ, lineolam Cc cadendo describere, & interea corpus aliud K, uniformiter in circulo OKk circa centrum S gyrando, arcum Kk describere. Erigantur perpendicula CD, cd occurrentia figuræ DES in D, d. Jungantur SD, Sd, SK, Sk, & ducatur Dd axi AS occurrens in T, & ad eam demittatur perpendiculum SY.

Cas. 1. Jam si figura DES Circulus est vel Hyperbola rectangula, bisecetur ejus transversa diameter AS in O, & erit SO dimidi-

est. Est autem $\frac{1}{2}L \times OZ^2 : \frac{1}{2}L \times AO \times SP = OZ^2 : AO \times SP$. Habet igitur m^2 ad n^2 rationem eam quam quadratum ex OZ ad rectangulum $AO \times SP$. Capiatur $B\pi = SP$. Ita erit $A\pi$ æqualis distantiæ puncti P ab altero curvæ RPB umbilico (Hamilton. Conic. Lib. II 14) ac propterea quadratum ex OZ rectangulo $B\pi \times \pi A$ æquale erit. (Hamilton. Conic. Lib. II. 19.) Habebit igitur m^2 ad n^2 rationem eam quam rectangulum $B\pi \times \pi A$ ad rectangulum $AO \times SP$; sive, propter æquales $B\pi$, SP, eam quam recta $A\pi$ habet ad rectam AO. Et quâcunque fuerit figura RPB latitudine, perinde obtinebit hæc proportionum similitudo. Latitudine igitur illâ in infinitum imminutâ, ratio ultima illorum m^2, n^2 inter ipsa, ea erit, quæ rectæ mutabilis $A\pi$ ad datam AO ultima quoque erit. Latitudine autem CP in infinitum imminutâ, ut puncta P, S tandem cum illis C, B coeant, punctum etiam π cum illo C coibit, & $A\pi$ evadit ipsi AC æqualis. Ratio igitur ultima duorum m^2, n^2 ea rectæ AC ad AO ratio erit; unde ratio ultima m ad n, quæ est velocitatis corporis rectâ cadentis in loco C ad velocitatem corporis in circulo, radio SP, circumacti, hæc inquam ratio ejus quam AC habet ad AO subduplicata erit. Q. E. D.

um lateris recti. Et quoniam eſt TC ad TD ut Cc ad Dd, & TD ad TS ut CD ad SY, erit ex æquo TC ad TS ut $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$. Sed (per Corol. 1. Prop. XXXIII.) eſt TC ad TS ut AC ad AO, puta ſi in coitu punctorum D, d capiantur linearum rationes ultimæ. Ergo AC eſt ad AO, ſeu SK, ut $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$. Porro corporis deſcendentis velocitas in C eſt ad velocitatem corporis circulum, intervallo SC, circa centrum S, deſcribentis in ſubduplicatâ ratione AC ad AO, vel SK (per Prop. XXXIII.) Et hæc velocitas ad velocitatem corporis deſcribentis circulum OKk in ſubduplicatâ ratione SK ad SC (per Corol. 6. Prop. IV.) & ex æquo velocitas prima ad ultimam, hoc eſt lineola Cc ad arcum Kk in ſubduplicatâ ratione AC ad SC, id eſt in ratione AC ad CD. Quare eſt $CD \times Cc$ æquale $AC \times Kk$, & propterea AC ad SK ut $AC \times Kk$ ad $SY \times Dd$, indeque $SK \times Kk$ æquale $SY \times Dd$, & $\frac{1}{2} SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{2} SY \times Dd$; id eſt area KSk æqualis areæ SDd. Singulis igitur temporis particulis gene-

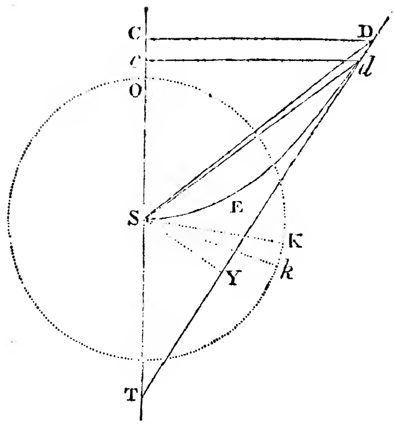


rantur arearum duarum particulæ KSk, & SDd, quæ, ſi magnitudo earum minuatur & numerus augeatur in infinitum, rationem obtinent æqualitatis, & propterea (per Corollarium Lemmatis IV.) areæ totæ ſimul genitæ ſunt ſemper æquales. Q.E.D.

[d] Hamilton. Conic. Lib. I. 47.

[e] Quod ita ſcilicet effeceris, ſi arcum OK ſummæ arcûs AD rectæque DC æqualem ſumpſeris.

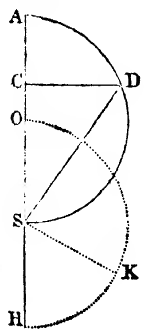
Caſ.



Caſ. 2. Quòd ſi figura DES Parabola ſit, invenietur eſſe ut ſupra $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$ ut TC ad TS, hoc eſt ut 2 ad 1 [d], ideoque $\frac{1}{4} CD \times Cc$ æquale eſſe $\frac{1}{2} SY \times Dd$. Sed corporis cadentis velocitas in C æqualis eſt velocitati, quâ circulus intervallo $\frac{1}{2} SC$ uniformiter deſcribi poſſit (per Prop. XXXIV.) Et hæc velocitas ad velocitatem quâ circulus radio SK deſcribi poſſit, hoc eſt, lineola Cc ad arcum Kk (per Corol. 6. Prop. IV.) eſt in ſubduplicatâ ratione SK ad $\frac{1}{2} SC$, id eſt, in ratione SK ad $\frac{1}{2} CD$. Quare eſt $\frac{1}{2} SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{4} CD \times Cc$, ideoque æquale $\frac{1}{2} SY \times Dd$, hoc eſt, area KSk æqualis areæ SDd, ut ſuprà. Q. E. D.

PROP. XXXVI. PROB. XXV.

Corporis de loco dato A cadentis determinare tempora deſcenſûs.



Super diametro AS, diſtantiâ corporis à centro ſub initio, deſcribe ſemicirculum ADS, ut & huic æqualem ſemicirculum OKH circa centrum S. De corporis loco quovis C erige ordinatim applicatam CD. Junge SD, & areæ ASD æqualem conſtitue ſectorem OSK [e]. Patet per Prop. XXXV. quod corpus cadendo deſcribet ſpatium AC eodem tempore quo corpus aliud, uniformiter circa centrum S gyrando, deſcribere poteſt arcum OK. Q. E. F [f].

PROP. XXXVII. PROB. XXVI.

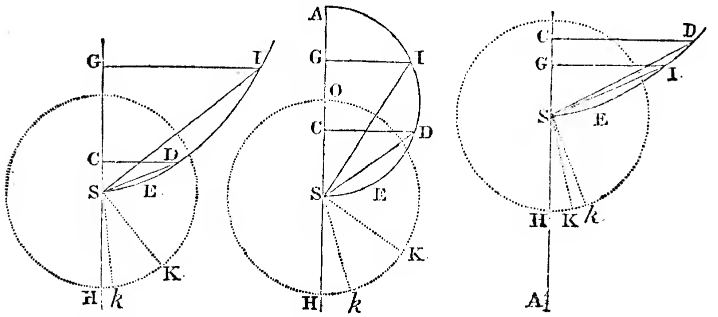
Corporis de loco dato ſurſum vel deorſum projecti definire tempora aſcenſûs vel deſcenſûs.

Exeat corpus de loco dato G ſecundum lineam GS cum veloci-

[f] *Cor. H.* Corpus igitur è loco A demiſſum, rectâ cadendo, eodem temporis ſpatio centrum uſque S pervenerit, quo corpus aliud circa centrum idem S motu æquabili ſemicirculum OKH abſolverit.

tate

tate quâcunque. In duplicatâ ratione hujus velocitatis ad uniformem in circulo velocitatem, quâ corpus ad intervallum datum SG circa centrum S revolvi poſſet, cape GA ad $\frac{1}{2}$AS. Si ratio illa eſt numeri binarii ad unitatem, punctum A infinitè diſtat, quo caſu Parabola vertice S, axe SG, latere quovis recto deſcribenda eſt. Patet hoc per Prop. XXXIV. Sin ratio illa minor vel major eſt quàm 2 ad 1, priore caſu circulus, poſteriore hyperbola rectangula ſuper diametro SA deſcribi debet. Patet per Prop. XXXIII (g). Tum centro S, intervallo æquante dimidium lateris



recti, deſcribatur circulus H*k*K, & ad corporis deſcendentis vel aſcendentis locum G, & locum alium quemvis C, erigantur perpendicula GI, CD occurrentia conicæ ſectioni vel circulo in I ac D.

(g) Nimirum recta GS, quâ corpus centrum verſus cadit, vel aſcenſu recto centrum fugit, pro ultimâ figurâ ſectionis conicæ habenda eſt, quæ umbilicum habeat S, axem verò ſuum in rectâ GS poſitum, ſi manente utique latere tranſverſo, latere autem recto in infinitum imminuto, ſectio illa conica ſenſim evaneſcat. Hoc enim è Prop. XXXIIa. efficitur. Quòd ſi velocitas corporis, rectâ cadentis vel aſcendentis, in loco quovis G, ad velocitatem corporis, circa centrum S ad diſtantiam SG motu æquabili circulum ſcribentis, rationem habeat eam, quæ ſubduplicata ſit ejus quam binarius ad unitatem, pro ultimâ evaneſcentis Parabolæ figurâ habenda eſt recta SG; pro Ellipſeos autem evaneſcentis ultimâ, ſi minor ſit velocitas illa prima; pro ultimâ denique Hyperbolæ, ſi major, quàm pro ratione binarii ad unitatem ſubduplicatâ. Hæc enim Propoſitionibus XXXIIIa & XXXIVa. oſtenſa ſunt. Quamobrem ad hujus Problematis effectionem vel Parabola vel Circulus vel Hyperbola æquilateralis, pro variâ velocitatum ratione, uſurpanda eſt, quemadmodum à Newtono præceptum eſt. *Eadem ferè Le Sœur & Jacquier.*

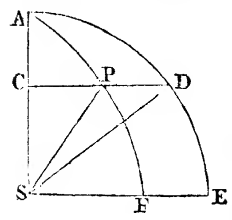
(h) Nam ſi viribus iſtiuſmodi centripetis ſollicitatum corpus aliquod rectâ non cadat, id utique per Ellipſin deferetur, cujus Ellipſeos centrum ipſum virium centrum erit (per Prop. X. Cor. 1.) Sit APF ellipſis illa, & centrum ejus ſit S, ſemiaxis SA. Et per P, locum quemvis corporis per ellipſin lati, ad axem SA agatur ad perpendiculum recta PC, quæ circulo, qui centro A radio SA ſcriptus fuerit, in D occurrat. Junctis SP, SD, ſector ASD ſectoris elliptici ASP, atque propterea temporis proportionem ſervabit. (Lemma IV. Cor. H.) Et manente ſemiaxe SA, ſi latitudo ellipſeos infinitè minuatur, manebit tamen ſectori ASD temporis proportio. Quare cum circulorum ſectores arcuum,

D. Dein junctis SI, SD, fiant ſegmentis SEIS, SEDS ſectores HSK, HS*k* æquales, & per Prop. XXXV. corpus G deſcribet ſpatium GC eodem tempore quo corpus K deſcribere poteſt arcum K*k*. Q. E. F.

PROP. XXXVIII. THEOR. XII.

Poſito quòd vis centripeta proportionalis ſit altitudini ſeu diſtantiæ locorum à centro; dico, quòd cadentium tempora, velocitates & ſpatia deſcripta ſunt arcubus, arcuumque ſinibus rectis & ſinibus verſis reſpectivè proportionalia.

Cadat corpus de loco quovis A ſecundum rectam AS; & centro virium S, intervallo AS, deſcribatur circuli quadrans AE, ſitque CD ſinus rectus arcûs cujuſvis AD; & corpus A, tempore AD, cadendo deſcribit ſpatium AC, inque loco C acquiret velocitatem CD.



Demonſtratur eodem modo ex Propoſitione X. quo Propoſitio XXXII. ex Propoſitione XI. demonſtrata fuit (h).

Corol. 1. Hinc æqualia ſunt tempora, quibus corpus unum de loco A cadendo pervenit ad centrum S, & corpus aliud revolvendo deſcribit arcum quadrantalem ADE.

cuum, quibus inſiſtunt, inter ſe proportionem gerant, arcus quoque AD, temporis quo conficitur arcus ellipſeos AP proportionem ſervabit, idque quæcunque fuerit ellipſeos latitudo. Quare & latitudine illâ in nihilum abeunte, & arcu AP cum rectâ AC congruente, arcus circularis AD temporis caſûs recti per AC proportionem ſervabit. Q. E. D.

Arcus igitur AD temporum caſûs recti inter ſe proportiones ſervare eodem ex Prop. Xa. ejuſque corollario oſtenſum eſt modo, quo propoſitio poſt triceſimam ſecunda ex propoſitione undecimâ oſtenſa fuit.

Quod præterea verò Newtonus dicit, arcuum AD ſinus rectos, CD, velocitatum, quas corpus in locis C adeptum fuerit, proportiones inter ſe ſervare, id nos ſic oſtendimus.

Si per orbes ADE, APE quorum communis eſt axis tranverſus SA corpora duo deferantur è vertice A ſimul digreſſa, vigente, qualis poſita eſt, virium centralium lege; arcus AD, AP à corporibus ſimul abſolventur, quæcunque fuerit orbis interioris latitudo (Prop. X. Cor H.) Quare & latitudine illâ infinitè imminutâ, eodem tempore abſolvetur arcus AD, quo recta AC caſu recto. Erit igitur velocitas corporis rectâ cadentis, in loco C, ad velocitatem æquabilem corporis, in circulo ADE circumacti, ſicut fluxio ſinûs verſi AC ad fluxionem arcûs AD, ſive ut ſinus rectus CD ad datam SD, circuli utique radium. (Tom I. Excerpt. IV. Not. k. Cor.) Expoſitâ igitur datâ quidam recta V, ſit *v* alia recta, eâ quidem lege mutabilis, ut ad datam V eam ſemper illa rationem habeat, quam velocitas corporis rectâ cadentis in loco quovis C ad datam corporis in circulo circumacti velocitatem. Erit igitur $v : V = CD : SD$. Et permutando $v : CD = V : SD$. Datarum verò V, SD inter ſe ratio data. Quare et mutabilium, v, CD, ratio tamen data erit.

V ———

v ———

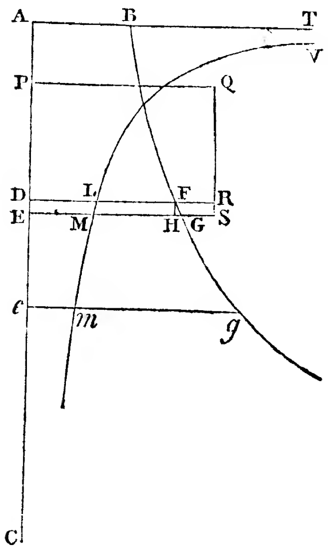
Corol.

Corol. 2. Proinde æqualia ſunt tempora omnia quibus corpora de locis quibuſvis ad uſque centrum cadunt. Nam revolventium tempora omnia periodica (per Corol. 3. Prop. IV.) æquantur.

PROP. XXXIX. PROB. XXVII.

Poſitâ cujuſcunque generis vi centripetâ, & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis rectâ aſcendentis vel deſcendentis tum velocitas in locis ſingulis, tum tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: et contrà.

De loco quovis A in rectâ ADEC cadat corpus E, deque loco ejus E erigatur ſemper perpendicularis EG, vi centripetæ in loco illo ad centrum C tendenti proportionalis: ſitque BFG linea curva, quam punctum G perpetuò tangit. Coincidat autem EG ipſo motûs initio cum perpendiculari AB, & erit corporis velocitas, in loco quovis E, ut recta, quæ poteſt aream curvilineam ABGE. Q. E. I.



In EG capiatur EM rectæ, quæ poteſt aream ABGE, reciprocè proportionalis, & ſit VLM linea curva, quam punctum M perpetuò tangit, & cujus Aſymptotos eſt recta AB producta; & erit tempus, quo corpus cadendo deſcribit lineam AE, ut area curvilinea ABTVME. Q. E. I.

Etenim in rectâ AE capiatur linea quàm minima, DE, datæ longitudinis; ſitque DLF locus lineæ EMG, ubi corpus verſabatur in D; & ſi ea ſit vis centripeta, ut recta, quæ poteſt aream ABGE, ſit ut deſcendentis velocitas; erit area ipſa in duplicatâ ratione velocitatis: id eſt, ſi pro velocitatibus in D & E, ſcribatur V & V+I, erit area ABFD ut VV,

(*) Namque *puta A, P eſſe loca à quibus ſi caſum unumquodque ſuum duo corpora inchoaverint, alterum*

VV, & area ABGE ut VV + 2VI + II; & diviſim, area DFGE ut 2VI + II; ideoque $\frac{DFGE}{DE}$ ut $\frac{2VI \times II}{DE}$; id eſt, ſi primæ quantitatum naſcentium rationes ſumantur, longitudo DF ut quantitas $\frac{2VI}{DE}$, ideoque etiam ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I \times V}{DE}$. Eſt autem tempus, quo corpus cadendo deſcribit lineolam DE, ut lineola illa directè & velocitas V inverſè; eſtque vis ut velocitatis incrementum I directè & tempus inverſè, ideoque ſi primæ naſcentium rationes ſumantur, ut $\frac{I \times V}{DE}$, hoc eſt, ut longitudo DF. Ergo vis ipſi DF, vel EG, proportionalis facit ut corpus eâ cum velocitate deſcendat, quæ ſit ut recta quæ poteſt aream ABGE. Q. E. D.

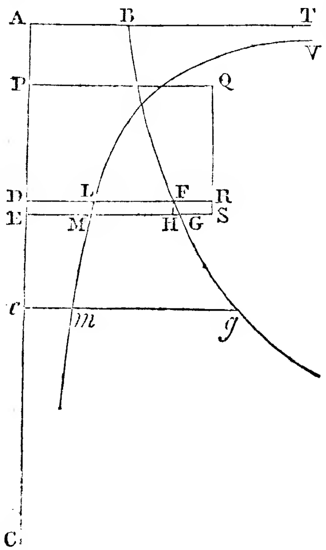
Porro cùm tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola DE deſcribatur, ſit ut velocitas inverſè, ideoque inverſè ut linea recta quæ poteſt aream ABFD; ſitque DL, atque ideo area naſcens DLME, ut eadem linea recta inverſè: erit tempus ut area DLME, & ſumma omnium temporum ut ſumma omnium arearum, hoc eſt (per Corol. Lem. IV.) tempus totum quo linea AE deſcribitur ut area tota ATVME. Q. E. D.

Corol. 1. Si P ſit locus, de quo corpus cadere debet, ut urgente aliquâ uniformi vi centripetâ notâ (qualis vulgo ſupponitur gravitas) velocitatem acquirat in loco D æqualem velocitati, quam corpus aliud vi quâcunque cadens acquiſivit eodem loco D; & in perpendiculari DF capiatur DR, quæ ſit ad DF, ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco D, & compleatur rectangulum PDRQ, eique æqualis abſcindatur area ABFD; erit A locus de quo corpus alterum cecidit. Namque (*) completo rectangulo DRSE, cùm ſit area ABFD ad aream DFGE ut VV ad 2VI, ideoque ut $\frac{1}{2}$V ad I, id eſt, ut ſemiſſis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæquabili cadentis; & ſimiliter area PQRD ad aream DRSE ut ſemiſſis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; ſintque incrementa illa (ob æqualitatem temporum naſcentium) ut vires generatrices, id eſt, ut ordinatim applicatæ DF, DR, ideoque ut areæ naſcentes DFGE, DRSE; erunt ex æquo areæ totæ ABFD, PQRD ad invicem ut ſemiſſes

terum quidem vi inæquabili alterum verò æquabili incitatum, in loco D æquales velocitates adepta fuerint. Tum completo, &c.

miſſes totarum velocitatum (k); & propterea, ob æqualitatem velocitatum, æquantur.

Corol. 2. Unde ſi corpus quodlibet de loco quocunque D datâ cum velocitate vel ſurſum vel deorſum projiciatur, & detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco *e*, erigendo ordinatam *eg*, & capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco D ut eſt recta, quæ poteſt rectangulum PQRD areâ curvilineâ DF*ge* vel auctum, ſi locus *e* eſt loco D inferior, vel diminutum, ſi is ſuperior eſt, ad rectam quæ poteſt rectangulum ſolum PQRD.



Corol. 3. Tempus quoque innoteſcet erigendo ordinatam *em* reciprocè proportionalem lateri quadrato ex PQRD + vel − DF*ge*, & capiendo tempus, quo corpus deſcripſit lineam D*e*, ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit à P & cadendo pervenit ad D, ut area curvilinea DL*me* ad rectangulum 2PD × DL. Namque tempus, quo corpus vi uniformi deſcendens deſcripſit lineam PD, eſt ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineam PE, in ſubduplicatâ ratione PD ad PE, id eſt (lineolâ DE jamjam naſcente) in ratione PD ad PD + $\frac{1}{2}$DE, ſeu 2PD ad 2PD + DE; & diviſim, ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineolam DE ut 2PD ad DE, ideoque ut rectangulum 2PD × DL ad aream DLME; eſtque tempus quo corpus utrumque deſcripſit lineolam DE ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu deſcripſit lineam D*e*, ut area DLME ad aream DL*me*, & ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum 2PD × DL ad aream DL*me*.

SECTIO

(k) Corporum quæ à locis A, P demiſſa fuerint, quorum illud vi inæquabili, hoc æquabili, incitari poſſumus, eorum in loco D velocitates literæ V, *v* deſignent. Literæ autem I, *i* velocitatum V, *v* incrementa deſignent ſimul genita. Jam conferendo primas quantitatum naſcentium rationes,

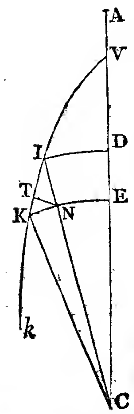
SECTIO VIII.

De inventione orbium in quibus corpora viribus quibuſcunque centripetis agitata revolvuntur.

PROP. XL. THEOR. XIII.

Si corpus, cogente vi quâcunque centripetâ, moveatur utcunque, & corpus aliud rectâ aſcendat vel deſcendat, ſintque eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum caſu æquales, velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.

Deſcendat corpus aliquod ab A per D, E, ad centrum C; & moveatur corpus aliud à V in lineâ curvâ VIK*k*. Centro C, intervallis quibuſvis deſcribantur circuli concentrici DI, EK, rectæ AC in D & E, curvæque VIK in I & K occurrentes. Jungatur IC occurrens ipſi KE in N; & in IK demittatur perpendiculum NT; ſitque circumferentiarum circulorum intervallum, DE vel IN, quàm minimum, & habeant corpora in D & I velocitates æquales. Quoniam diſtantiæ CD, CI æquantur, erunt vires centripetæ in D & I æquales. Exponantur hæ vires per æquales lineolas DE, IN; & ſi vis una IN (per legum Corol. 2.) reſolvatur in duas NT & IT, vis NT, agendo ſecundum lineam NT corporis curſui ITK perpendicularem, nil mutabit velocitatem corporis in curſu illo, ſed retrahet ſolummodo corpus à curſu rectilineo, facietque ipſum de orbis tangente perpetuò deflectere, inque viâ curvilineâ ITK*k* progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota conſumetur: vis autem altera, IT, ſecundum corporis curſum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quàm minimo accelerationem generabit ſibi ipſi proportionalem. Proinde corporum in D & I accelerationes, æqualibus temporibus factæ, ſi ſumantur linearum naſcentium



rationes, erit area ABFD ad aream DFGE ut VV ad 2I × V (per hanc propoſitionem) ſive ut $\frac{1}{2}$V ad I. Erit autem area DFGE ad aream DRSE ut DF ad DR, hoc eſt ut I ad *i*. Rurſum erit area DRSE ad aream PQRD ut 2*i* × *v* ad *vv* (per hanc propoſitionem) hoc eſt ut *i* ad $\frac{1}{2}$*v*. Ex æquo igitur area ABFD erit ad aream PQRD ut $\frac{1}{2}$V ad $\frac{1}{2}$*v*.

DE, IN, IK, IT, NT rationes primæ, ſunt ut lineæ DE, IT : temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim. Tempora autem quibus DE & IK deſcribuntur, ob æqualitatem velocitatum ſunt ut viæ deſcriptæ DE & IK ; ideoque accelerationes, in curſu corporum per lineas DE & IK, ſunt ut DE & IT, DE & IK conjunctim, id eſt ut DE *quad.* & IT × IK *rectangulum.* Sed *rectangulum* IT × IK æquale eſt IN *quadrato* [l], hoc eſt, æquale DE *quad.* & propterea accelerationes in tranſitu corporum à D & I ad E & K æquales generantur. Æquales igitur ſunt corporum velocitates in E & K : & eodem argumento ſemper reperientur æquales in ſubſequentibus æqualibus diſtantiis. Q. E. D.

Sed & eodem argumento corpora æquivelocia & æqualiter à centro diſtantia, in aſcenſu ad æquales diſtantias æqualiter retardabuntur. Q. E. D.

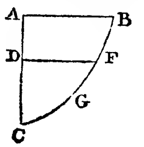
Corol. 1. Hinc ſi corpus vel oſcilletur pendens à filo, vel impedimento quovis politiſſimo & perfectè lubrico cogatur in lineâ curvâ moveri, & corpus aliud rectâ aſcendat vel deſcendat, ſintque velocitates eorum in eâdem quâcunque altitudine æquales : erunt velocitates eorum in aliis quibuſcunque æqualibus altitudinibus æquales. Namque corporis penduli filo, vel impedimento vaſis abſolutè lubrici, idem præſtatur, quod vi tranſverſâ NT. Corpus eo non retardatur, non acceleratur, ſed tantùm cogitur de curſu rectilineo diſcedere.

Corol. 2. Hinc etiam ſi quantitas P ſit maxima à centro diſtantia, ad quam corpus, vel oſcillans, vel in trajectoriâ quâcunque revolvens, deque quovis trajectoriæ puncto, eâ quam ibi habet velocitate ſurſum projectum aſcendere poſſit ; ſitque quantitas A diſtantia corporis à centro in alio quovis orbitæ puncto, & vis centripeta ſemper ſit ut ipſius A dignitas quælibet A^{n-1}, cujus index

n − 1

(l) Propter angulos INK, NTK rectos.

(m) NEMPE cùm ea ſit lex vis centripetæ, ut ad quamlibet à centro diſtantiam, literâ A ſignificatam, vis illius efficacia ſit ut A^{n-1}, literâ utique n numerum deſignante ; Curva BFG Propoſitionis XXXIX^{æ}. per ipſum virium centrum C tranſibit, ut in figurâ appoſitâ. Ponatur igitur CA rectæ P æqualis, ſitque CD æqualis indefinitæ A. Eductiſque AB, DF ad perpendiculum, velocitas corporis rectâ cadentis vel aſcendentis in loco D erit ut recta quæ poteſt aream ADFB, hoc eſt, ut $\sqrt{ADFB}$ ſive ut $\sqrt{CAB - CDF}$; eſt enim area ADFB duarum CAB, CDF differentia. Jam verò cùm DF ſit ut vis centripeta in loco D, erit



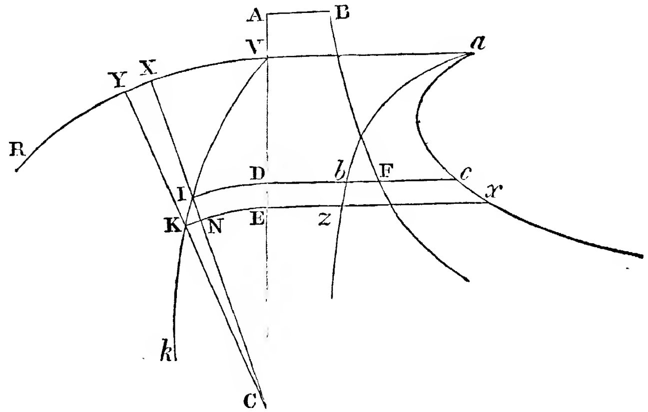
DF

$n - 1$ eſt numerus quilibet n unitate diminutus ; velocitas corporis in omni altitudine A erit ut $\sqrt{P^n - A^n}$, atque ideo datur. Namque velocitas rectâ aſcendentis ac deſcendentis (per Prop. XXXIX.) eſt in hâc ipſâ ratione [m].

PROP. XLI. PROB. XXVIII.

Poſitâ cujuſcunque generis vi centripetâ, & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum tempora motuum in trajectoriis inventis.

Tendat vis quælibet ad centrum C, & invenienda ſit trajectoria VIKk. Detur circulus VR, centro C, intervallo quovis, CV, deſcriptus ; centroque eodem deſcribantur alii quivis circuli ID, KE trajectoriam ſecantes in I & K, rectamque CV in D & E. Age tum

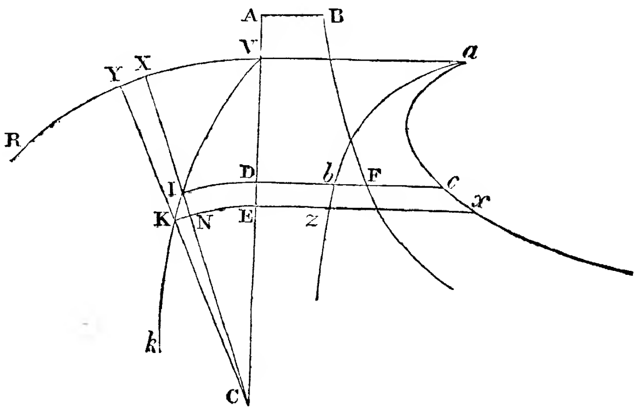


rectam CNIX ſecantem circulos KE, VR in N & X, tum rectam CKY occurrentem circulo VR in Y. Sint autem puncta I & K ſibi in-

DF ut CD^{n-1}. Quare fluxio areæ CDF erit ut $CD^{n-1} \times \dot{\overline{CD}}$. Quare area CDF erit ut $\frac{1}{n} CD^n$ (Geometr. Flux. Th. IV.) Ac propterea area CAB erit ut $\frac{1}{n} CA^n$. Et ADFB ut $\frac{1}{n} \overline{CA^n - CD^n}$ ſive ut $\frac{1}{n} \overline{P^n - A^n}$ ſive denique dato numero n, ut $\overline{P^n - A^n}$. Quare velocitas corporis rectâ cadentis vel aſcendentis, in loco D, erit ut $\sqrt{P^n - A^n}$.

vicem

vicem viciniſſima, & pergat corpus ab V per I & K ad k; ſitque punctum A locus ille, de quo corpus aliud cadere debet, ut in loco D velocitatem acquirat æqualem velocitati corporis prioris in I. Et ſtantibus quæ in Propoſitione XXXIX, lineola IK, dato tempore quàm minimo deſcriptâ, erit ut velocitas, atque ideo ut recta quæ poteſt aream ABFD; & triangulum ICK tempori proportionale dabitur; ideoque KN erit reciprocè ut altitudo IC, id



eſt, ſi detur quantitas aliqua Q, & altitudo IC nominetur A, ut $\frac{Q}{A}$. Hanc quantitatem $\frac{Q}{A}$ nominemus Z, & ponamus eam eſſe magnitudinem ipſius Q, ut ſit in aliquo caſu $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut eſt IK

(c) Per El. VI. 20. Nimirum cùm figuræ evaneſcentes CXY, CNK ſint ultimò inter ſe ſicut figuræ ſimiles, quarum CX, CN ſunt latera homologa.

(d) Nempe per quadraturam curvæ VDba, quærendo abſciſſam axis VD, quæ datæ areæ longitudo eſt.

(e) Datâ enim VD dabitur areæ curvæ aVDc quæ datam habet abſciſſam VD, cujuſque ordinata Dc datam aliquam relationem ad abſciſſam habet.

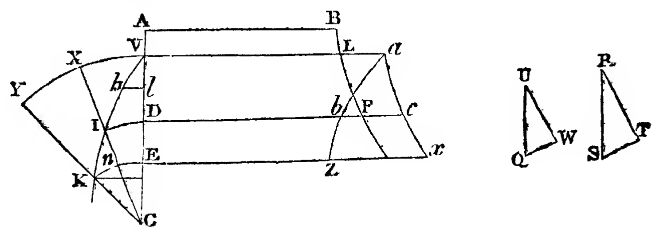
(f) ALITER.

SINT VCb, ICK ſectores orbitæ, qui motu corporis temporibus æqualibus conficiuntur, & à punctis k, K in rectas CV, CI deducantur ad perpendiculum bl, Kn. Sectores VCb, ICK, temporibus æqualibus confecti, inter ſe æquales erunt (Prop. I.) Temporibus verò quibus conficiuntur infinitè imminutis, ita tamen ut maneant ſemper inter ſe æqualia, ſectores etiam manebunt ſemper inter ſe æquales. Unde et evaneſcentium ultima inter ipſos ratio æqualitas erit. Sectores autem illi evaneſcentes cum rectangulis CV $\times bl$, CI $\times$ Kn, quorum utique dimidiis ultimò æquales ſiunt, proportione ultimò convenient. Rectangula igitur illa ſiunt ultimò inter ſe æqualia. Recta Va, à puncto V ad perpendiculum cum rectâ CA educta, curvæ BFG in L occurrat. Exponantur rectæ UQ, RS; quarum illa UQ ea ſit quæ poſſit aream ABLV, altera verò RS poſſit

IK ad KN; & erit in omni caſu $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut IK ad KN, & ABFD ad ZZ ut IKq ad KNq, & diviſim ABFD−ZZ ad ZZ ut IN *quad.* ad KN *quad.* ideoque $\sqrt{ABFD-ZZ}$ ad Z, ſeu $\frac{Q}{A}$, ut IN ad KN, & propterea A×KN æquale $\frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD-ZZ}}$. Unde cùm YX×XC ſit ad A×KN ut CXq ad AA (c), erit rectangulum XY×XC æquale $\frac{Q \times IN \times CX \text{ quad.}}{AA\sqrt{ABFD-ZZ}}$. Igitur ſi in perpendiculo DF capiantur ſemper Db, Dc ipſis $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD-ZZ}}$, $\frac{Q \times CX \text{ quad.}}{2AA\sqrt{ABFD-ZZ}}$ æquales reſpectivè, & deſcribantur Curvæ lineæ ab, ac, quas puncta b, c perpetuò tangunt; deque puncto V ad lineam AC erigatur perpendiculum Va, abſcindens areas curvilineas VDba, VDca, & erigatur etiam ordinatæ Ez, Ex: quoniam rectangulum Db×IN, ſeu DbzE, æquale eſt dimidio rectanguli, A×KN, ſeu triangulo ICK; & rectangulum Dc×IN ſeu DcxE æquale eſt dimidio rectanguli YX×XC, ſeu triangulo XCY: hoc eſt, quoniam arearum VDba, VIC æquales ſemper ſunt naſcentes particulæ DbzE, ICK, & arearum VDca, VCX æquales ſemper ſunt naſcentes particulæ DcxE, XCY; erit area genita VDba æqualis areæ genitæ VIC, ideoque tempori proportionalis, & area genita VDca æqualis ſectori genito VCX. Dato igitur tempore quovis ex quo corpus diſceſſit de loco V, dabitur area ipſi proportionalis VDba, & inde dabitur corporis altitudo CD vel CI (d); & area VDca, eique æqualis ſector VCX unà cum ejus angulo VCI (e). Datis autem angulo VCI & altitudine CI datur locus I, in quo corpus, completo illo tempore, reperietur. Q. E. I (f).

Corol.

poſſit aream ABFD. Erit igitur UQ ad RS ut velocitas corporis in loco V ad velocitatem ejus in loco I (Prop. XXXIX & XL.) Conſtituantur anguli QUW, SRT angulis bVC, KIn, quibus rectæ



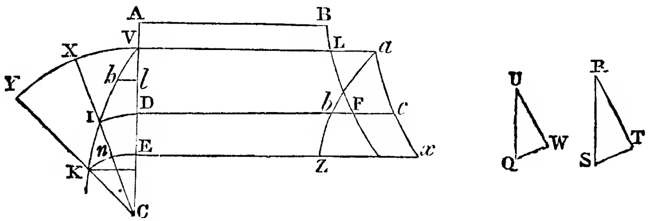
CV, CI ad curvam in punctis, V, K inclinentur, ſingulatim æquales. Et à punctis Q, S, in rectas UW, RT demittantur ad perpendiculum QW, ST. Ita efformata erunt triangula rectangula UWQ, RTS,

Corol. 1. Hinc maximæ minimæque corporum altitudines, id eſt, apſides trajectoriarum expeditè inveniri poſſunt. Sunt enim apſides puncta illa, in quibus recta IC per centrum ducta incidit perpendiculariter in trajectoriam VIK: id quod fit, ubi rectæ IK & NK æquantur, ideoque ubi area ABFD æqualis eſt ZZ.

Corol. 2. Sed & angulus KIN, in quo trajectoria alicubi ſecat lineam illam IC, ex datâ corporis altitudine IC expeditè invenitur; nimirum capiendo ſinum ejus ad radium ut KN ad IK, id eſt, ut Z ad latus quadratum areæ ABFD.

Corol.

RTS, ad quorum utique ſimilitudinem figuræ evaneſcentes V*lb*, INK ultimò accedent. Erit igitur ultimò V*b* ad *bl* ut UQ ad QW, necnon IK ad K*n* ut RS ad ST. Arcus autem evaneſcens V*b* ad evaneſcentem IK erit ultimò ut velocitas corporis in loco V ad velocitatem corporis in loco I; nimirum cùm arcus illi temporibus æqualibus conficiuntur. Arcus igitur evaneſcens V*b* ad evaneſcentem IK erit ultimò ut recta UQ ad rectam RS. (El. V. 11.) Cùm igitur ſit *bl* ad V*b* ultimò ut WQ ad QU, & V*b* ad IK ultimò ut UQ ad RS, atque rurſum IK ad K*n* ultimo ut RS ad ST, ex æquo erit *bl* ad K*n* ultimo ut QW ad ST. Quare & ratio illa quæ componitur è ratione rectæ VC ad rectam IC, atque eâ quæ ultima eſt evaneſcentis *bl* ad evaneſcentem K*n*, hæc eadem componetur è rationibus rectæ CV ad rectam IC, rectæque QW ad rectam ST. Hoc eſt, ratio ultima rectanguli evaneſcentis $CV \times bl$, ad evaneſcens $IC \times Kn$ eadem erit, quæ rectanguli $VC \times QW$ ad



rectangulum $IC \times ST$. Fiunt autem evaneſcentia illa ultimò quidem inter ſe æqualia; id enim jam ſuprà oſtendimus. Quare & rectangula $CV \times QW$, $CI \times ST$ erunt inter ſe æqualia. Si igitur in rectâ DF capiatur longitudo D*b*, ea utique quæ oritur applicando rectangulum $CV \times QW$ ad duplam rectam RT; atque rurſum longitudo D*c*, quæ habeat ad D*b* rationem eam quam quadratum ex CV ad quadratum ex CI, tum ſi ducantur curvæ *abz*, *acx*, ad quas collocentur ſemper puncta *b*, *c*; erit area quidem V*ab*D ſectori orbitæ VCI, area autem V*ac*D ſectori circulari VCX æqualis. Quod ſic oſtendo. Rectangulum $\overline{Db \times 2RT}$ cùm æquale ſit rectangulo $CV \times QW$, ita enim factum eſt, idem rectangulo $IC \times ST$ æquale erit. Quare $Db : IC = ST : 2RT$, & $Db : \frac{1}{2}IC = ST : RT$. Quare cùm ST ſit ad RT ut K*n* ad I*n* ultimò erit $Db : \frac{1}{2}IC = Kn : In$ ultimò. Quare rectangulum evaneſcens $Db \times In$ triangulo evaneſcenti CIK fit ultimò æquale. Sed fluxio areæ V*ab*D ad fluxionem areæ VCI rationem habet eam, quæ ultima eſt evaneſcentis rectanguli $Db \times In$ ad evaneſcens triangulum CIK. Fluxiones igitur illæ ſunt inter ſe æquales. Quare & fluentes, areæ nimirum ipſæ V*ab*D, VCI, cùm in loco V ſimul à nihilo generari inceperint, inter ſe æquales erunt. Præterea cùm ſit D*c* ad D*b* ut quadratum ex CV ad quadratum ex CI, cùm ſit etiam fluxio areæ V*ac*D ad fluxionem areæ V*ab*D ut D*c* ad D*b*, & fluxio ſectoris VCX ad fluxionem ſectoris VCI ut quadratum ex VX vel VC ad quadratum ex CI, idcirco erit $\dot{\overline{VacD}} : \dot{\overline{VabD}} = \dot{\overline{VCX}} : \dot{\overline{VCI}}$ (per El. V. 11.) Sed oſtenſæ ſunt $\dot{\overline{VabD}}$, $\dot{\overline{VCI}}$ inter ſe æquales. Quare & $\dot{\overline{VacD}}$, $\dot{\overline{VCX}}$ inter ſe æquales erunt. (El. V. 14.) Quare & fluentes, areæ nimirum ipſæ V*ac*D, VCX (cùm in loco V ſimul à nihilo generari inceperint) inter ſe æquales erunt. (Geometr. Flux. Th. II.)

6

Hâc

Corol. 3. Si centro C & vertice principali V deſcribatur ſectio quælibet conica VRS, & à quovis ejus puncto R agatur tangens RT occurrens axi infinitè producto CV in puncto T; dein, junctâ CR, ducatur recta CP, quæ æqualis ſit abſciſſæ CT, angulumque VCP ſectori VCR proportionalem conſtituat; tendat autem ad centrum C vis centripeta cubo diſtantiæ locorum à centro reciprocè proportionalis, & exeat corpus de loco V juſtâ cum velocitate ſecundum lineam rectæ CV perpendicularem: progredietur corpus illud in trajectoriâ VPQ, quam punctum P perpetuò tangit;

Hâc ratione ſectores VCI, VCX in areas tranſmutantur quæ ordinatis ad perpendiculum erectis, rectam VD, datæ utique diſtantiæ V & indefinitæ CD differentiam, longitudinem habent. Unde ſi ordinatæ D*b*, D*c* ad abſciſſam VD certas aliquas relationes gerant, Curvæ *abz*, *acx* per Newtoni inventa quadraturæ ſubjicientur: per earum vero quadraturas, vel invenientur Curvæ per quas corpora deferentur, vel, ſi datæ ſint curvæ illæ, dabuntur etiam tempora quibus data datarum curvarum ſpatia corpora abſolverint.

Primùm enim ſi datum ſit temporis ſpatium quo corpus aliquod è dato loco V egreſſum ad alium ignotum locum I orbitæ non datæ pervenerit, locus ille I hâc ratione inveniendus erit. Ex dato temporis ſpatio dabitur area *a*VD*b* magnitudine; hujus igitur baſis VD dabitur. (Analyſ. per Æquationes Infinitas, C. XI. Sect. 2.) Datâ autem VD dabitur area VD*ca* (ope Libri de Quadraturâ Curvarum). Huic areæ æqualis eſt ſector VCX, cujus etiam radius VC magnitudine & poſitione datus eſt (id enim poſuimus). Dato autem ſectore VCX, dabitur angulus VCX. Quare recta CX poſitione data; ſed CI magnitudine; cùm datarum VC, VD differentiæ CD æqualis ea ſit. Punctum igitur I datum. Datiſque aliis temporibus, dabuntur alia curvæ VIK puncta; datiſque pluribus punctis, quorum major tamen deſiderabitur numerus prout Curva genere elatior fuerit, ipſa tandem Curva poſitione dabitur.

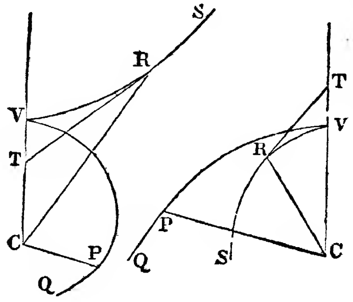
E contrario ſi Curva VIK poſitione data ſit, tempora quibus corpus aliquod data ejus ſpatia confecerit, hâc ratione invenientur. Datis punctis V, I, propter datum C, dabuntur CV, CI, magnitudine. Quare illarum differentia VD dabitur. Datâque abſciſſâ VD, è naturâ curvæ *abz*, area ejus V*ab*D dabitur; cui æqualis eſt ſector VCI. Sector igitur VCI magnitudine datus erit. Si præterea detur punctum K, ſector VCK, per quadraturam curvæ *abz*, magnitudine datus erit. Unde ſi detur tempus, quo alterum è ſectoribus illis confectum fuerit, tempus, quo alterum etiam conficietur, datum erit. Vel ſi temporum illorum neutrum detur, ratio tamen, quæ illis mutuò intercedit, innoteſcet.

Cæterum curvarum *abz*, *acx* ordinatæ D*b*, D*c* ad abſciſſam VD relationes habent hiſce ferè formulis oſtenſas.

Datum rectangulum $CV \times QW$ nota q^2 deſignet, diſtantiam indefinitam CI litera A, rectamque $\frac{q^2}{A}$ litera Z. Jam cùm rectangula $IC \times ST$, $CV \times QW$, inter ſe æqualia ſint (id enim oſtenſum), erit $ST = \frac{q^2}{A} = Z$. Sed $RS = \sqrt{ABFD}$ (ita enim factum eſt). Unde in triangulo RTS, cujus angulus ad T rectus, $RT = \sqrt{ABFD - ZZ}$. Ergo D*b*, quæ facta eſt $\frac{CV \times QW}{2RT} = \frac{q^2}{2RT}$, hæc inquam $Db = \frac{q^2}{2\sqrt{ABFD - ZZ}}$. Rurſum cùm facta ſit D*c* ad D*b* ut CV^2 ad CI^2, erit $Dc = \frac{Db \times CX^2}{CI^2}$. Hoc eſt $Dc = \frac{q^2 \times CX^2}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$. Quæ ſane formulæ haud aliâ re à Newtonianis abſunt, niſi quòd pro litera ejus Q notam q^2 poſuerim, ut ſuperficiem ſcilicet apertiùs ſignificarem. Verùm illæ D*b*, D*c* ſimpliciùs quidem, neque ad computandi utilitates minùs ut opinor accommodatè, hiſce formulis indicantur: $Db = \frac{q^2}{2RT}$. $Dc = \frac{CV^2}{CI^2} \times \frac{q^2}{2RT}$.

ideoque

ideoque ſi conica ſectio VRS Hyperbola ſit, deſcendet idem ad centrum: ſin ea Ellipſis ſit, aſcendet illud perpetuò & abibit in infinitum. Et contrà, ſi corpus quâcunque cum velocitate exeat de loco V, & perinde ut incœperit vel obliquè deſcendere ad centrum, vel ab eo obliquè aſcendere, figura VRS vel Hyperbola ſit vel Ellipſis, inveniri poteſt trajectoria, augendo vel minuendo angulum VCP in datâ aliquâ ratione. Sed &, vi centripetâ in centrifugam verſâ, aſcendet corpus obliquè in trajectoriâ VPQ, quæ invenitur, capiendo angulum VCP ſectori elliptico VRC proportionalem, & longitudinem CP longitudini CT æqualem, ut ſuprà. Conſequuntur hæc omnia ex propoſitione præcedente, per Curvæ cujuſdam quadraturam, cujus inventionem, ut ſatis facilem, brevitatis gratiâ miſſam facio (g).



PROP. XLII. PROB. XXIX.

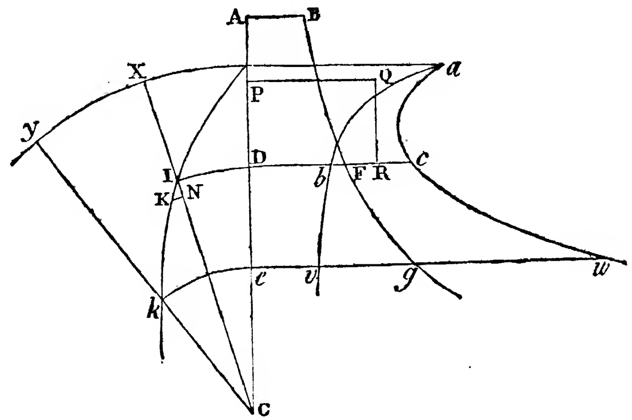
Datâ lege vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, ſecundum datam rectam egreſſi.

Stantibus quæ in tribus propoſitionibus præcedentibus: exeat corpus de loco I ſecundum lineolam IK, eâ cum velocitate, quam corpus aliud, vi aliquâ uniformi centripetâ, de loco P cadendo acquirere poſſet in D: ſitque hæc vis uniformis ad vim, quâ corpus primum urgetur in I, ut DR ad DF. Pergat autem corpus verſus *k*; centroque C, & intervallo C*k* deſcribatur circulus, *ke*, occurrens rectæ PD in *e*, & erigantur curvarum BF*g*, *abv*, *acw* ordinatim applicatæ *eg*, *ev*, *ew*. Ex dato rectangulo PDRQ, datâque lege vis centripetæ, quâ corpus primum agitatur, datur curva linea BF*g*, per conſtructionem Problematis XXVII. & ejus Corol 1. Deinde ex dato angulo CIK datur proportio naſcentium IK,

(g) Vide Librum Noſtrum *De Viribus Centralibus quæ rationem triplicatæ diſtantiarum contrariam inter ſe conſtanter ſervant.*

(h) *Efficiendum*

IK, KN; & inde, per conſtructionem Prob. XXVIII. datur quantitas Q, unà cum curvis lineis *abv*, *acw*: ideoque, completo tempore quovis D*bve*, datur tum corporis altitudo C*e* vel C*k*, tum



area D*cwe*, eique æqualis ſector XC*y*, angulusque IC*k*, & locus *k* in quo corpus tunc verſabitur. Q. E. I.

Supponimus autem in his propoſitionibus vim centripetam, in receſſu quidem à centro, variari ſecundum legem quamcunque, quam quis imaginari poteſt; in æqualibus autem à centro diſtantiis, eſſe undique eandem. Atque hactenus motum corporum in orbibus immobilibus conſideravimus. Supereſt ut de motu eorum in orbibus, qui circa centrum virium revolvuntur, adjiciamus pauca.

SECTIO IX.

De motu corporum in orbibus mobilibus, deque motu apſidum.

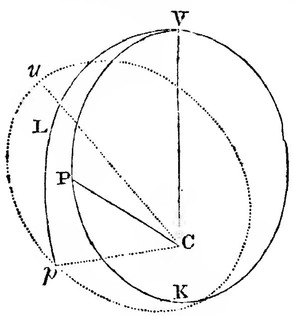
PROP. XLIII. PROB. XXX.

Efficiendum eſt (a) *ut corpus in trajectoriâ quâcunque circa centrum virium revolvente perinde moveri poſſit, atque corpus aliud in eâdem trajectoriâ quieſcente.*

(a) *Efficiendum eſt.* i. e. Definienda eſt vis centripeta, quâ efficiatur illud; datâ nimirum lege vis centripetæ quâ corpus urgetur in orbitâ quieſcente.

In

In orbe VPK positione dato revolvatur corpus P pergendo à V versus K. A centro C agatur semper *cp*, quæ sit ipsi CP æqualis, angulumque VC*p* angulo VCP proportionalem constituat; & area, quam linea *cp* describit, erit ad aream VC*p*, quam linea CP simul describit, ut velocitas lineæ describentis *cp* ad velocitatem lineæ describentis CP; hoc est, ut angulus VC*p* ad angulum VCP, ideoque in datâ ratione, & propterea tempori proportionalis. Cùm area tempori proportionalis sit, quam linea *cp* in plano immobili describit, manifestum est, quòd corpus, cogente justæ quantitatis vi centripetâ, revolvi possit unà cum puncto *p* in curvâ illâ lineâ, quam punctum idem *p*, ratione jam expositâ, describit in plano immobili. Fiat angulus VC*u* angulo PC*p*, & linea C*u* lineæ CV, atque figura *uCp* figuræ VCP æqualis; & corpus in *p* semper existens movebitur in perimetro figuræ revolventis *uCp*, eodemque tempore describet arcum ejus, *up*, quo corpus aliud P arcum ipsi similem & æqualem, VP, in figurâ quiescente VPK describere potest. Quæratur igitur, per Corollarium quintum Propositionis VI. vis centripeta, quâ corpus revolvi possit in curvâ illâ lineâ, quam punctum *p* describit in plano immobili, & solvetur Problema (b). Q. E. F.



P R O P.

(b) ANALYSIS PROBLEMATIS.

Corpus quodpiam viribus centripetis, quæ centrum C respiciant, incitatum feratur per orbitam quandam immobilem VPK. Circum centrum immobile C converti intelligatur figura *uCp* immobilis illius, VCP, per omnia similis et æqualis. Et per Curvam mobilem *up* ferri intelligatur corpus quoddam, eâ quidem lege, ut orbitæ suæ mobilis sectorem quemvis *uCp* eodem tempore absolvat, quo corpus primum similem & æqualem orbitæ suæ immobilis VCP sectorem. Vel quod eodem redit, positis rectis VC, *u*C æqualibus, item angulis VCP, *uCp*; corpora quæ ex punctis V, *u*, ipso motûs initio congruentibus, exierint, loca P, *p* orbitæ unumquodque suæ simul appulisse intelligantur. Datâ lege vis centripetæ, quâ corpus retineatur in orbitâ immobili VPK, constituenda est lex vis alterius, quæ cùm idem centrum C respiciat, motum corporis, qualem perscripsimus, in orbitâ mobili præstare possit.

Sit VL*p* linea illa curva, quam corpus in orbitâ mobili latum, motu composito, proprio utique in orbita, orbitæque circum centrum, in plano immobili scripserit. Areæ igitur VC*p*, VCP, quas corpora

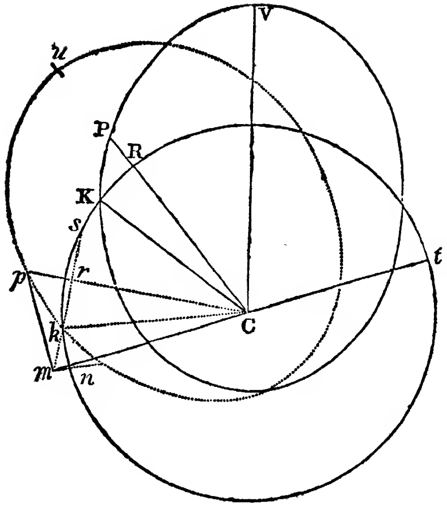
PROP. XLIV. THEOR. XIV.

Differentia virium, quibus corpus in orbe quiescente, & corpus aliud in eodem orbe revolvente æqualiter moveri possunt, est in triplicatâ ratione communis altitudinis inversè.

Partibus orbis quiescentis, VP, PK, sunto similes & æquales orbis revolventis partes *up*, *pk*; & punctorum, P, K, distantia intelligatur esse quàm minima. A puncto *k* in rectam *p*C demitte perpendiculum *kr*, idemque produc ad *m*, ut sit *mr* ad *kr* ut angulus VC*p* ad angulum VCP. Quoniam corporum altitudines, PC & *p*C, KC, & *k*C, semper æquantur; manifestum est, quòd linearum PC & *p*C incrementa vel decrementa semper sint æqualia; ideoque si corporum, in locis P & *p* existentium, distinguantur motus singuli (per legum Corol. 2.) in binos, quorum hi versus centrum, sive secundum lineas, PC, *p*C, determinentur, & alteri prioribus transversi sint, & secundum lineas ipsis PC, *p*C perpendiculares directionem habeant; motus versus centrum erunt æquales, & motus transversus corporis *p* erit ad motum transversum corporis P, ut motus angularis lineæ *p*C ad motum angularem lineæ PC, id est, ut angulus VC*p* ad angulum VCP. Igitur eodem tempore quo corpus P motu suo utroque pervenit ad punctum K, corpus *p*, æquali in centrum motu, æqualiter movebitur à *p* versus C; ideoque completo illo tempore reperietur alicubi in lineâ *mkr*, quæ per punctum *k* in lineam *p*C perpendicularis est; & motu transverso acquiret distantiam à lineâ *p*C, quæ sit ad distantiam quam corpus alterum P acquirit à lineâ PC, ut

corpora viribus centrum C respicientibus sollicitata in plano immobili simul confecerint, datam inter se rationem gerent (per Prop. I^{m}. hujus Libri). Quare & earum fluxionibus eadem data ratio intercedet. (Geom. Flux. Th. IV.) Sed propter radios CP, C*p* inter se æquales, arearum atque angulorum VC*p*, VCP fluxionibus eadem inter ipsas ratio erit. Angulorum igitur VC*p*, VCP fluxionibus data quædam ratio intercedit. Quare & anguli illi vel eandem inter se rationem gerent, vel alter altero dato major erit. (Geometr. Flux. Th. IV.) Puta angulum VCP infinitè minui, ut recta CP cum ipsâ CV congruat. Quo facto, area VCP unà cum angulo VCP, in nihilum abierit. Sed propter datam arearum VCP, VC*p* inter ipsas rationem, illâ VCP in nihilum abeunte, altera quoque VC*p* in nihilum abibit. Et cum illâ VC*p* angulus etiam VC*p* in nihilum abierit. Quare anguli VCP, VC*p* in nihilum simul abierint. Neuter igitur eorum altero dato major erit: sed datam fluxionum suarum rationem anguli illi inter se habebunt. Ea igitur erit curvarum VCP, VC*p* inter ipsas cognatio, ut anguli quibus radii æquales, CP, C*p*, ad communem VC inclinentur, datam inter se rationem habeant. Curvâ igitur VPK positione datâ, altera VL*p* positione dabitur. Quare ope Corollarii 5. Prop. VI. dabitur lex vis centripetæ, quæ motum corporis in Curvâ illâ VL*p* positione datâ præstare poterit.

est



eſt motus tranſverſus corporis *p* ad motum tranſverſum corporis alterius P. Quare cùm *kr* æqualis ſit diſtantiæ quam corpus P acquirit à lineâ PC, ſitque *mr* ad *kr* ut angulus VC*p* ad angulum VCP, hoc eſt, ut motus tranſverſus corporis *p* ad motum tranſverſum corporis P; manifeſtum eſt, quòd corpus *p* completo illo tempore reperietur in loco *m*. Hæc ita ſe habebunt, ubi corpora *p* & P æqualiter ſecundum lineas *p*C & PC moventur, ideoque æqualibus viribus ſecundum lineas illas urgentur. Capiatur autem angulus *pCn* ad angulum *pCk* ut eſt angulus VC*p* ad angulum VCP, ſitque *n*C æqualis *k*C, & corpus *p*, completo illo tempore, reverâ reperietur in *n*; ideoque vi majore urgetur quàm corpus P, ſi modò angulus *nCp* angulo *kCp* major eſt, id eſt ſi orbis *upk* vel movetur in conſequentia, vel movetur in antecedentia majore celeritate quàm ſit dupla ejus quâ linea CP in conſequentia fertur; & vi minore, ſi orbis tardiùs movetur in antecedentia. Eſtque virium differentia ut locorum

locorum intervallum *mn*, per quod corpus illud *p* ipſius actione, dato illo temporis ſpatio, transferri debet. Centro C intervallo C*n* vel C*k* deſcribi intelligatur circulus ſecans lineas *mr*, *mn* productas in *s* & *t*, & erit rectangulum $mn \times mt$ æquale rectangulo $mk \times ms$, ideoque *mn* æquale $\frac{mk \times ms}{mt}$. Cùm autem triangula *pCk*, *pCn*, dato tempore, dentur magnitudine, ſunt *kr* & *mr* (c), earumque differentia *mk*, & ſumma *ms*, reciprocè ut altitudo *p*C; ideoque rectangulum $mk \times ms$ eſt reciprocè ut quadratum altitudinis *p*C. Eſt & *mt* directe ut $\frac{1}{2} mt$, id eſt, ut altitudo *p*C. Hæ ſunt primæ rationes linearum naſcentium; & hinc fit $\frac{mk \times ms}{mt}$, id eſt lineola naſcens *mn*, eique proportionalis virium differentia, reciprocè ut cubus altitudinis *p*C (d). Q. E. D.

Corol. 1. Hinc differentia virium in locis P & *p*, vel K & *k*, eſt ad vim, quâ corpus motu circulari revolvi poſſit ab R ad K, eodem tempore quo corpus P in orbe immobili deſcribit arcum PK, ut lineola naſcens *mn* ad ſinum verſum arcûs naſcentis RK; id eſt, ut $\frac{mk \times ms}{mt}$ ad $\frac{rkq}{2kC}$, vel ut $mk \times ms$ ad *rk* quadratum; hoc eſt, ſi capiantur datæ quantitates, F, G, in eâ ratione ad invicem quam habet angulus VCP ad angulum VC*p*, ut GG−FF ad FF. Et propterea, ſi centro C, intervallo quovis CP, vel C*p*, deſcribatur ſector circularis æqualis areæ toti VPC, quam corpus P tempore quovis in orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto deſcripſit: differentia virium, quibus corpus P in orbe immobili & corpus *p* in orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam, quâ corpus aliquod, radio ad centrum ducto, ſectorem illum eodem tempore, quo deſcripta ſit area VPC, uniformiter deſcribere potuiſſet, ut

(c) Siquidem à puncto *n* in rectam C*p* ad perpendiculum deductâ *nf*, erunt naſcentes *mr*, *nf* primò quidem inter ſe æquales.

(d) EXPLICATIO DEMONSTRATIONIS NEWTONIANÆ.

Sint *p*, *n* loca corporis per orbitam mobilem lati, quando corpus alterum orbitæ immobilis loca P, K teneat. Erunt igitur illa, *p*, *n*, puncta duo lineæ VL*p* figuræ p. 162. Situs orbitæ mobilis, quo tempore corpus quod per eam fertur locum *p* teneat, is ſit quem figura *up*C repræſentat, & capiatur Curvæ *up* arcus *pk* arcui PK orbitæ immobilis æqualis. A puncto *k* in junctam C*p* ad perpendiculum demittatur *kr*, quæ junctæ C*n* in *m* occurrat. Punctum *n* erit ad circulum, centro C radio C*k* ſcriptum; nempe cùm æquales ſint C*k*, C*n*, quippe quarum hæc & illa rectæ CK æqualis eſt. Scribatur igitur circulus ille, rectiſque *n*C, *mk* productis in punctis, *t*, *s*, iterum occurrat. Denique jungatur *pm*. Ad motum corporis è loco *p* per arcum lineæ VL*p* naſcentem *pn* quatuor motus recti conſpirant. Primus per tangentem arcûs *pk*; alius verſus centrum C, qui fugam centri à motu primo oriundam ſiſtat, corpuſque à concurſu rectæ C*k* cum tangente arcûs P*k* in ipſum locum *k* transferat.

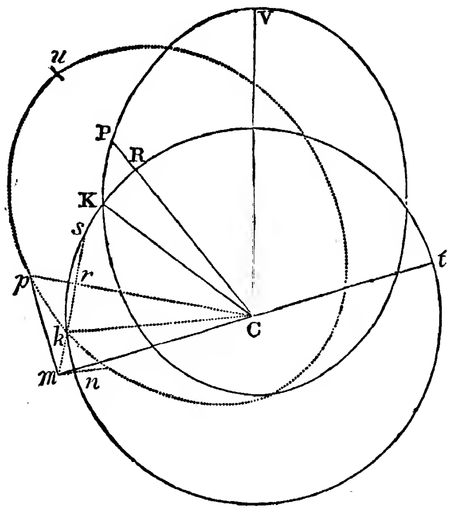
3

transferat. Hiſce duobus, propter angulorum PCK, *pCn* rationem datam, tertius accedere debet, tranſverſus quidem, ſecundum perpendiculum rectæ C*p* directus, è converſione orbitæ mobilis circum centrum C natus, quo corpus è loco *k* in rectam C*n* transferatur. Tribus hiſce motibus corpus è loco *p* in locum *m* tranſlatum eſſet, quo tempore corpus alterum, per orbitam immobilem, è loco P in locum K. Quartus igitur jungendus eſt, verſus centrum directus, qui fugam centri ex tranſverſo oriundam ſiſtat, atque corpus è loco *p* egreſſum, ſub finem temporis illius quo corpus alterum arcum PK confecerit, in loco ſuo *n* conſtituat. Ex quatuor igitur motibus rectis qui ad motum corporis per arcum *pn* conſpirare debent, duo verſus centrum diriguntur. Atque horum alter, qui fugæ centri à motu per tangentem arcûs *pk*, vel PK, oriundæ obiicitur, corporibus è locis *p* & P egredientibus communis eſt. Alter corporis è loco *p* ſecundum arcum *pn* iter occupantis peculiaris. Nempe qui fugæ centri obſiſtat, è motu tranſverſo ejuſdem corporis peculiari oriundæ. Atque hic motus motuum centralium in locis *p*, P differentia erit; et à virium centralium, quales in illis locis vigeant, differentiâ veniet; quæ proinde quantitate ſuâ illius rationem ſervabit. Ille verò naſcentis *mn* rationem primam. Jam verò naſcentium *mn* rationes primas cuborum è radiis PC contrarias eſſe, id ni fallor Newtonus ipſe luculentiſſimè oſtendit.

GG —

GG − FF ad FF. Namque ſector ille & area *pck* ſunt ad invicem ut tempora, quibus deſcribuntur.

Corol. 2. Si orbis VPK Ellipſis ſit, umbilicum habens C, & apſidem ſummam V; eique ſimilis & æqualis ponatur ellipſis *upk*, ita ut ſit ſemper *pc* æqualis PC, & angulus V*cp* ſit ad angulum VCP in datâ ratione G ad F; pro altitudine autem PC vel *pc* ſcribatur A, & pro Ellipſeos latere recto ponatur 2R: erit vis, quâ corpus in Ellipſi mobili revolvi poteſt, ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$, & contrà. Exponatur enim vis, quâ corpus revolvatur in immotâ ellipſi, per quantitatem $\frac{FF}{AA}$; & vis in V erit $\frac{FF}{CV\ quad.}$ Vis autem, quâ corpus in Circulo, ad diſtantiam CV, eâ cum velocitate revolvi poſſet, quam corpus in Ellipſi revolvens habet in V, eſt ad vim quâ corpus in Ellipſi revolvens urgetur in apſide V, ut dimidium lateris recti ellipſeos ad circuli ſemidiametrum CV (e), ideoque valet $\frac{RFF}{CV\ cub.}$: & vis, quæ ſit ad hanc ut GG−FF ad FF, valet $\frac{RGG-RFF}{CV\ cub.}$: eſtque hæc vis (per hujus Corol. 1.) differentia virium in V, quibus corpus P in ellipſi immotâ, VPK, & corpus *p* in ellipſi mobili, *upk*, revolvuntur. Unde cùm (per hanc Prop.) differentia illa in aliâ quâvis altitudine A ſit ad ſeipſam in altitudine



(e) Per Cor. 3. Prop. VI. hujus Libri. Nimirum cùm circuli, qui ſectionem conicam in apſide oſculatur, chorda, quæ per umbilicum ſectionis, ducta eſt lateri ejus recto æqualis eſt.

(f) Nam vis quâ corpus, quod per orbitam VPK feratur, urgetur in loco V, erit ad vim, quâ corpus aliud, pari velocitate è loco V emiſſum, retineatur in circulo cujus radius CV (vel T) ut T ad R (per Cor. 3. Prop. VI.) Quare ſi vis illa prior exponatur per $\frac{VFF}{TT}$, hæc altera exponetur per $\frac{RVFF}{T\ cub.}$. Et vis quæ ſit ad hanc alteram ut GG − FF ad FF, ea quidem exponetur per $\frac{RVGG-RVFF}{T\ cub.}$. Ea

dine CV ut $\frac{1}{A\ cub.}$ ad $\frac{1}{CV\ cub.}$, eadem differentia in omni altitudine A valebit $\frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$. Igitur ad vim $\frac{FF}{AA}$, quâ corpus revolvi poteſt in ellipſi immobili VPK, addatur exceſſus $\frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$; & componetur vis tota, $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$, quâ corpus in ellipſi mobili *upk*, iiſdem temporibus, revolvi poſſit.

Corol. 5. Ad eundem modum colligetur, quòd ſi orbis immobilis, VPK, Ellipſis ſit centrum habens in virium centro C; eique ſimilis, æqualis & concentrica ponatur Ellipſis mobilis *upk*; ſitque 2R ellipſeos hujus latus rectum principale, & 2T latus tranſverſum ſive axis major, atque angulus V*cp* ſemper ſit ad angulum VCP ut G ad F; vires, quibus corpora in ellipſi immobili & mobili temporibus æqualibus revolvi poſſunt, erunt ut $\frac{FFA}{T\ cub.}$ & $\frac{FFA}{T\ cub.} + \frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$ reſpectivè.

Corol. 4. Et univerſaliter, ſi corporis altitudo maxima CV nominetur T, & radius curvaturæ quam orbis VPK habet in V, id eſt radius circuli æqualiter curvi, nominetur R, & vis centripeta, quâ corpus in trajectoriâ quâcunque immobili VPK revolvi poteſt in loco V, dicatur $\frac{VFF}{TT}$, atque aliis in locis P indefinitè dicatur X, altitudine CP nominatâ A, & capiatur G ad F in datâ ratione anguli V*cp* ad angulum VCP: erit vis centripeta, quâ corpus idem eoſdem motus in eâdem trajectoriâ *upk*, circulariter motâ, temporibus iiſdem peragere poteſt, ut ſumma virium $X + \frac{VRGG-VRFF}{A\ cub.}$ (f).

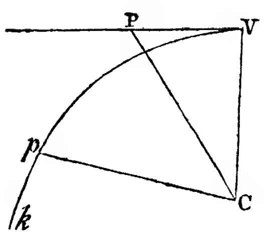
Corol. 5. Dato igitur motu corporis in orbe quocunque immobili, augeri vel minui poteſt ejus motus angularis circa centrum virium in ratione datâ; & inde inveniri novi orbes immobiles, in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.

Corol. 6. Igitur ſi ad rectam CV poſitione datam erigatur perpendiculum VP longitudinis indeterminatæ, jungaturque CP, &

Ea verò differentia erit virium, quibus corpora in locis, V, *v*, orbitæ immotæ mobiliſque urgentur. Quæ differentia, cùm ſit ad differentiam in locis aliis P, *p*, ſicut cubus ex A ad cubum ex T, differentia virium in locis P, *p* exponetur per $\frac{RVGG-RVFF}{A\ cub.}$. Huic differentiæ addatur vis in orbe immoto, in loco P, per literam X deſignata; fiet $X + \frac{RVGG-RVFF}{A\ cub.}$ vis tota in loco *p* orbitæ mobilis. Q. E. D.

ipſi

DE MOTU CORPORUM



ipſi æqualis agatur c*p*, conſtituens angulum vc*p*, qui ſit ad angulum vcp in datâ ratione; vis, quâ corpus gyrari poteſt in Curvâ illâ v*pk*, quam punctum *p* perpetuò tangit, erit reciprocè ut cubus altitudinis c*p*. Nam corpus p per vim inertiæ, nullâ aliâ vi urgente, uniformiter progredi poteſt in rectâ vp. Addatur vis in centrum c, cubo altitudinis cp vel c*p* reciprocè proportionalis, & (per jam demonſtrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam curvam v*pk*. Eſt autem hæc Curva v*pk* eadem cum Curvâ illâ vpq in Corol. 3. Prop. xli. inventâ, in quâ ibi diximus corpora, hujuſmodi viribus attracta, obliquè aſcendere (g).

PROP. XLV. PROB. XXXI.

Orbium qui ſunt circulis maximè finitimi requiruntur motus apſidum.

Problema ſolvitur arithmeticè, faciendo ut orbis, quem corpus in Ellipſi mobili (ut in Propoſitionis ſuperioris Corol. 2 vel 3.) revolvens deſcribit in plano immobili, accedat ad formam orbis cujus apſides requiruntur, & quærendo apſides orbis, quem corpus illud in plano immobili deſcribit. Orbes autem eandem acquirent formam, ſi vires centripetæ, quibus deſcribuntur, inter ſe collatæ in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales. Sit punctum v apſis ſumma, & ſcribantur T pro altitudine maximâ cv, A pro altitudine quâvis aliâ cp vel c*p*, & x pro altitudinum differentiâ cv−cp; & vis, quâ corpus in Ellipſi circa umbilicum ſuum c (ut in Corol. 2.) revolvente movetur, quæque in Corol. 2. erat ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$, id eſt ut $\frac{FFA+RGG-RFF}{A\ cub.}$, ſubſtituendo

(g) Nimirum generalis eſt inventio lineæ vlp, qualis in Prop. xliii. à Newtono tradita eſt, qualiſcunque fuerit figura orbitæ immobilis vpk, aut quæcunque fuerint vires centrales, à quibus corpus in illâ orbitâ retineatur. Puta igitur vires eas paulatim imminui, et ad nullas tandem redigi. Quo facto orbita vpk in rectam abibit, per quam corpus motu ſemel impreſſo æquabiliter feretur, & linea vl*p* lineæ v*pk* hujus Corollarii figuram induet. Sed vis centralis, quâ corpus urgetur in loco quovis *p*, vim centralem in loco cognato p lineæ immobilis parte quâdam exuperat, quæ ſit contrariè ut cubus è cp. (Id enim generaliter quoque oſtenſum eſt, nullâ neque figuræ quâ prædita

LIBER PRIMUS.

ſtituendo T−X pro A, erit ut $\frac{RGG-RFF+TFF-FFX}{A\ cub.}$. Reducenda ſimiliter eſt vis alia quævis centripeta ad fractionem cujus denominator ſit A *cub*: & numeratores, factâ homologorum terminorum collatione, ſtatuendi ſunt analogi. Res exemplis patebit.

Exempl. 1. Ponamus vim centripetam uniformem eſſe, ideoque ut $\frac{A\ cub.}{A\ cub.}$, ſive (ſcribendo T−X pro A in numeratore) ut $\frac{T\ cub. - 3TTX + 3TXX - X\ cub.}{A\ cub.}$; & collatis numeratorum terminis correſpondentibus, nimirum datis cum datis & non datis cum non datis, fiet RGG−RFF+TFF ad T *cub.* ut −FFX ad −3TTX+3TXX−X *cub.* ſive ut −FF ad −3TT+3TX−XX. Jam cùm orbis ponatur Circulo quàm maximè finitimus, coeat orbis cum circulo; & ob factas R, T æquales, atque X in infinitum diminutam, rationes ultimæ erunt RGG ad T *cub.* ut −FF ad −3TT; ſeu GG ad TT ut FF ad 3TT, & viciſſim GG ad FF ut TT ad 3TT, id eſt, ut 1 ad 3; ideoque G ad F, hoc eſt angulus vc*p* ad angulum vcp, ut 1 ad $\sqrt{3}$. Ergo cùm corpus in ellipſi immobili, ab apſide ſummâ ad apſidem imam deſcendendo, conficiat angulum vcp (ut ita dicam) graduum 180; corpus aliud in ellipſi mobili, atque ideo in orbe immobili de quo agimus, ab apſide ſummâ ad apſidem imam deſcendendo, conficiet angulum vc*p* graduum $\frac{180}{\sqrt{3}}$: id ideo ob ſimilitudinem orbis hujus, quem corpus urgente uniformi vi centripetâ deſcribit, & orbis illius, quem corpus in ellipſi revolvente gyros peragens deſcribit in plano quieſcente. Per ſuperiorem terminorum collationem ſimiles redduntur hi orbes, non univerſaliter, ſed tunc cùm ad formam circularem quàm maximè appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripetâ in orbe propemodum circulari revolvens, inter apſidem ſummam & apſidem imam conficiet ſemper angulum $\frac{180}{\sqrt{3}}$ graduum, ſeu 103 gr. 55 m. 23 ſec. ad centrum; perveniens ab apſide

prædita ſit lineâ vpk, neque virium centralium, quæ per lineæ illius ductum vigeant, ratione habitâ.) Cùm vero nulla planè ſit vis centralis in loco p, quando linea vpk recta utique exſiſtat; quam in lineâ mobili in loco *p* poſuimus vis centralis exuperantiam, ea vim illam totam prorſus abſumet. Unde totæ vires per lineam v*pk* rationes cuborum è radiis contrarias induent. Præterea linea v*pk* eadem erit atque vpk Corollarii 3. Prop. xli. modò Ellipſis, à quâ genita eſt illa vpk, Circuli formam induat. Ita enim ſectores elliptici vcr cum angulis vcr proportione mutuâ convenient, rectæque ct horum angulorum ſecantibus, ſive rectis cp vel c*p* hujus figuræ, æquales evadent.

ſummâ

summâ ad apsidem imam, ubi semel confecit hunc angulum, & inde ad apsidem summam rediens, ubi iterum confecit eundem angulum; & sic deinceps in infinitum.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam esse ut altitudinis A dignitas quælibet A^{n-3}, seu $\frac{A^n}{A^3}$: ubi $n-3$ & n significant dignitatum indices quoscunque integros vel fractos, rationales vel irrationales, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^n, seu $\overline{T-X}|^n$, in seriem indeterminatam per methodum nostram serierum convergentium reductus, evadit $T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XXT^{n-2}$ &c. Et collatis hujus terminis cum terminis numeratoris alterius, $RGG - RFF + TFF - FFX$, fit $RGG - RFF + TFF$ ad T^n ut $-FF$ ad $-nT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XT^{n-2}$ &c. Et sumendo rationes ultimas ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit RGG ad T^n ut $-FF$ ad $-nT^{n-1}$; seu GG ad T^{n-1} ut FF ad nT^{n-1}, & vicissim GG ad FF ut T^{n-1} ad nT^{n-1} id est ut 1 ad n; ideoque G ad F, id est angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{n}$. Quare cum angulus VCP, in descensu corporis ab apside summâ ad apsidem imam in ellipsi confectus, sit graduum 180; conficietur angulus VCp, in descensu corporis ab apside summâ ad apsidem imam in orbe propemodum circulari, quem corpus quodvis vi centripetâ dignitati A^{n-3} proportionali describit, æqualis angulo graduum $\frac{180}{\sqrt{n}}$; & hoc angulo repetito corpus redibit ab apside imâ ad apsidem summam, & sic deinceps in infinitum. Ut si vis centripeta sit ut distantia corporis à centro, id est, ut A, seu $\frac{A^4}{A^3}$, erit n æqualis 4, & $\sqrt{n}$ æqualis 2; ideoque angulus inter apsidem summam & apsidem imam æqualis $\frac{180}{2}$ gr. seu 90 gr. Completâ igitur quartâ parte revolutionis unius, corpus perveniet ad apsidem imam, & completâ aliâ quartâ parte ad apsidem summam; & sic deinceps per vices in infinitum. Id quod etiam ex Propositione X. manifestum est. Nam corpus, urgente hâc vi centripetâ, revolvetur in Ellipsi immobili, cujus centrum est in centro virium. Quòd si vis centripeta sit reciprocè ut distantia, id est directè ut $\frac{1}{A}$ seu $\frac{A^2}{A^3}$, erit n æqualis 2; ideoque inter apsidem summam & imam angulus erit graduum $\frac{180}{\sqrt{2}}$ seu 127 gr. 16 m. 45 sec. Et propterea corpus, tali vi revolvens,

vens, perpetuâ anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab apside summâ ad imam, & ab imâ ad summam perveniet, in æternum. Porro si vis centripeta sit reciprocè ut latus quadrato-quadratum undecimæ dignitatis altitudinis, id est reciprocè ut $A^{\frac{11}{4}}$, ideoque directè ut $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$, seu ut $-\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$, erit n æqualis $\frac{1}{4}$, & $\frac{180}{\sqrt{n}}$ gr. æqualis 360 gr. & propterea corpus de apside summâ discedens, & subinde perpetuò descendens, perveniet ad apsidem imam, ubi implevit revolutionem integram; dein, perpetuò ascensu complendo aliam revolutionem integram, redibit ad apsidem summam: & sic per vices in æternum.

Exempl. 3. Assumentes m & n pro quibusvis indicibus dignitatum altitudinis, & b, c pro numeris quibusvis datis, ponamus vim centripetam esse ut $\frac{bA^m + cA^n}{A\ cub.}$, id est, ut $\frac{b \text{ in } \overline{T-X}|^m + c \text{ in } \overline{T-X}|^n}{A\ cub.}$ seu (per eandem methodum nostram serierum convergentium) ut

$$\frac{bT^m + cT^n - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXXT^{n-2} \text{ \&c.}}{A\ cub.}$$

Et collatis numeratorum terminis, fiet $RGG - RFF + TFF$ ad $bT^m + cT^n$, ut $-FF$ ad $-mbT^{m-1} - ncT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXT^{n-2}$ &c. Et sumendo rationes ultimas, quæ prodeunt ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit GG ad $bT^{m-1} + cT^{n-1}$, ut FF ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, & vicissim GG ad FF ut $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$. Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam CV, seu T, arithmeticè per unitatem, fit GG ad FF ut $b+c$ ad $mb+nc$, ideoque ut 1 ad $\frac{mb+nc}{b+c}$. Unde est G ad F, id est angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. Et propterea cùm angulus VCP inter apsidem summam & apsidem imam in Ellipsi immobili sit 180 gr. erit angulus VCp inter easdem apsides, in orbe quem corpus vi centripetâ quantitati $\frac{bA\ \ + cA^n}{A\ cub.}$ proportionali describit, æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. Et eodem argumento, si vis centripeta sit ut $\frac{bA^m - cA^n}{A\ cub.}$, angulus inter apsides invenietur graduum $180\sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$. Nec secus resolvetur Problema in casibus difficilioribus. Quantitas, cui vis centripeta proportionalis est, resolvi semper debet in series convergentes denominatorem habentes

A *cub.*

A *cub.* Dein pars data numeratoris, qui ex illâ operatione provenit ad ipſius partem alteram non datam, & pars data numeratoris hujus RGG−RFF+TFF−FFX ad ipſius partem alteram non datam in eâdem ratione ponendæ ſunt: et quantitates ſuperfluas delendo, ſcribendoque unitatem pro T, obtinebitur proportio G ad F.

Corol. 1. Hinc ſi vis centripeta ſit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri poteſt dignitas illa ex motu apſidum; & contrà. Nimirum ſi motus totus angularis, quo corpus redit ad apſidem eandem, ſit ad motum angularem revolutionis unius, ſeu graduum 360, ut numerus aliquis m ad numerum alium n, & altitudo nominetur A: erit vis ut altitudinis dignitas illa $A^{\frac{nn}{mm}-3}$, cujus index eſt $\frac{nn}{mm}-3$. Id quod per Exempla ſecunda manifeſtum eſt (h). Unde liquet vim illam in majore quàm triplicatâ altitudinis ratione, in receſſu à centro, decreſcere non poſſe (i): corpus tali vi revolvens deque apſide diſcedens, ſi cœperit deſcendere, nunquam perveniet ad apſidem imam ſeu altitudinem minimam, ſed deſcendet uſque ad centrum, deſcribens curvam illam lineam de quâ egimus in Corol. 3. Prop. XLI. Sin cœperit illud, de apſide diſcedens, vel minimum aſcendere; aſcendet in infinitum, neque unquam perveniet ad apſidem ſummam. Deſcribet enim curvam illam lineam de quâ actum eſt in eodem Corol. & in Corol. 6. Prop. XLIV. Sic & ubi vis, in receſſu à centro, decreſcit in majore quàm triplicatâ ratione altitudinis, corpus de apſide diſcedens, perinde ut cœperit deſcendere vel aſcendere, vel deſcendet ad centrum uſque vel aſcendet in infinitum. At ſi vis, in receſſu à centro, vel decreſcat in minore quàm triplicatâ ratione altitudinis, vel creſcat in altitudinis ratione quâcunque; corpus nunquam deſcendet ad centrum uſque, ſed ad apſidem imam aliquando perveniet: & contrà, ſi corpus de apſide

(h) Quantitatem enim illam quam in exemplis ſecundis litera n deſignavit, eam jam litera x ſignificet, ut ſit vis centripeta ut A^{x-3}. Erit igitur $G : F = 1 : \sqrt{x}$; id quod calculi in exemplis illis ſubducti ſatis evincunt. Unde $\sqrt{x} = \frac{F}{G}$, & $x = \frac{FF}{GG}$; vel ſi pro illis G, F ſcribantur m, n, $x = \frac{nn}{mm}$. Unde $A^{x-3} = A^{\frac{nn}{mm}-3}$. Q. E. D.

(i) Nam ſi auctâ corporis à centro diſtantiâ vis centripeta decreſcat, ponatur ea vis eſſe ut

ſide ad apſidem alternis vicibus deſcendens & aſcendens nunquam appellat ad centrum; vis in receſſu à centro aut augebitur, aut in minore quàm triplicatâ altitudinis ratione decreſcet: & quo citiùs corpus de apſide ad apſidem redierit, eo longiùs ratio virium recedet à ratione illâ triplicatâ. Ut ſi corpus revolutionibus 8, vel 4, vel 2, vel $1\frac{1}{2}$, de apſide ſummâ ad apſidem ſummam alterno deſcenſu & aſcenſu redierit; hoc eſt, ſi fuerit m ad n ut 8, vel 4, vel 2, vel $1\frac{1}{2}$, ad 1, ideoque $\frac{nn}{mm}-3$ valeat $\frac{1}{64}-3$, vel $\frac{1}{16}-3$, vel $\frac{1}{4}-3$, vel $\frac{4}{9}-3$: erit vis ut $A^{\frac{1}{64}-3}$, vel $A^{\frac{1}{16}-3}$, vel $A^{\frac{1}{4}-3}$, vel $^{\frac{4}{9}-3}$; id eſt, reciprocè ut $A^{3-\frac{1}{64}}$, vel $A^{3-\frac{1}{16}}$, vel $A^{3-\frac{1}{4}}$, vel $A^{3-\frac{4}{9}}$. Si corpus ſingulis revolutionibus redierit ad apſidem eandem immotam; erit m ad n ut 1 ad 1, ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ æqualis A^{-2} ſeu $\frac{1}{AA}$; & propterea decrementum virium in ratione duplicatâ altitudinis, ut in præcedentibus demonſtratum eſt. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel unâ tertiâ, vel unâ quartâ, ad apſidem eandem redierit; erit m ad n ut $\frac{3}{4}$, vel $\frac{2}{3}$, vel $\frac{1}{3}$, vel $\frac{1}{4}$, ad 1, ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ æqualis $A^{\frac{16}{9}-3}$, vel $A^{\frac{9}{4}-3}$, vel A^{9-3}, vel A^{16-3}; & propterea vis aut reciprocè ut $A^{\frac{11}{9}}$, vel $A^{\frac{3}{4}}$; aut directè ut A^{6} vel A^{13}. Denique ſi corpus pergendo ab apſide ſummâ ad apſidem ſummam confecerit revolutionem integram, & præterea gradus tres, ideoque apſis illa ſingulis corporis revolutionibus confecerit in conſequentia gradus tres; erit m ad n ut 363 gr. ad 360 gr. ſive ut 121 ad 120, ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ erit æquale $A^{-\frac{29523}{14641}}$; & propterea vis centripeta reciprocè ut $A^{\frac{29523}{14641}}$; ſeu reciprocè ut $A^{2\frac{4}{243}}$ proximè (k). Decreſcit igitur vis centripeta in ratione paulo majore quàm duplicatâ, ſed quæ vicibus $59\frac{3}{4}$ propiùs ad duplicatam quàm ad triplicatam accedit.

A^{-z}. Erit igitur $\frac{nn}{mm}-3=-z$. Et $\frac{nn}{mm}=3-z$. Quare illa z ternario non poteſt eſſe major, ne quantitas quadratica $\frac{nn}{mm}$ negativa ſit. Q. E. D.

(k) Cùm igitur motus menſtruus Apſidum orbitæ Lunaris tres gradus vix exuperet, vires, quas centrum terræ reſpicientes in orbitâ illâ dominari cernimus, rationem duplicatæ diſtantiarum contrariam haud magnoperè aſpernantur. Imò potiùs affectant. Et motus ille apſidum tardiſſimus non ex aliâ virium illarum conditione venit, ſed ex vi quâdam extraneâ quæ centralibus ſe immiſcet. Hæc autem quanta eſſe debeat, Newtonus in ſequente Corollario æſtimare inſtituit.

Corol.

Corol. 2. Hinc etiam si corpus, vi centripetâ quæ sit reciprocè ut quadratum altitudinis, revolvatur in Ellipsi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognosci potest (per exempla tertia) motus apsidum qui ex vi illâ extraneâ orietur: & contrà. Ut si vis, quâ corpus revolvitur in Ellipsi, sit ut $\frac{1}{AA}$, & vis extranea ablata ut cA (l), ideoque vis reliqua ut $\frac{A - cA^4}{A\ cub.}$; erit (in exemplis tertiis) b æqualis 1, m æqualis 1, & n æqualis 4, ideoque angulus revolutionis inter apsides æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. Ponamus vim illam extraneam esse 357.45 (m) partibus minorem quàm vis altera quâ corpus revolvitur in ellipsi, id est c esse $\frac{100}{35745}$, existente A vel T æquali 1, & $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ evadet $180\sqrt{\frac{35645}{35345}}$, seu 180.7623, id est, 180 gr. 45 m. 44. s. Igitur corpus de apside summâ discedens, motu angulari 180 gr. 45 m. 44 s. perveniet ad apsidem imam, & hoc motu duplicato ad apsidem summam redibit: ideoque apsis summa, singulis revolutionibus progrediendo, conficiet 1 gr. 31 m. 28 sec. Apsis Lunæ est duplo velocior circiter (n).

Hactenus de motu corporum in orbibus quorum plana per centrum virium transeunt. Superest ut motus etiam determinemus in planis excentricis. Nam scriptores, qui motum gravium tractant, considerare solent ascensus & descensus ponderum, tam obliquos in planis quibuscunque datis, quàm perpendiculares: & pari jure motus corporum viribus quibuscunque centra petentium, & planis excentricis innitentium, hîc considerandus venit. Plana autem supponimus esse politissima & absolutè lubrica, ne corpora retardent. Quinimo, in his demonstrationibus, vice planorum quibus corporum incumbunt, quæque tangunt incumbendo, usurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur, & orbitas movendo describunt. Et eâdem lege motus corporum in superficiebus curvis peractos subinde determinamus.

(l) Nempe vis Solis, quæ motum apsidibus orbitæ Lunaris infert, reliquis manentibus, est ut distantia Lunæ à centro Terræ; sicut in Corollario 16. Prop. LXVI. hujus Libri Newtonus ostensus est. Idcirco eas ponit vires extraneas, quæ cum quantitatibus cA proportione mutuâ conveniant.

(m) —*esse* 357,45.] Nempe vires Solis in Lunam, quæ apsidibus ejus motum inferunt, in partes duas resolvendæ sunt, sicut in Propositione LXVI. hujus Libri & Corollariis ejus Newtonus docet, quas partes rectæ LM, MN, fig. pag. 203. referunt. Harum LM dimidio ferè mense apsides contra signorum ordinem remeare cogit: altera MN, reliquo dimidio spatii menstrui, progredi. Et cùm duarum LM, MN, hæc MN major sit, progressus regressu major erit, atque integro mense apsides promoverint. (Prop. LXVI. Cor. 7.) Hinc progressus ille apsidum orbitæ lunaris, quem Astronomi observârunt, tribuendus est differentiæ, quâ vis MN vim LM exuperat: et verisimile est eundem eum esse, quem spatio menstruo vis aliqua extranea procrearet, quæ mediocri earum differentiæ semper æqualis esset, & Lunam à centro terræ retrahendo, vim ejus centripetam in majoribus distantiis minorem redderet, quàm pro contrariâ quadratorum ex distantiis ratione. Jam verò vis mediocris LM est ad illam, quâ Luna in mediocri distantiâ centrum terræ petit, sicut 1 ad $178\frac{29}{40}$, id enim in Prop. XXV. Libri 3. calculis subductis Newtonus probat. Maxima vis MN tripla est illius LM. Minima, nulla est. (Prop. LXVI. Cor. 7. & Prop. XXVI. Libri 3.) Mediocris igitur erit ea, quæ sit ad mediocrem LM ut $1\frac{1}{2}$ ad 1. Quare mediocris MN mediocrem LM parte dimidiâ superabit. Unde cùm LM sit ad vim centripetam Lunæ terram versus mediocrem, ut 1 ad $178\frac{29}{40}$, differentia, quâ mediocris MN superat mediocrem LM, erit ad vim illam mediocrem centripetam Lunæ versus terram ut 1 ad 357,45. *Ponamus igitur* (inquit Newtonus) *vim extraneam* tot partibus esse minorem vi alterâ, quâ corpus per Ellipsin convertatur, & calculos subducendo exploremus, an motus apsidum, qui ex tali vi extraneâ oriturus est, is sit quem in orbitâ Lunari Astronomi deprehenderunt.

SECTIO X.

De motu corporum in superficiebus datis, deque funipendulorum motu reciproco.

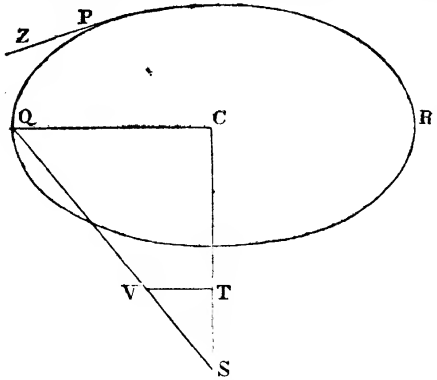
PROP. XLVI. PROB. XXXII.

Positâ cujuscunque generis vi centripetâ, datoque tum virium centro tum plano quocunque in quo corpus revolvitur, & concessis

(n) Vis extraneæ æstimatio dato apsidum motu viâ rectâ ad hunc ferè modum iniri possit. Ponatur translatio menstrua apsidis summæ 3°. cùm vis centralis in orbe elliptico immobili sit ut $\frac{1}{AA}$, & vis extranea ut cA. Pro literis b, m, n, in exemplis tertiis scribendi sunt numeri 1, 1, 4, eritque angulus conversionis ab apside summâ summam usque rursum apsidem $360\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}} = 363$. Unde $\overline{360}|^2 \times \overline{1-c} = \overline{363}|^2 \times \overline{1-4c}$. Sive $\overline{360}|^2 - \overline{360}|^2 c = \overline{363}|^2 - 4 \times \overline{363}|^2 c$. Quare $4 \times \overline{\overline{363}|^2 - \overline{360}|^2}|c = \overline{363}|^2 - \overline{360}|^2 = \overline{6 \times 360} + 9 = 2169$. Sive $397476 \times c = 2169$. Quare $c : 1 = 2169 : 397476 = 1 : \frac{397476}{2169} = 1 : 178\frac{2}{3}$ propemodum. Quid igitur? Num tanta statuenda est vis solis mediocris, quæ progressum illum menstruum trium circiter graduum apsidum Lunarium pariat. Haud censeo. Corollarium illud 7. Prop. LXVI. quod certissimis rationibus confirmatum est, erroris argueret. Ipsam potius, quam hîc usurpavimus, vis extraneæ æstimationem suspectam habeo. Cujus exquisita ratio in eo certè nititur, quòd vires, quæ in utroque orbe, stabili mobilique, vigeant, commensu licet radiorum aliæ, centrum tamen idem respiciant. Inde enim venit constans illa angulorum VCp, VCP inter ipsos ratio, quam Problematis XXX. compositio postulat. Et è ratione illâ constante Propositionis XLIV. Corollariorumque ejus doctrina tota pendet, quæque in hâc Propositione tradita est calculorum ratio. Corpus autem Lunæ vi triplici incitatur. Primum vi propriâ terræ versus terræ centrum. Tum solari, quæ in duas resolvitur; quarum altera, centrum terræ spectans, efficaciam vis terrestris auget; altera verò, secundum rectam directa quæ cum eâ parallela sit, quæ centra solis terræque jungat, cum duabus aliis vim totam efficit à centro terræ nisi in ipsis corporum conjunctionibus paullum declinantem. (Prop. LXVI. hujus Libri.) Unde consequens erit motus Lunares per motum corporis in orbe elliptico, qui ipse circum umbilicum convertatur suum, minus exquisitè repræsentari. Cæterum hunc locum de apsidum motu aliisque Lunaribus, accuratè pertractârunt Clairaultius & T. Simson.

ſigurarum curvilinearum quadraturis: requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, ſecundum rectam in plano illo datam egreſſi.

Sit S centrum virium, SC diſtantia minima centri hujus à plano dato, P corpus de loco P ſecundum rectam PZ egrediens, Q corpus idem in trajectoriâ ſuâ revolvens, & PQR trajectoria illa, in plano dato deſcripta, quam invenire oportet. Jungantur CQ, QS, & ſi in QS capiatur SV proportionalis vi centripetæ, quâ corpus trahitur verſus centrum S, & agatur VT quæ ſit parallela CQ & occurrat SC in T: vis SV reſolvetur (per legum Corol. 2.) in vires ST, TV; quarum ST, trahendo corpus ſecundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera TV, agendo ſecundum poſitionem plani, trahit corpus directè verſus punctum C in plano datum; ideoque efficit,



ut corpus illud in hoc plano perinde moveatur, ac ſi vis ST tolleretur, & corpus vi ſolâ TV revolveretur circa centrum C in ſpatio libero. Datâ autem vi centripetâ TV, quâ corpus Q in ſpatio libero circa centrum datum C revolvitur, datur (per Prop. XLII.) tum trajectoria PQR, quam corpus deſcribit, tum locus Q, in quo corpus ad datum quodvis tempus verſabitur, tum denique velocitas corporis in loco illo Q; & contrà. Q. E. I.

PROP. XLVII. THEOR. XV.

Poſito quòd vis centripeta proportionalis ſit diſtantiæ corporis à centro; corpora omnia in planis quibuſcunque revolventia deſcribent ellipſes, & revolutiones temporibus æqualibus peragent; quæque moventur in lineis rectis, ultrò citróque diſcurrendo, ſingulas eundi & redeundi periodos iiſdem temporibus abſolvent.

Nam,

Nam, ſtantibus quæ in ſuperiore propoſitione, vis SV, quâ corpus Q in plano quovis PQR revolvens trahitur verſus centrum S, eſt ut diſtantia SQ; atque ideo ob proportionales SV & SQ, TV & CQ, vis TV, quâ corpus trahitur verſus punctum C, in orbis plano datum, eſt ut diſtantia CQ. Vires igitur, quibus corpora in plano PQR verſantia trahuntur verſus punctum C, ſunt pro ratione diſtantiarum æquales viribus quibus corpora undiquaque trahuntur verſus centrum S; & propterea corpora movebuntur iiſdem temporibus, in iiſdem figuris, in plano quovis PQR circa punctum C, atque in ſpatiis liberis circa centrum S; ideoque (per Corol 2. Prop. X. & Corol. 2. Prop. XXXVIII.) temporibus ſemper æqualibus, vel deſcribent Ellipſes in plano illo circa centrum C, vel periodos movendi ultrò citróque in lineis rectis, per centrum C in plano illo ductis, complebunt. Q. E. D.

Scholium.

His affines ſunt aſcenſus ac deſcenſus corporum in ſuperficiebus curvis. Concipe lineas curvas in plano deſcribi, dein circum axes quoſvis datos per centrum virium tranſeuntes revolvi, & eâ revolutione ſuperficies curvas deſcribere; tum corpora ita moveri, ut eorum centra in his ſuperficiebus perpetuò reperiantur. Si corpora illa obliquè aſcendendo & deſcendendo currant ultrò citróque; peragentur eorum motus in planis per axem tranſeuntibus, atque ideo in lineis curvis, quarum revolutione curvæ illæ ſuperficies genitæ ſunt. Iſtis igitur in caſibus ſufficit motum in his lineis curvis conſiderare.

PROP. XLVIII. THEOR. XVI.

Si rota globo extrinſecus ad angulos rectos inſiſtat, &, more rotarum revolvendo, progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei, quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, (quodque Cycloidem vel Epicycloidem nominare licet) erit ad duplicatum ſinum verſum arcûs dimidii, qui globum ex eo tempore inter eundum tetigit, ut ſumma diametrorum globi & rotæ ad ſemidiametrum globi.

PROP. XLIX. THEOR. XVII.

Si rota globo concavo ad rectos angulos intrinſecus inſiſtat, & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei,

vilinei,

De Motu Corporum

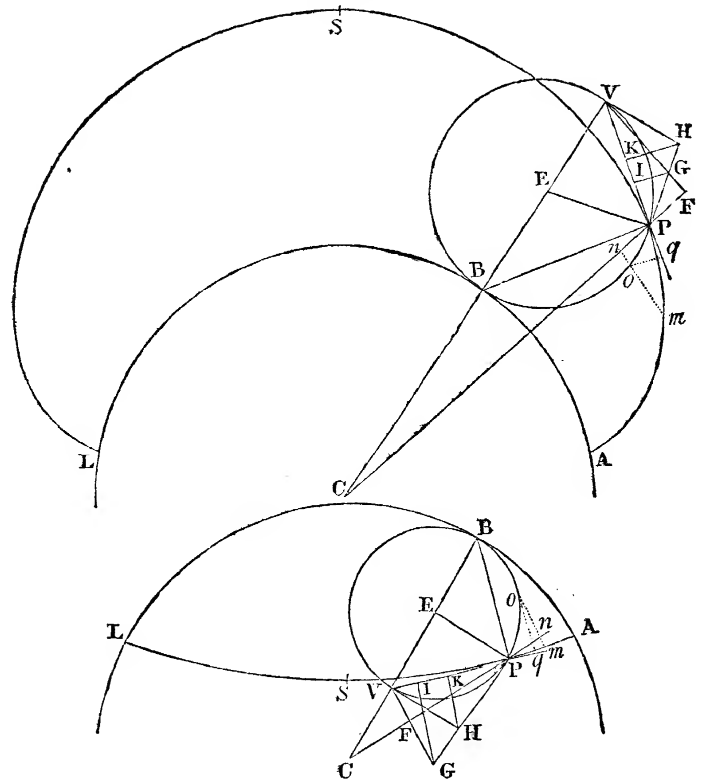
vilinei, quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum ſinum verſum arcûs dimidii, qui globum toto hoc tempore inter eundem tetigit, ut differentia diametrorum globi & rotæ ad ſemidiametrum globi.

Sit ABL globus, C centrum ejus, BPV rota ei inſiſtens, E centrum rotæ, B punctum contactûs, & P punctum datum in perimetro rotæ. Concipe hanc rotam pergere in circulo maximo ABL ab A per B verſus L; & inter eundum ita revolvi, ut arcus, AB, PB, ſibi invicem ſemper æquentur, atque punctum illud P, in perimetro rotæ datum, interea deſcribere viam curvilineam AP. Sit autem AP via tota curvilinea deſcripta, ex quo rota globum tetigit in A, & erit viæ hujus longitudo AP ad duplum ſinum verſum arcûs $\frac{1}{2}$PB, ut 2CE ad CB. Nam recta CE (ſi opus eſt) producta occurrat rotæ in V, junganturque CP, BP, EP, VP; & in CP productam demittatur normalis VF. Tangant PH, VH circulum in P & V, concurrentes in H; ſecetque PH ipſam VF in G, & ad VP demittantur normales GI, HK. Centro item C, & intervallo quovis deſcribatur circulus *nom*, ſecans rectam CP in *n*, rotæ perimetrum BP in *o*, & viam curvilineam AP in *m*; centroque V & intervallo V*o* deſcribatur circulus ſecans VP productam in *q*.

Quoniam rota eundo ſemper revolvitur circa punctum contactûs B; manifeſtum eſt, quòd recta BP perpendicularis eſt ad lineam illam curvam AP, quam rotæ punctum P deſcribit; atque ideo quòd recta VP tanget hanc Curvam in puncto P. Circuli *nom* radius, ſenſim auctus vel diminutus, æquetur tandem diſtantiæ CP; &, ob ſimilitudinem figuræ evaneſcentis P*nomq* & figuræ PFGVI, ratio ultima lineolarum evaneſcentium P*m*, P*n*, P*o*, P*q*, id eſt, ratio mutationum momentanearum curvæ AP, rectæ CP, arcûs circularis BP, ac rectæ VP, eadem erit, quæ linearum PV, PF, PG, PI reſpectivè. Cùm autem VF ad CF & VH ad CV perpendiculares ſint, angulique HVG, VCF propterea æquales; & angulus VHG (ob angulos quadrilateri HVEP ad V & P rectos) angulo CEP æqualis eſt, ſimilia erunt triangula VHG, CEP; & inde fiet ut EP ad CE ita HG ad HV, ſeu HP; & ita KI ad KP: & compoſitè, vel diviſim, ut CB ad CE ita PI ad PK; &, duplicatis conſequentibus, ut CB ad 2CE ita PI ad PV, atque ita P*q* ad P*m*. Eſt igitur decre-

Liber Primus.

decrementum lineæ VP, id eſt, incrementum lineæ BV − VP, ad incrementum lineæ curvæ AP in datâ ratione CB ad 2CE, & propterea (per Corol. Lem. IV.) longitudines BV − VP & AP, incrementis illis genitæ, ſunt in eâdem ratione. Sed, exiſtente BV radio, eſt VP co-ſinus anguli BVP, ſeu $\frac{1}{2}$BEP; ideoque BV − VP ſinus verſus eſt ejuſdem anguli; & propterea in hâc rotâ, cujus radius eſt $\frac{1}{2}$BV, erit BP − VP duplus ſinus verſus arcûs $\frac{1}{2}$BP. Ergo AP eſt ad duplum ſinum verſum arcûs $\frac{1}{2}$BP ut 2CE ad CB. Q.E.D.



Lineam autem AP in propoſitione priore Cycloidem extra globum; alteram, in poſteriore, Cycloidem intra globum, diſtinctionis gratiâ, nominabimus.

Corol. 1. Hinc ſi deſcribatur Cyclois integra ASL, & biſecetur ea

ea in S, erit longitudo partis PS ad longitudinem VP (quæ duplus eſt ſinus anguli VBP, exiſtente EB radio) ut 2CE ad CB, atque ideo in ratione datâ.

Corol. 2. Et longitudo ſemiperimetri Cycloidis AS æquabitur lineæ rectæ, quæ eſt ad rotæ diametrum BV ut 2CE ad CB.

PROP. L. PROB. XXXIII.

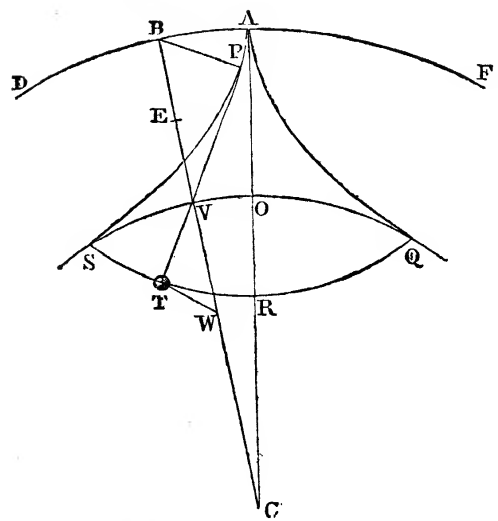
Facere ut corpus pendulum oſcilletur in Cycloide datâ.

Intra globum QVS, centro C deſcriptum, detur Cyclois QRS, biſecta in R, & punctis ſuis extremis, Q & S, ſuperficiei globi hinc inde occurrens. Agatur CR biſecans arcum QS in O, & producatur ea ad A, ut ſit CA ad CO ut CO ad CR. Centro C intervallo CA deſcribatur globus exterior DAF, & intra hunc globum à rotâ, cujus diameter ſit AO, deſcribantur duæ ſemicycloides AQ, AS, quæ globum interiorem tangant in Q & S, & globo exteriori occurrant in A (a). A puncto illo A, filo APT longitudinem AR æquante, pendeat corpus T, & ita intra ſemicycloides AQ, AS oſcilletur, ut quoties pendulum digreditur à perpendiculo AR, filum parte ſui ſuperiore, AP, applicetur ad ſemicycloidem illam, APS, verſus quam peragitur motus, & circum eam, ceu obſtaculum, flectatur; parteque reliquâ, PT, cui ſemicyclois nondum objicitur, protendatur in lineam rectam; & pondus T oſcillabitur in Cycloide datâ QRS. Q. E. F.

Occurrat

(a) Curvas motu rotæ ſcriptas, cujus diameter eſt AO, quæque à puncto A proficiſcatur, eas ſemicycloides eſſe, et in punctis S, Q globum interiorem contingere, ad hunc modum oſtendimus. Intellige junctam CS et productam, ut globo exteriori in D occurrat. Jam cùm CA ſit ad CO ut CO ad CR (ita factum enim) convertendo, erit CA ad AO, ut CO ad OR; et permutando, CA ad CO ut AO, ad OR. Diametri igitur rotarum, quarum motu ſcribuntur cycloides intra globos DF, SQ, cum globorum diametris proportione conveniunt. Arcus autem circulares AD, OS inter ſe ſunt ſimiles. Quare et arcus illi cum globorum diametris, ac proinde cum diametris rotarum, proportione convenient. Hoc eſt AD : OS = AO : OR. Permutando AD : AO vel DS = OS : OR. Unde cùm OS ſemiſſis ſit arcûs ejus circularis, quem rota, cujus diameter eſt OR, integrâ ſui converſione confecerit, erit AD ſemiſſis arcûs ejus circularis, quem rota, cujus diameter eſt AO, integrâ ſui converſione confecerit. Quare DS axis erit Cycloidis, quam motus hujus rotæ generaverit. Unde punctum S ad Cycloidem erit, et arcus AS ſemicyclois erit. Eam verò globum interiorem in puncto S contingere, ex eo patet, quòd recta DS tam cycloidem AS, cujus eſt axis, quam circulum OS ad cujus centrum tendit, ad perpendiculum ſecat. Et ſimili argumentatione efficiatur punctum Q ad cycloidem eſſe, cujus proinde arcus QA ſemicyclois erit, et globum interiorem in Q continget. Q. E. D.

(b) Recta PB, à puncto P ad perpendiculum cum PT educta, occurrat globo AD in B. Quando rotæ, cujus diameter eſt AO, punctum quo cyclois APQ ſcribitur, quod punctum generans vocatur, quando illud locum P obtineat, ambitus rotæ globum AD in B continget. Id enim ex demonſtratione Propoſitionis XLVIII. vel XLIX. manifeſtum eſt Et in tali rotæ ſitu, diametri ejus, quæ per B ducta fuerit, extremitas altera ad globi QOS ſuperficiem erit. Eadem verò, erit ad rectam PT, quæ cycloidem in B contingit. (Per ea quæ in demonſtrandis Propoſit. XLVIII. & XLIX.



Occurrat enim filum PT tum Cycloidi QRS in T, tum Circulo QOS in V, agaturque CV; & ad fili partem rectam PT, è punctis extremis P ac T, erigantur perpendicula BP, TW, occurrentia rectæ CV in B & W. Patet, ex conſtructione & geneſi ſimilium figurarum AS, SR, perpendicula illa, PB, TW, abſcindere de CV longitudines VB, VW rotarum diametris OA, OR æquales (b). Eſt igitur TP ad VP (duplum ſinum anguli VBP exiſtente $\frac{1}{2}$BV radio) ut BW ad BV, ſeu AO+OR ad AO; id eſt (cùm ſint CA ad CO, CO ad CR & diviſim AO ad OR proportionales) ut CA+CO ad CA, vel, ſi biſecetur BV in E, ut 2CE ad CB. Proinde (per Corol. 1. Prop. XLIX.) longitudo partis rectæ fili PT æquatur ſemper Cycloidis arcui PS, & filum totum APT æquatur ſemper Cycloidis arcui dimidio APS, hoc eſt

XLIX. à Newtono oſtenſa ſunt.) Concurſus igitur rectæ PT cum globo QOS, hoc eſt, punctum V, extremitas erit diametri rotæ, quæ per B ducta fuerit, contactum utique rotæ et globi FAD. Erit igitur ipſa BV rotæ diameter, quæ per contactum rotæ globique FAD tranſit. Vergit igitur eadem ad punctum C centrum globi. Puncta igitur tria C, V, B ad rectam ſunt, cujus pars BV ipſi AO æqualis eſt. Jam à puncto T educta recta TW, ad perpendiculum cum PT, ipſi CV in W occurrat. Quando rota, cujus diameter eſt OR, eum ſitum obtineat, ut globum SOQ in puncto V contingat, diameter ejus per punctum contactûs V congruet cum parte aliquâ rectæ VC; arcus autem rotæ, qui à diametro illâ & puncto generante, quod vocant, interceptus ſit, is arcui VO æqualis erit. Rotâ autem, cujus diameter eſt AO, cum ſitum obtinente, ut globum FAD in B contingat, arcus ejus, cujus chorda eſt BP, arcui AB æqualis eſt. Quare arcus quem diximus rotæ prioris ad rotæ poſterioris arcum, cujus chorda BP, rationem habebit quam VO ad AB; ſive eam quam CO ad CA; ſive eam denique quam OR ad AO. Similes igitur inter ſe ſunt rotarum arcus illi, utpote cum rotarum diametris proportione convenientes. Angulus igitur qui ad ambitum rotæ, cujus diameter eſt OR, conſtitutus arcum ejus à diametro per punctum V et puncto generante interceptum baſem habeat, is angulo BVP æqualis erit, ſive angulo WVT. Quapropter diametro rotæ cum parte aliquâ rectæ VC congruente, recta à puncto V in punctum generans extenſa congruet cum parte aliquâ rectæ VT. Rotâ igitur eum ſitum obtinente ut globum QOS in V contingat, punctum generans erit ad rectam VT. Idem verò ad cycloidem SR. Ad concurſum igitur rectæ VT et Cycloidis: hoc eſt ad ipſum punctum T. Quare rotâ eum ſitum obtinente ut globum QOS in puncto V contingat, erit T locus puncti generantis. Unde recta TW, ad perpendiculum cum rectâ VT, quæ contactum rotæ et globi cum puncto generante conjungit, educta, hæc Cycloidem in T continget, rectaque VW, rectis TV, TW interceptæ, diametri rotæ OR æqualis erit. (Per ea quæ in demonſtrandis Propoſitionibus XLVIII & XLIX. à Newtono ſunt oſtenſa.)

5 (per

De Motu Corporum

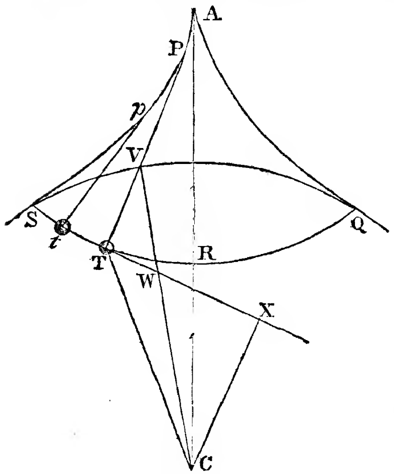
(per Corol. 2. Prop. XLIX.) longitudini AR. Et propterea viciſſim ſi filum manet ſemper æquale longitudini AR movebitur punctum T in Cycloide datâ QRS. Q. E. D.

Corol. Filum AR æquatur ſemicycloidi AS, ideoque ad globi exterioris ſemidiametrum AC eandem habet rationem, quam ſimilis illi ſemicyclois SR habet ad globi interioris ſemidiametrum CO.

PROP. LI. THEOR. XVIII.

Si vis centripeta tendens undique ad globi centrum, C, *ſit in locis ſingulis ut diſtantia loci cujuſque à centro;* &, *hâc ſolâ vi agente, corpus* T *oſcilletur (modo jam deſcripto) in perimetro Cycloidis* QRS: *dico, quòd oſcillationum utcunque inæqualium æqualia erunt tempora.*

Nam in Cycloidis tangentem TW infinitè productam cadat perpendiculum CX & jungatur CT.



Quoniam vis centripeta, quâ corpus T impellitur verſus C, eſt ut diſtantia CT, atque hæc (per legum Corol. 2.) reſolvitur in partes CX, TX, quarum CX, impellendo corpus directè à P, diſtendit filum PT, & per ejus reſiſtentiam tota ceſſat, nullum alium edens effectum; pars autem altera, TX, urgendo corpus tranſverſim, ſeu verſus X, directè accelerat motum ejus in Cycloide; manifeſtum eſt, quòd corporis acceleratio, huic vi acceleratrici proportionalis, ſit ſingulis momentis ut longitudo TX; id eſt, ob datas CV, WV, iiſque proportionales TX, TW, ut longitudo TW, hoc eſt (per Corol. 1. Prop. XLIX.) ut longitudo arcûs Cycloidis TR. Pendulis igitur duobus APT, *Apt* de perpendiculo AR inæqualiter deductis, & ſimul demiſſis, accelerationes eorum ſemper erunt ut arcus deſcribendi, TR, *tR*. Sunt autem partes ſub initio deſcriptæ ut accelerationes, hoc eſt, ut totæ ſub initio deſcribendæ; & propterea partes, quæ manent deſcribendæ, & accelerationes ſubſequentes, his partibus proportionales, ſunt etiam ut totæ; & ſic deinceps. Sunt igitur accelerationes, atque ideo velocitates genitæ, & partes his velocitatibus deſcriptæ, parteſque deſcribendæ, ſemper ut totæ; & propterea partes deſcribendæ datam ſervantes rationem ad invicem ſimul evaneſcent, id eſt, corpora duo oſcillantia ſimul pervenient ad perpendiculum AR. Cúmque viciſſim aſcenſus perpendiculorum de loco infimo R, per eoſdem arcus cycloidales motu retrogrado facti, retardentur in locis ſingulis à viribus iiſdem à quibus deſcenſus accelerabantur, patet velocitates aſcenſuum ac deſcenſuum per eoſdem arcus factorum æquales eſſe, atque ideo temporibus æqualibus fieri; & propterea, cùm Cycloidis partes duæ, RS & RQ, ad utrumque perpendiculi latus jacentes ſint ſimiles & æquales, pendula duo oſcillationes ſuas, tam totas quàm dimidias, iiſdem temporibus ſemper peragent. Q. E. D.

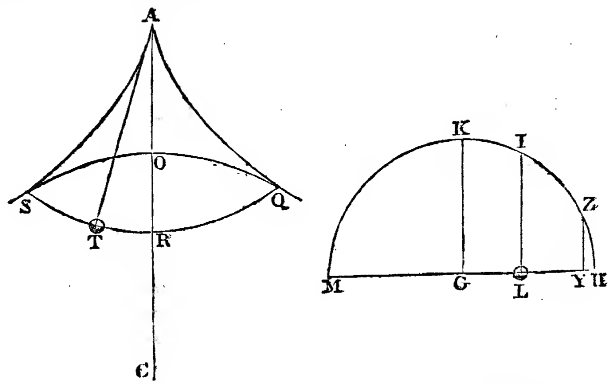
Liber Primus.

Corol. Vis, quâ corpus T in loco quovis T acceleratur vel retardatur in Cycloide, eſt ad totum corporis ejuſdem pondus in loco altiſſimo, S vel Q, ut cycloidis arcus TR ad ejuſdem arcum SR vel QR.

PROP. LII. PROB. XXXIV.

Definire & velocitates Pendulorum in locis ſingulis, & tempora, quibus tum oſcillationes totæ, tum ſingulæ oſcillationum partes, peraguntur.

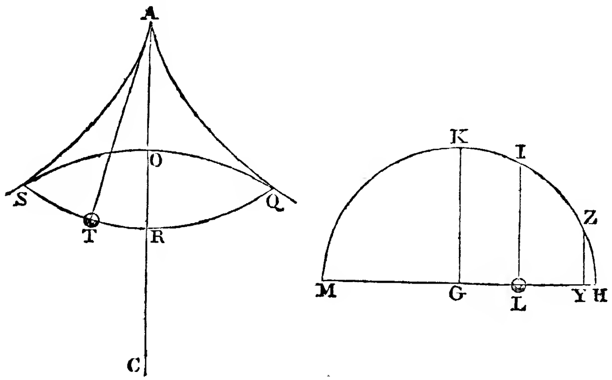
Centro quovis G, intervallo GH Cycloidis arcum RS æquante,



deſcribe ſemicirculum HKM, ſemidiametro GK biſectum. Et ſi vis centripeta,

De Motu Corporum

centripeta, diſtantiis locorum à centro proportionalis, tendat ad centrum G, ſitque ea in perimetro HIK æqualis vi centripetæ in perimetro globi QOS ad ipſius centrum tendenti; & eodem tempore quo pendulum T demittitur è loco ſupremo S, cadat corpus aliquod, L, ab H ad G: quoniam vires, quibus corpora urgentur, ſunt æquales ſub initio, & ſpatiis deſcribendis, TR, LG, ſemper proportionales, atque ideò, ſi æquantur TR & LG, æquales in locis T & L; patet corpora illa deſcribere ſpatia ST, HL æqualia ſub initio, ideóque ſubinde pergere æqualiter urgeri, & æqualia ſpatia deſcribere. Quare (per Prop. XXXVIII.) tempus, quo corpus deſcribit arcum ST, eſt ad tempus oſcillationis unius, ut arcus HI, tempus quo corpus H perveniet ad L, ad ſemiperipheriam



HKM, tempus quo corpus H perveniet ad M. Et velocitas corporis penduli in loco T eſt ad velocitatem ipſius in loco infimo R, (hoc eſt, velocitas corporis H in loco L ad velocitatem ejus in loco G, ſeu incrementum momentaneum lineæ HL ad incrementum momentaneum lineæ HG, arcubus HI, HK æquabili fluxu creſcentibus) ut ordinatim applicata LI ad radium GK, ſive ut $\sqrt{SRq. - TRq.}$ ad SR. Unde cùm, in oſcillationibus inæqualibus, deſcribantur æqualibus temporibus arcus totis oſcillationum arcubus

(c) In figurâ Prop. XLIX. intelligatur jungi rectam CA. Tum ſi recta BV ſenſim creſcat, ut rectæ CB ultimò æqualis fiat, arcus BP ad ambitum circuli BPV eam ultimò rationem habebit, quam duplus arcus AB ad ambitum circuli AC. Unde angulus PEB duplo angulo ACB ultimò æqualis erit. Sed in omni magnitudine rectæ BV, angulus PEB duplo angulo PVB eſt æqualis. Ultimò

Liber Primus.

proportionales; habentur, ex datis temporibus, & velocitates & arcus deſcripti in oſcillationibus univerſis. Quæ erant primò invenienda.

Oſcillentur jam funipendula corpora in Cycloidibus diverſis, intra globos diverſos, quorum diverſæ ſunt etiam vires abſolutæ, deſcriptis: &, ſi vis abſoluta globi cujuſvis QOS dicatur V, vis acceleratrix, quâ pendulum urgetur in circumferentiâ hujus globi, ubi incipit directè verſus centrum ejus moveri, erit ut diſtantia corporis penduli à centro illo & vis abſoluta globi conjunctim, hoc eſt, ut $CO \times V$. Itaque lineola HY, quæ ſit ut hæc vis acceleratrix $CO \times V$, deſcribetur dato tempore; &, ſi erigatur normalis YZ circumferentiæ occurrens in Z, arcus naſcens HZ denotabit datum illud tempus. Eſt autem arcus hic naſcens HZ in ſubduplicatâ ratione rectanguli GHY, ideoque ut $\sqrt{GH \times CO \times V}$. Unde tempus oſcillationis integræ in cycloide QRS (cùm ſit ut ſemiperipheria HKM, quæ oſcillationem illam integram denotat, directè; utque arcus HZ, qui datum tempus ſimiliter denotat, inverſè) fiet ut GH directè & $\sqrt{GH \times CO \times V}$ inverſè; hoc eſt, ob æquales GH & SR, ut $\sqrt{\frac{SR}{CO \times V}}$, ſive (per Corol. Prop. L.) ut $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$. Itaque oſcillationes in globis & cycloidibus omnibus, quibuſcunque cum viribus abſolutis factæ, ſunt in ratione quæ componitur ex ſubduplicatâ ratione longitudinis fili directè, & ſubduplicatâ ratione diſtantiæ inter punctum ſuſpenſionis & centrum globi inverſè, & ſubduplicatâ ratione vis abſolutæ globi etiam inverſè. Q. E. I.

Corol. 1. Hinc etiam oſcillantium, cadentium & revolventium corporum tempora poſſunt inter ſe conferri. Nam ſi rotæ, quâ Cyclois intra globum deſcribitur, diameter conſtituatur æqualis ſemidiametro globi, Cyclois evadet linea recta per centrum globi tranſiens (c); & oſcillatio jam erit deſcenſus & ſubſequens aſcenſus in hâc rectâ. Unde datur tum tempus deſcenſûs de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale, quo corpus uniformiter circa centrum globi ad diſtantiam quamvis revolvendo arcum quadrantalem

timò igitur, puncto V cum ipſo C congruente, anguli BVP, BCA, ſive BCP, BCA, inter ſe æquales fiunt. Congruet igitur recta CP ultimò cum rectâ CA poſitione datâ, et punctum rotæ P, quo in omni rotæ magnitudine Cyclois ſcribitur, erit ad rectam illam CA poſitione datam, et Cyclois ultimò in rectam illam migraverit.

drantalem deſcribit. Eſt enim hoc tempus (per caſum ſecundum) ad tempus ſemioſcillationis in Cycloide quâvis QRS ut 1 ad $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$.

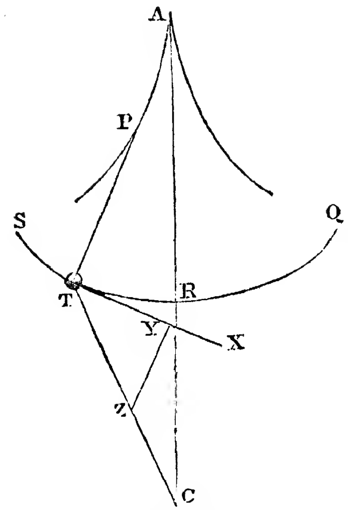
Corol. 2. Hinc etiam conſectantur quæ *Wrennus* & *Hugenius* de Cycloide vulgari adinvenerunt. Nam ſi globi diameter augeatur in infinitum: mutabitur ejus ſuperficies ſphærica in planum, viſque centripeta aget uniformiter ſecundum lineas huic plano perpendiculares, & Cyclois noſtra abibit in Cycloidem vulgi. Iſto autem in caſu longitudo arcûs Cycloidis, inter planum illud & punctum deſcribens, æqualis evadet quadruplicato ſinui verſo dimidii arcûs rotæ inter idem planum & punctum deſcribens; ut invenit *Wrennus:* et Pendulum inter duas ejuſmodi Cycloides in ſimili & æquali Cycloide temporibus æqualibus oſcillabitur, ut demonſtravit *Hugenius.* Sed & deſcenſus gravium, tempore oſcillationis unius, is erit quem *Hugenius* indicavit.

Aptantur autem propoſitiones à nobis demonſtratæ ad veram conſtitutionem Terræ; quatenus rotæ, eundo in ejus circulis maximis, deſcribunt motu clavorum, perimetris ſuis infixorum, Cycloides extra globum; & Pendula inferiùs in fodinis & cavernis Terræ ſuſpenſa, in Cycloidibus intra globos oſcillari debent, ut oſcillationes omnes evadent iſochronæ. Nam gravitas (ut in libro tertio docebitur) decreſcit in progreſſu à ſuperficie terræ, ſurſum quidem in duplicatâ ratione diſtantiarum à centro ejus, deorſum verò in ratione ſimplici.

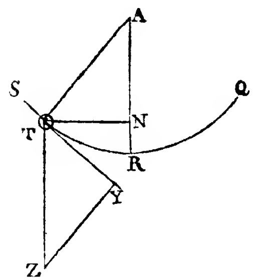
PROP. LIII. PROB. XXXV.

Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire vires quibus corpora in datis curvis lineis oſcillationes ſemper iſochronas peragent.

Oſcilletur corpus T in curvâ quâvis lineâ STRQ, cujus axis ſit AR tranſiens per virium centrum, C. Agatur TX, quæ Curvam illam in corporis loco quovis T contingat, inque hâc tangente TX capiatur TY æqualis arcui TR. Nam longitudo arcûs illius ex figurarum quadraturis, per methodos vulgares, innoteſcit. De puncto Y educatur recta YZ tangenti perpendicularis. Agatur CT perpendiculari illi occurrens in Z, & erit vis centripeta proportionalis rectæ TZ. Q. E. I.



Nam ſi vis, quâ corpus trahitur de T verſus C, exponatur per rectam TZ captam ipſi proportionalem, reſolvetur hæc in vires TY, YZ; quarum YZ, trahendo corpus ſecundum longitudinem fili PT, motum ejus nil mutat; vis autem altera TY motum ejus in curvâ STRQ directè accelerat, vel directè retardat. Proinde cùm hæc ſit ut via deſcribenda TR, accelerationes corporis vel retardationes in oſcillationum duarum (majoris & minoris) partibus proportionalibus deſcribendis, erunt ſemper ut partes illæ, & propterea facient ut partes illæ ſimul deſcribantur. Corpora autem quæ partes totis ſemper proportionales ſimul deſcribunt, ſimul deſcribent totas. Q. E. D.



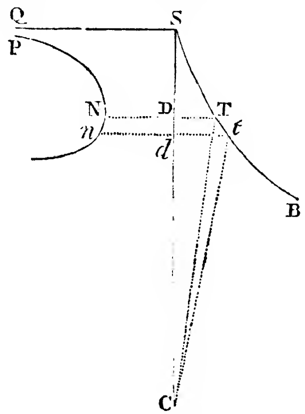
Corol. 1. Hinc ſi corpus T, filo rectilineo AT à centro A pendens, deſcribat arcum circularem STRQ, & interea urgeatur ſecundum lineas parallelas deorſum à vi aliquâ, quæ ſit ad vim uniformem gravitatis, ut arcus TR ad ejus ſinum TN: æqualia erunt oſcillationum ſingularum tempora. Etenim ob parallelas TZ, AR, ſimilia erunt triangula ATN, ZTY; & propterea TZ erit ad AT ut TY ad TN, hoc eſt, ſi gravitatis vis uniformis exponatur per longitudinem datam AT; vis TZ, quâ oſcillationes evadent iſochronæ, erit ad vim gravitatis AT, ut arcus TR, ipſi TY æqualis, ad arcûs illius ſinum TN.

Corol. 2. Et propterea in horologiis, ſi vires, à machinâ in pendulum ad motum conſervandum impreſſæ, ita cum vi gravitatis componi poſſint, ut vis tota deorſum ſemper ſit ut linea, quæ oritur applicando rectangulum ſub arcu TR & radio AR ad ſinum TN, oſcillationes omnes erunt iſochronæ.

PROP. LIV. PROB. XXXVI.

Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire tempora, quibus corpora vi quâlibet centripetâ in lineis quibuſcunque curvis, in plano per centrum virium tranſeunte deſcriptis, deſcendent & aſcendent.

Deſcendat corpus de loco quovis S, per lineam quamvis curvam STtB in plano per virium centrum C tranſeunte datam. Jungatur CS, & dividatur eadem in partes innumeras æquales, ſitque Dd partium illarum aliqua. Centro C, intervallis CD, Cd, deſcribantur circuli DT, dt, lineæ curvæ STtR occurrentes in T & t. Et ex datâ tum lege vis centripetæ, tum altitudine CS, de quâ corpus cecidit; dabitur velocitas corporis in aliâ quâvis altitudine CT (per Prop. XXXIX.) Tempus autem, quo corpus deſcribit lineolam Tt, eſt ut lineolæ hujus longitudo; id eſt, ut ſecans anguli tTC directè, & velocitas inverſè. Tempori huic proportionalis ſit ordinatim applicata DN, ad rectam CS per punctum D perpendicularis; &, ob datam Dd, erit rectangulum Dd×DN, hoc eſt area DNnd, eidem tempori proportionale. Ergo ſi PNn ſit curva illa linea, quam punctum N perpetuò tangit, ejuſque Aſymptotos ſit recta SQ, rectæ CS perpendiculariter inſiſtens: erit area SQPND proportionalis tempori, quo corpus deſcendendo deſcripſit lineam ST; proindeque ex inventâ illâ areâ dabitur tempus. Q. E. I.

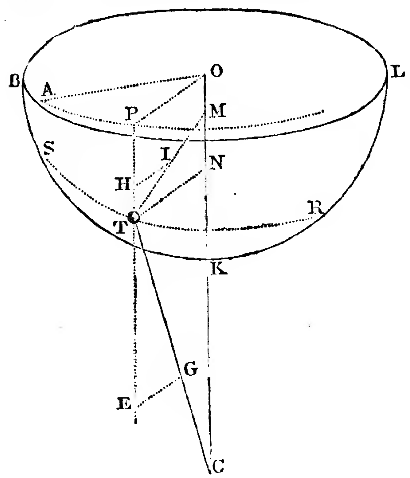


PROP. LV. THEOR. XIX.

Si corpus movetur in ſuperficie quâcunque curvâ, cujus axis per centrum virium tranſit, & à corpore in axem demittatur perpendicularis, eique parallela & æqualis ab axis puncto quovis dato ducatur: dico, quòd parallela illa aream tempori proportionalem deſcribet.

Sit BKL ſuperficies curva; T, corpus in eâ revolvens; STR, trajectoria, quam corpus in eâdem deſcribit; S, initium trajectoriæ; OMK,

OMK, axis ſuperficiei curvæ; TN, recta à corpore in axem perpendicularis; OP, huic parallela & æqualis à puncto O, quod in axe datur, educta; AP, veſtigium trajectoriæ, à puncto P in lineæ volubilis OP plano, AOP, deſcriptum; A, veſtigii initium puncto S reſpondens; TC, recta à corpore ad centrum ducta; TG, pars ejus vi centripetæ, quâ corpus urgetur in centrum C, proportionalis; TM, recta ad ſuperficiem curvam perpendicularis; TI, pars ejus vi preſſionis, quâ corpus urget ſuperficiem, viciſſimque urgetur verſus M à ſuperficie, proportionalis; PTE, recta axi parallela per corpus tranſiens; & GE, IH, rectæ à punctis G & I in parallelam illam PHTF perpendiculariter demiſſæ. Dico jam, quòd area AOP, radio OP ab initio motûs deſcripta, ſit tempori proportionalis. Nam vis TG (per legum Corol. 2.) reſolvitur in vires TE, EG; & vis TI in vires TH, HI: vires autem TE, TH, agendo ſecundum lineam PE plano AOP perpendicularem, mutant ſolummodò motum corporis quatenus huic plano perpendicularem. Ideóque motus ejus quatenus ſecundum poſitionem plani factus; hoc eſt, motus puncti P, quo trajectoriæ veſtigium AP in hoc plano deſcribitur, idem eſt ac ſi vires TE, TH tollerentur, & corpus ſolis viribus EG, HI agitaretur; hoc eſt, idem ac ſi corpus in plano AOP, vi centripetâ ad centrum O tendente, & ſummam virium EG & HI æquante, deſcriberet curvam AP. Sed vi tali deſcribitur area AOP (per Prop. I.) tempori proportionalis. Q.E.D.



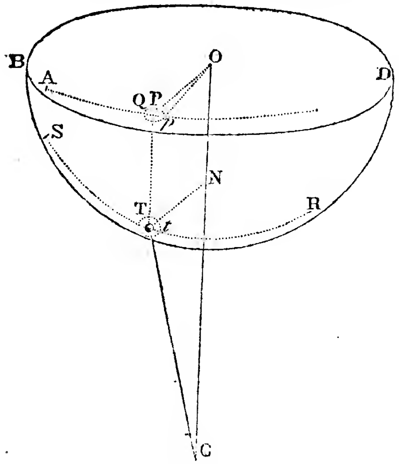
Corol. Eodem argumento ſi corpus, à viribus agitatum ad centra duo vel plura in eâdem quâvis rectâ CO datâ tendentibus, deſcriberet in ſpatio libero lineam quamcunque curvam ST; foret area AOP tempori ſemper proportionalis.

PROP. LVI. PROB. XXXVII.

Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, datiſque tum lege vis

vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum ſuperficie curvâ, cujus axis per centrum illud tranſit; invenienda eſt trajectoria, quam corpus in eâdem ſuperficie deſcribet, de loco dato, datâ cum velocitate, verſus plagam in ſuperficie illâ datam egreſſum.

Stantibus quæ in ſuperiore propoſitione conſtructa ſunt, exeat corpus T, de loco dato S, ſecundum rectam poſitione datam, in trajectoriam inveniendam STR, cujus veſtigium in plano BLO ſit AP. Et ex datâ corporis velocitate in altitudine SC, dabitur ejus velocitas in aliâ quâvis altitudine TC. Eâ cum velocitate, dato tempore quàm minimo, deſcribat corpus trajectoriæ ſuæ particulam T*t*, ſitque P*p* veſtigium ejus in plano AOP deſcriptum. Jungatur O*p*; & circelli, centro T, intervallo T*t* in ſuperficie curvâ deſcripti, veſtigium in plano AOP ſit ellipſis *p*Q. Et, ob datum magnitudine circellum T*t*, datamque ejus ab axe CO diſtantiam TN, vel PO, dabitur ellipſis illa *p*Q ſpecie & magnitudine, ut & poſitione ad rectam PO. Cùmque area PO*p* ſit tempori proportionalis, atque ideo ex dato tempore detur, dabitur angulus PO*p*. Et inde dabitur ellipſeos & rectæ O*p* interſectio communis *p*, unà cum angulo OP*p* in quo trajectoriæ veſtigium AP*p* ſecat lineam OP. Inde verò (conferendo Prop. XLI. cum Corol. ſuo 2.) ratio determinandi curvam AP*p* facile apparet. Tum ex ſingulis veſtigii punctis P, erigendo ad planum AOP perpendicula PT, ſuperficiei curvæ occurrentia in T, dabuntur ſingula trajectoriæ puncta T. Q. E. I.



SECTIO XI.

De motu corporum viribus centripetis ſe mutuò petentium.

Hactenus expoſui motus corporum attractorum ad centrum immobile,

mobile, quale tamen vix extat in rerum naturâ. Attractiones enim fieri ſolent ad Corpora; & corporum trahentium & attractorum actiones ſemper mutuæ ſunt & æquales, per legem tertiam: adeo ut neque attrahens poſſit quieſcere neque attractum, ſi duo ſint corpora, ſed ambo (per legum Corollarium quartum) quaſi attractione mutuâ, circum gravitatis centrum commune revolvantur: & ſi plura ſint corpora, quæ vel ab unico attrahantur, & idem attrahant, vel omnia ſe mutuò attrahant; hæc ita inter ſe moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quieſcat, vel uniformiter moveatur in directum. Quâ de cauſâ jam pergo motum exponere corporum ſe mutuò trahentium, conſiderando vires centripetas tanquam attractiones, quamvis fortaſſe, ſi phyſicè loquamur, veriùs dicantur impulſus. In Mathematicis enim jam verſamur; & propterea, miſſis diſputationibus phyſicis, familiari utimur ſermone, quo poſſimus à lectoribus mathematicis faciliùs intelligi.

PROP. LVII. THEOR. XX.

Corpora duo ſe invicem trahentia deſcribunt, & circum commune centrum gravitatis, & circum ſe mutuò, figuras ſimiles.

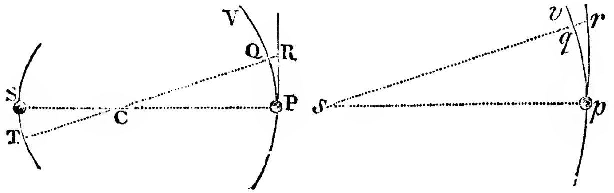
Sunt enim diſtantiæ corporum à communi gravitatis centro reciprocè proportionales corporibus; atque ideo in datâ ratione ad invicem, & componendo in datâ ratione ad diſtantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ diſtantiæ circum terminum ſuum communem æquali motu angulari, propterea quòd in directum ſemper jacentes non mutant inclinationem ad ſe mutuò. Lineæ autem rectæ, quæ ſunt in datâ ratione ad invicem, & æquali motu angulari circum terminos ſuos feruntur, figuras circum eoſdem terminos in planis, quæ unà cum his terminis vel quieſcunt, vel motu quovis non angulari moventur, deſcribunt omninò ſimiles. Proinde ſimiles ſunt figuræ, quæ his diſtantiis circumactis deſcribuntur. Q. E. D.

PROP. LVIII. THEOR. XXI.

Si corpora duo viribus quibuſvis ſe mutuò trahunt, & interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico, quòd figuris, quas corpora ſic mota deſcribunt circum ſe mutuò, poteſt figura ſimilis,

similis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus iisdem describi.

Rovolvantur corpora S, P circa commune gravitatis centrum C, pergendo de S ad T, deque P ad Q. A dato puncto *s* ipsis SP, TQ æquales & parallelæ ducantur semper *sp*, *sq*; & Curva *pqv*, quam punctum *p*, revolvendo circum punctum immotum *s*, describit, erit similis & æqualis Curvis, quas corpora S, P describunt circum se mutuò: proindeque (per Theor. XX.) similis curvis ST & PQV,



quas eadem corpora describunt circum commune gravitatis centrum C: idque quia proportiones linearum SC, CP, & SP, vel *sp*, ad invicem dantur.

Cas. 1. Commune illud gravitatis centrum C, per legum Corollarium quartum, vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primò, quòd id quiescit; inque *s* & *p* locentur corpora duo, immobile in *s*, mobile in *p*, corporibus S & P similia & æqualia. Dein tangant rectæ PR & *pr* Curvas PQ & *pq* in P & *p*; & producantur CQ & *sq* ad R & *r*. Et ob similitudinem figurarum CPRQ, *sprq* erit RQ ad *rq* ut CP ad *sp*, ideoque in datâ ratione. Proinde si vis, quâ corpus P versus corpus S, atque ideo versus centrum intermedium C attrahitur, esset ad vim, quâ corpus *p* versus centrum *s* attrahitur, in eâdem illâ ratione datâ; hæ vires æqualibus temporibus attraherent semper corpora de tangentibus PR, *pr* ad arcus PQ, *pq*, per intervalla ipsis proportionalia RQ, *rq*; ideoque vis posterior efficeret, ut corpus *p* gyraretur in Curvâ *pqv*, quæ similis esset Curvæ PQV, in quâ vis prior efficit, ut corpus P gyretur; & revolutiones iisdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non sunt ad invicem in ratione CP ad *sp*, sed (ob similitudinem & æqualitatem corporum S & *s*, P & *p*, & æqualitatem distantiarum SP, *sp*) sibi mutuò æquales; corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur

hentur de tangentibus: & propterea, ut corpus posterius *p* trahatur per intervallum majus *rq*, requiritur tempus majus, idque in subduplicatâ ratione intervallorum; propterea quòd (per lemma decimum) spatia, ipso motûs initio descripta, sunt in duplicatâ ratione temporum. Ponatur igitur velocitas corporis *p* esse ad velocitatem corporis P in subduplicatâ ratione distantiæ *sp* ad distantiam CP, eò ut temporibus, quæ sint in eadem subduplicatâ ratione, describantur arcus *pq*, PQ, qui sunt in ratione integrâ: et corpora, P, *p*, viribus æqualibus semper attracta, describent circum centra quiescentia C & *s* figuras similes PQV, *pqv*, quarum posterior *pqv* similis est & æqualis figuræ, quam corpus P circum corpus mobile S describit. Q. E. D.

Cas. 2. Ponamus jam quòd commune gravitatis centrum, unà cum spatio in quo corpora moventur inter se, progreditur uniformiter in directum; & (per legum Corollarium sextum) motus omnes in hoc spatio peragentur ut priùs; ideóque corpora describent circum se mutuò figuras easdem ac priùs, & propterea figuræ *pqv* similes & æquales. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc corpora duo viribus distantiæ suæ proportionalibus se mutuò trahentia, describunt (per Prop. X.) & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuò, Ellipses concentricas; & vice versâ, si tales figuræ describuntur, sunt vires distantiæ proportionales.

Corol. 2. Et corpora duo, viribus quadrato distantiæ suæ reciprocè proportionalibus, describunt (per Prop. XI, XII, XIII.) & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuò, sectiones conicas umbilicum habentes in centro, circum quod figuræ describuntur. Et vice versâ, si tales figuræ describuntur, vires centripetæ sunt quadrato distantiæ reciprocè proportionales.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia, radiis & ad centrum illud & ad se mutuò ductis describunt areas temporibus proportionales.

PROP. LIX. THEOR. XXII.

Corporum duorum S *&* P, *circa commune gravitatis centrum* C *revolventium, tempus periodicum esse ad tempus periodicum corporis alterutrius* P, *circa alterum immotum* S *gyrantis, & figuris, quæ corpora circum se mutuò describunt, figuram similem & æqualem*

qualem

De Motu Corporum

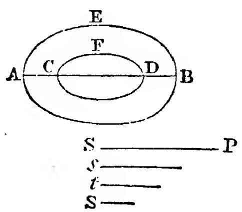
qualem deſcribentis, in ſubduplicata ratione corporis alterius s, *ad ſummam corporum* s + p.

Namque, ex demonſtratione ſuperioris propoſitionis, tempora, quibus arcus quivis ſimiles PQ & *pq* deſcribuntur, ſunt in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum CP & SP, vel *sp*; hoc eſt, in ſubduplicatâ ratione corporis s ad ſummam corporum s + p. Et componendo, ſummæ temporum quibus arcus omnes ſimiles PQ & *pq* deſcribuntur, hoc eſt, tempora tota, quibus figuræ totæ ſimiles deſcribuntur, ſunt in eadem ſubduplicatâ ratione. Q. E. D.

PROP. LX. THEOR. XXIII.

Si corpora duo s & p, *viribus, quadrato diſtantiæ ſuæ reciprocè proportionalibus, ſe mutuò trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quòd Ellipſeos, quam corpus alterutrum* p *hoc motu circa alterum* s *deſcribit, axis principalis erit ad axem principalem Ellipſeos, quam corpus idem* p *circa alterum quieſcens* s *eodem tempore periodico deſcribere poſſet, ut ſumma corporum duorum* s + p *ad primum duorum mediè proportionalium inter hanc ſummam & corpus illud alterum* s.

Nam ſi deſcriptæ Ellipſes eſſent ſibi invicem æquales, tempora periodica (per Theorema ſuperius) forent in ſubduplicatâ ratione corporis s ad ſummam corporum s + p. Minuatur in hâc ratione tempus periodicum in Ellipſi poſteriore, & tempora periodica evadent æqualia; Ellipſeos autem axis principalis (per Prop. XV.) minuetur in ratione, cujus hæc eſt ſeſquiplicata, id eſt in ratione, cujus ratio s ad s + p eſt triplicata; ideoque erit ad axem principalem Ellipſeos alterius, ut primum duorum mediè proportionalium inter s + p & s ad s + p. Et inverſè, axis principalis Ellipſeos circa corpus mobile deſcriptæ erit ad axem principalem deſcriptæ



(a) Sit AEB Ellipſis ejus per omnia ſimilis et æqualis, quam corpus p motu ſuo circum s ſcribit, ſive ejus quam *p* circum *s* in fig. p. 192. Sitque CFD Ellipſis alia, cujus circuitum corpus D, circum umbilicum immobilem, eodem tempore abſolveret, quo corpus p converſionem ſuam circum corpus s. Ellipſeos autem primæ axis tranſverſus ſit AB; alterius, CD. Exponatur recta s datæ cujuſvis longitudinis; aliaque SP, quæ ad datam s rationem eam habeat, quam ſumma corporum duorum, s + p, ad corpus s. Sint duæ, *s*, *t*, inter duas SP, s proportione mediæ. Dicit Newtonus rectam AB ad rectam CD proportionem habere eam quam SP ad *s*. Id verò hiſce ferè argumentis probat. Cùm corpora *p*, D eiſdem viribus centralibus per Ellipſes AEB, CFD ferantur, (id enim omninò ponendum eſt) duplicata temporum converſionum ratio, axium triplicata erit (per Prop. XV.) At verò ratio corporum s + p ad corpus s, ſive rectæ SP ad rectam s, duplicata eſt ejus quam tempus converſionis corporis *p* per AEB habet ad tempus converſionis per CFD (per Theorema noviſſimum.) Quare cubus ex AB erit ad cubum ex CD ut recta SP ad rectam s; ſive ut cubus ex SP ad cubum ex *s*. Quare AB : CD = SP : *s*. Q. E. D.

Liber Primus.

ſcriptæ circa immobile, ut s + p ad primum duorum mediè proportionalium inter s + p & s. Q. E. D (a).

PROP. LXI. THEOR. XXIV.

Si corpora duo viribus quibuſvis ſe mutuò trahentia, neque aliàs agitata vel impedita, quomodocunque moveantur; motus eorum perinde ſe habebunt, ac ſi non traherent ſe mutuò, ſed utrumque à corpore tertio, in communi gravitatis centro conſtituto, viribus iiſdem traheretur: et virium trahentium eadem erit lex, reſpectu diſtantiæ corporum à centro illo communi, atque reſpectu diſtantiæ totius inter corpora.

Nam vires illæ, quibus corpora ſe mutuò trahunt, tendendo ad corpora, tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium; ideoque eædem ſunt, ac ſi à corpore intermedio manarent. Q. E. D.

Et quoniam datur ratio diſtantiæ corporis utriuſvis à centro illo communi ad diſtantiam inter corpora, dabitur ratio cujuſvis poteſtatis diſtantiæ unius ad eandem poteſtatem diſtantiæ alterius; ut & ratio quantitatis cujuſvis, quæ ex unâ diſtantiâ & quantitatibus datis utcunque derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex alterâ diſtantiâ, & quantitatibus totidem datis, datamque illam diſtantiarum rationem ad priores habentibus, ſimiliter derivatur. Proinde ſi vis, quâ corpus unum ab altero trahitur, ſit directè vel inverſè ut diſtantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus diſtantiæ poteſtas; vel denique ut quantitas quævis ex hâc diſtantiâ & quantitatibus datis quomodocunque derivata: erit eadem vis, quâ corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directè itidem vel inverſè, ut corporis attracti diſtantia à centro illo communi; vel ut eadem diſtantiæ hujus poteſtas; vel denique ut quantitas ex hâc diſtantiâ & analogis quantitatibus datis ſimiliter derivata. Hoc eſt, vis trahentis eadem erit lex, reſpectu diſtantiæ utriuſque. Q. E. D.

PROP.

PROP. LXII. PROB. XXXVIII.

Corporum duorum, quæ viribus quadrato distantiæ suæ reciprocè proportionalibus se mutuò trahunt, ac de locis datis demittuntur ([b]), *determinare motus.*

Corpora (per Theorema novissimum) perinde movebuntur, ac si à corpore tertio, in communi gravitatis centro constituto, traherentur; & centrum illud, ipso motûs initio, quiescet per hypothesin; & propterea (per legum Corol. 4) semper quiescet. Determinandi sunt igitur motus corporum (per Prob. XXV.) perinde ac si à viribus ad centrum illud tendentibus urgerentur, & habebuntur motus corporum se mutuò trahentium. Q. E. I.

PROP. LXIII. PROB. XXXIX.

Corporum duorum quæ viribus quadrato distantiæ suæ reciprocè proportionalibus se mutuò trahunt, deque locis datis, secundum datas rectas, datis cum velocitatibus exeunt, determinare motus.

Ex datis corporum motibus sub initio, datur uniformis motus centri communis gravitatis, ut & motus spatii, quod unà cum hoc centro movetur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales respectu hujus spatii. Motus autem subsequentes (per legum Corollarium quintum, & Theorema novissimum) perinde fiunt in hoc spatio, ac si spatium ipsum unà cum communi illo gravitatis centro quiesceret, & corpora non traherent se mutuò, sed à corpore tertio, sito in centro illo, traherentur. Corporis igitur alterutrius in hoc spatio mobili, de loco dato, secundum datam rectam, datâ cum velocitate exeuntis, & vi centripetâ ad centrum illud tendente correpti, determinandus est motus per Problema nonum & vicesimum sextum: & habebitur simul motus corporis alterius circum idem centrum. Cum hoc motu componendus est uniformis ille systematis, spatii & corporum in eo gyrantium,

([b]) Nempe ut solis viribus centralibus incitata rectâ cadant.

([c]) Nimirum datâ velocitate quâcum corpus T è loco T, secundum rectam positione datam, exeat, datâque in eodem loco vi centrali, dabitur Ellipseos, per quam feratur corpus T, in loco T curvatura. (Vide Sect. III. Not. [m].) Sed recta, quæ Ellipsin illam in loco T contingit, positione data; nempe cùm ipsa sit secundum quam corpus è loco T exeat. Circulus igitur, qui Ellipsin in loco T osculabitur, magnitudine et positione datus. Quam igitur de rectâ DT, positione datâ, circulus ille partem abscindat, ea magnitudine data. Verùm ea lateri recto diametri DT æqualis est,

6

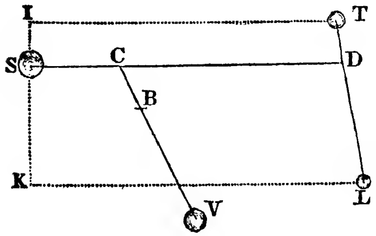
gyrantium, motus progressivus suprà inventus, & habebitur motus absolutus corporum in spatio immobili. Q. E. I.

PROP. LXIV. PROB. XL.

Viribus, quibus corpora se mutuò trahunt, crescentibus in simplici ratione distantiarum à centris: requiruntur motus plurium corporum inter se.

Ponantur primò corpora duo T & L commune habentia gravitatis centrum D. Describent hæc (per Corollarium primum Theorematis XXI.) Ellipses centra habentes in D, quarum magnitudo ex Problemate V. innotescit ([c]).

Trahat jam corpus tertium, S, priora duo, T & L, viribus acceleratricibus, ST, SL, & ab ipsis vicissim trahatur. Vis ST (per legum Corol. 2.) resolvitur in vires SD, DT; & vis SL in vires SD, DL. Vires autem, DT, DL, quæ sunt ut ipsarum summa TL, atque ideo ut vires acceleratrices quibus corpora T & L se mutuò trahunt, additæ his viribus corporum T & L, prior priori & posterior posteriori, componunt

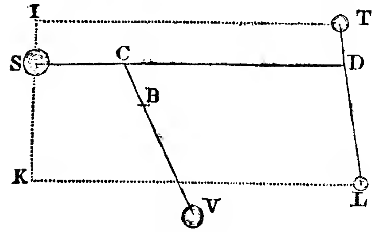


vires distantiis DT ac DL proportionales, ut priùs, sed viribus prioribus majores; ideóque (per Corol. 1. Prop. X. & Corol. 1 & 8. Prop. IV.) efficiunt ut corpora illa describant Ellipses ut priùs, sed motu celeriore. Vires reliquæ acceleratrices SD & SD, actionibus motricibus SD × T & SD × L, quæ sunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter & secundum lineas TI, LK, ipsi DS parallelas, nil mutant situs eorum ad invicem, sed faciunt ut ipsa æqualiter accedant ad lineam IK; quam ductam concipe per medium corporis S, & lineæ DS perpendicularem. Impedietur autem iste ad lineam IK accessus,

est (Hamilton. Conic. Lib. 5. Prop. XVII.) Quare latus rectum ejus diametri magnitudine datum. Diameter autem ipsa magnitudine data, propter semissem ejus, DT, datam. Quare et conjugata ejus magnitudine data, utpote quæ diametri et lateris ejus recti proportione media sit. Eadem verò conjugata positione data, quoniam per datum punctum D centrum Ellipseos transeat, et parallela sit cum rectâ positione datâ, quæ Ellipsin in T contingit. Ellipseos igitur, per quam fertur corpus T, diametri duæ magnitudine et positione datæ; quæ per T, quæque ejus conjugata. Ellipsis igitur ipsa magnitudine & positione data. Q. E. D. Simili modo ostendamus Ellipsin alteram, per quam feratur corpus L, magnitudine et positione datam.

faciendo,

faciendo, ut ſyſtema corporum T & L ex unâ parte, & corpus S ex alterâ, juſtis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum C. Tali motu corpus S, eò quòd ſumma virium motricium $SD \times T$ & $SD \times L$, diſtantiæ CS proportionalium, tendit verſus centrum C, deſcribit Ellipſin circa idem C; & punctum D, ob proportionales CS, CD, deſcribet Ellipſin conſimilem è regione. Corpora autem T & L viribus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, prius priore, poſterius poſteriore, æqualiter & ſecundum lineas parallelas TI & LK, ut dictum eſt, attracta, pergent (per legum Corollarium quintum & ſextum) circa centrum mobile D ellipſes ſuas deſcribere, ut priùs. Q. E. I.



Addatur jam corpus quartum V, & ſimili argumento concludetur hoc & punctum C Ellipſes, circa omnium commune centrum gravitatis B, deſcribere, manentibus motibus priorum corporum T, L & S circa centrum D & C, ſed acceleratis. Et eâdem methodo corpora plura adjungere licebit. Q. E. I.

Hæc ita ſe habent, etſi corpora T & L trahunt ſe mutuò viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus, quàm quibus trahunt corpora reliqua pro ratione diſtantiarum. Sunto mutuæ omnium attractiones acceleratrices ad invicem ut diſtantiæ ductæ in corpora trahentia, & ex præcedentibus facilè deducetur, quòd corpora omnia æqualibus temporibus periodicis Ellipſes varias, circa omnium commune gravitatis centrum B, in plano immobili deſcribunt. Q. E. I.

PROP. LXV. THEOR. XXV.

Corpora plura, quorum vires decreſcunt in duplicatâ ratione diſtantiarum ab eorundem centris, moveri poſſe inter ſe in Ellipſibus; &, radiis ad umbilicos ductis, areas deſcribere temporibus proportionales quàm proximè.

In Propoſitione ſuperiore demonſtratus eſt caſus, ubi motus plures peraguntur in Ellipſibus accuratè. Quo magis recedit lex virium

virium à lege ibi poſitâ, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus; neque fieri poteſt, ut corpora, ſecundum legem hîc poſitam ſe mutuò trahentia, moveantur in Ellipſibus accuratè, niſi ſervando certam proportionem diſtantiarum ab invicem. In ſequentibus autem caſibus non multùm ab Ellipſibus errabitur.

Caſ. 1. Pone corpora plura minora circa maximum aliquod, ad varias ab eo diſtantias, revolvi; tendantque ad ſingula vires abſolutæ proportionales iiſdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per legum Corol. quartum) vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva eſſe, ut corpus maximum nunquam diſtet ſenſibiliter ab hoc centro: & maximum illud vel quieſcet, vel movebitur uniformiter in directum, ſine errore ſenſibili; minora autem revolventur circa hoc maximum in Ellipſibus, atque radiis ad idem ductis deſcribent areas temporibus proportionales; niſi quatenus errores inducuntur, vel per errorem maximi à communi illo gravitatis centro, vel per actiones minorum corporum in ſe mutuò. Diminui autem poſſunt corpora minora, uſque donec error iſte, & actiones mutuæ ſint datis quibuſvis minores; atque ideo donec orbes cum Ellipſibus quadrent, & areæ reſpondeant temporibus, ſine errore, qui non ſit minor quovis dato. Q. E. O.

Caſ. 2. Fingamus jam ſyſtema corporum minorum, modo jam deſcripto circa maximum revolventium, aliudve quodvis duorum, circum ſe mutuò revolventium, corporum ſyſtema progredi uniformiter in directum, & interea vi corporis alterius longè maximi & ad magnam diſtantiam ſiti urgeri ad latus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora ſecundum lineas parallelas urgentur, non mutant ſitus corporum ad invicem, ſed ut ſyſtema totum, ſervatis partium motibus inter ſe, ſimul transferatur, efficiunt: manifeſtum eſt quòd, ex attractionibus in corpus maximum, nulla prorſus orietur mutatio motûs attractorum inter ſe, niſi vel ex attractionum acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem, ſecundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractiones omnes acceleratrices in corpus maximum eſſe inter ſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum; & augendo corporis maximi diſtantiam, donec rectarum ab hoc ad reliqua ductarum

ductarum differentiæ, respectu earum longitudinis, & inclinationes ad invicem minores sint, quàm datæ quævis; perseverabunt motus partium systematis inter se sine erroribus, qui non sint quibusvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invicem distantiam, systema totum ad modum corporis unius attrahitur; movebitur idem hâc attractione ad modum corporis unius: hoc est, centro suo gravitatis describet circa corpus maximum sectionem aliquam conicam (*viz.* Hyperbolam vel Parabolam attractione languidâ, Ellipsin fortiore) & radio ad maximum ducto describet areas temporibus proportionales, sine ullis erroribus, nisi quas partium distantiæ, perexiguæ sanè & pro lubitu minuendæ, valeant efficere. Q. E. O.

Simili argumento pergere licet ad casus magis compositos in infinitum.

Corol. 1. In casu secundo, quo propiùs accedit corpus omnium maximum ad systema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium systematis inter se; propterea quòd linearum, à corpore maximo ad has ductarum, jam major est inclinatio ad invicem, majorque proportionis inæqualitas.

Corol. 2. Maximè autem turbabuntur, ponendo quòd attractiones acceleratrices partium systematis, versus corpus omnium maximum, non sint ad invicem reciprocè ut quadrata distantiarum à corpore illo maximo; præsertim si proportionis hujus inæqualitas major sit quàm inæqualitas proportionis distantiarum à corpore maximo. Nam si vis acceleratrix, æqualiter & secundùm lineas parallelas agendo, nil perturbat motus inter se, necesse est, ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorque sit, vel minor pro majore, vel minore inæqualitate. Excessus impulsuum majorum, agendo in aliqua corpora & non agendo in alia, necessariò mutabunt situm eorum inter se. Et hæc perturbatio addita perturbationi, quæ ex linearum inclinatione & inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

Corol. 3. Unde si systematis hujus partes in Ellipsibus, vel Circulis, sine perturbatione insigni moveantur; manifestum est, quòd eædem à viribus acceleratricibus, ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur nisi levissimè, aut urgentur æqualiter, & secundum lineas parallelas quamproximè.

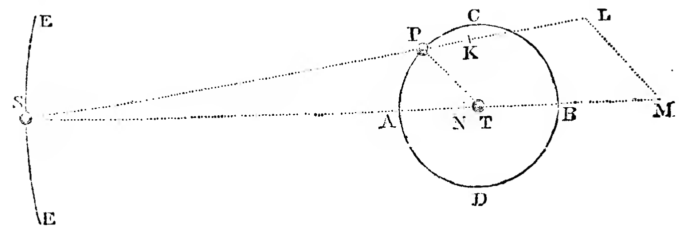
PROP.

PROP. LXVI. THEOR. XXVI.

Si corpora tria, quorum vires decrescunt in duplicatâ ratione distantiarum, se mutuò trahunt; & attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint inter se reciprocè ut quadrata distantiarum; minora autem circa maximum revolvantur: dico, quòd interius circa intimum & maximum, radiis ad ipsum ductis, describet areas temporibus magis proportionales, & figuram ad formam Ellipseos, umbilicum in concursu radiorum habentis, magis accedentem, si corpus maximum his attractionibus agitetur, quàm si maximum illud vel à minoribus non attractum quiescat, vel multo minùs vel multo magis attractum aut multo minùs aut multo magis agitetur.

Liquet ferè ex demonstratione Corollarii secundi Propositionis præcedentis; sed argumento magis distincto & latiùs cogente sic evincitur.

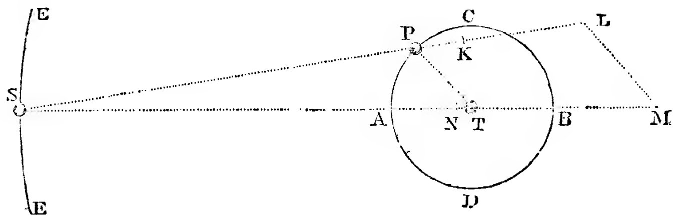
Cas. 1. Revolvantur corpora minora P & S in eodem plano circa maximum T, quorum P describat orbem interiorem PAB, & S exteriorem ESE. Sit SK mediocris distantia corporum P & S; & corporis P versus S attractio acceleratrix, in mediocri illâ distantiâ, exponatur per eandem. In duplicatâ ratione SK ad SP capiatur SL ad SK; & erit SL attractio acceleratrix corporis P versus S in distantiâ quâvis SP. Junge PT, eique parallelam age LM occurrentem ST in M; & attractio SL resolvetur (per legum Corol. 2.) in attractiones SM, LM. Et sic urgebitur corpus P vi



acceleratrice triplici. Vis una tendit ad T, & oritur à mutuâ attractione corporum T & P. Hâc vi solâ corpus P circum corpus T, sive immotum, sive hâc attractione agitatum, describere deberet

De Motu Corporum

deberet & areas, radio PT, temporibus proportionales, & Ellipsin, cui umbilicus est in centro corporis T. Patet hoc per Prop. XI. & Corollaria 2 & 3. Theor. XXI. Vis altera est attractionis LM; quæ, quoniam tendit à P & T, superaddita vi priori coincidet cum ipsâ, & sic faciet ut areæ etiamnum temporibus proportionales describantur per Corol. 3. Theor. XXI. At quoniam non est quadrato distantiæ PT reciprocè proportionalis, componet ea, cum



vi priore, vim ab hâc proportione aberrantem, idque eo magis, quo major est proportio hujus vis ad vim priorem, cæteris paribus. Proinde cùm (per Prop. XI. & per Corol. 2. Theor. XXI.) vis, quâ Ellipsis circa umbilicum T describitur, tendere debeat ad umbilicum illum, & esse quadrato distantiæ PT reciprocè proportionalis; vis illa composita, aberrando ab hâc proportione, faciet ut orbis PAB aberret à formâ Ellipseos umbilicum habentis in T; idque eo magis, quo major est aberratio ab hâc proportione; atque ideo etiam quo major est proportio vis secundæ LM ad vim primam, cæteris paribus. Jam verò vis tertia, SM, trahendo corpus P secundum lineam ipsi ST parallelam, componet cum viribus prioribus vim, quæ non amplius dirigitur à P in T; quæque ab hâc determinatione tanto magis aberrat, quanto major est proportio hujus tertiæ vis ad vires priores, cæteris paribus: atque ideo quæ faciet ut corpus P, radio TP, areas non ampliùs temporibus proportionales describat; atque ut aberratio ab hâc proportionalitate tanto major sit, quanto major est proportio vis hujus tertiæ ad vires cæteras. Orbis verò PAB aberrationem à formâ ellipticâ præfatâ hæc vis tertia duplici de causâ adaugebit; tum quòd non dirigatur à P ad T, tum etiam quòd non sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ PT. Quibus intellectis, manifestum est, quòd areæ temporibus tum maximè fiunt proportionales,

Liber Primus.

portionales, ubi vis tertia, manentibus viribus cæteris, fit minima; & quod orbis PAB tum maximè accedit ad præfatam formam ellipticam, ubi vis tam secunda quàm tertia, sed præcipuè vis tertia, fit minima, vi primâ manente.

Exponatur corporis T attractio acceleratrix versus S per lineam SN; & si attractiones acceleratrices SM, SN æquales essent; hæ, trahendo corpora T & P æqualiter & secundùm lineas parallelas, nil mutarent situm eorum ad invicem. Iidem jam forent corporum illorum motus inter se (per legum Corol. 6.) ac si hæ attractiones tollerentur. Et pari ratione si attractio SN minor esset attractione SM, tolleret ipsa attractionis SM partem SN, & maneret pars sola MN, quâ temporum & arearum proportionalitas, & orbitæ forma illa elliptica perturbaretur. Et similiter si attractio SN major esset attractione SM, oriretur ex differentiâ sola MN perturbatio proportionalitatis & orbitæ. Sic per attractionem SN reducitur semper attractio tertia superior SM ad attractionem MN, attractione primâ & secundâ manentibus prorsus immutatis: & propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, & orbita PAB ad formam præfatam ellipticam tum maximè accedunt, ubi attractio MN vel nulla est, vel quàm fieri possit minima; hoc est, ubi corporum P & T attractiones acceleratrices, factæ versus corpus S, accedunt quantum fieri potest ad æqualitatem; id est, ubi attractio SN non est nulla, neque minor minimâ attractionum omnium SM, sed inter attractionum omnium SM maximam & minimam quasi mediocris; hoc est, non multò major neque multò minor attractione SK. Q. E. D.

Cas. 2. Revolvantur jam corpora minora P, S circa maximum T in planis diversis; & vis LM, agendo secundum lineam PT in plano orbitæ PAB sitam, eundem habebit effectum ac priùs, neque corpus P de plano orbitæ suæ deturbabit. At vis altera, NM, agendo secundum lineam quæ ipsi ST parallela est (atque ideo, quando corpus S versatur extra lineam nodorum, inclinatur ad planum orbitæ PAB) præter perturbationem motûs in longitudinem jam antè expositam, inducet perturbationem motûs in latitudinem, trahendo corpus P de plano suæ orbitæ. Et hæc perturbatio, in dato quovis corporum P & T ad invicem situ, erit ut vis illa generans MN, ideoque minima evadet ubi MN est minima;

hoc

De Motu Corporum

hoc eſt (uti jam expoſui) ubi attractio SN non eſt multò major, neque multò minor attractione SK. Q. E. D.

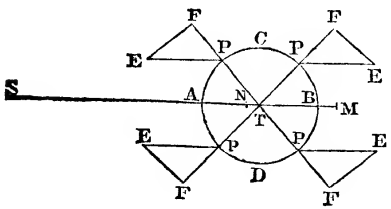
Corol. 1. Ex his facilè colligitur, quòd, ſi corpora plura minora P, S, R, &c. revolvantur circa maximum T, motus corporis intimi P minimè perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum T pariter à cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur & agitatur, atque cætera à ſe mutuò.

Corol. 2. In ſyſtemate vero trium corporum T, P, S, ſi attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium ſint ad invicem reciprocè ut quadrata diſtantiarum; corpus P, radio PT, aream circa corpus T velociùs deſcribet prope conjunctionem A & oppoſitionem B, quàm prope quadraturas C, D. Namque vis omnis quâ corpus P urgetur & corpus T non urgetur, quæque non agit ſecundum lineam PT, accelerat vel retardat deſcriptionem areæ, perinde ut ipſa in conſequentia vel in antecedentia dirigitur. Talis eſt vis NM. Hæc in tranſitu corporis P à C ad A tendit in conſequentia, motumque accelerat; dein uſque ad D in antecedentia, & motum retardat; tum in conſequentia uſque ad B, & ultimò in antecedentia tranſeundo â B ad C ([c]).

Corol. 3. Et eodem argumento patet, quòd corpus P, cæteris paribus, velociùs movetur in conjunctione & oppoſitione quàm in quadraturis.

Corol. 4. Orbita corporis P, cæteris paribus, curvior eſt in quadraturis quàm in conjunctione & oppoſitione. Nam corpora velociora minùs deflectunt à recto tramite. Et præterea vis KL, vel NM, in conjunctione & oppoſitione contraria eſt vi, quâ corpus T trahit corpus P; ideoque vim illam minuit; corpus autem P minùs deflectet à recto tramite, ubi minùs urgetur in corpus T.

Corol.



([c]) Tota vis LM agit ſecundum rectam PT, et niſi in ipſis conjunctionibus pars aliqua alterius vis NM. Nam per P, centrum corporis P, agatur PE cum rectâ TS parallela, et capiatur PE æqualis rectæ NM, modò centrum corporis S ſitum ſit in plano orbitæ ADBC. Per E agatur EF cum rectâ illâ, quæ orbitam in P contingat, parallela. Ita vis NM, ſive PE, reſolvetur in duas PF, FE; quarum PF, cùm ſecundum rectam PT agat, velocitatem deſcriptionis

Liber Primus.

Corol. 5. Unde corpus P, cæteris paribus, longiùs recedet à corpore T in quadraturis, quàm in conjunctione & oppoſitione. Hæc ita ſe habent excluſo motu excentricitatis. Nam ſi orbita corporis P excentrica ſit, excentricitas ejus (ut mox in hujus Corol. 9. oſtendetur) evadet maxima ubi apſides ſunt in ſyzygiis; indeque fieri poteſt ut corpus P, ad apſidem ſummam appellans, abſit longiùs à corpore T in ſyzygiis quàm in quadraturis.

Corol. 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis T, quâ corpus P retinetur in orbe ſuo, augetur in quadraturis per additionem vis LM, ac diminuitur in ſyzygiis per ablationem vis KL, & ob magnitudinem vis KL, magis diminuitur quàm augetur; eſt autem vis illa centripeta (per Corol. 2. Prop. IV.) in ratione compoſitâ ex ratione ſimplici radii TP directè & ratione duplicatâ temporis periodici inverſè: patet hanc rationem compoſitam diminui per actionem vis KL; ideoque tempus periodicum, ſi maneat orbis radius TP, augeri, idque in ſubduplicatâ ratione, quâ vis illa centripeta diminuitur: auctoque ideo vel diminuto hoc radio, tempus periodicum augeri magis, vel diminui minùs quàm in radii hujus ratione ſeſquiplicatâ (per Corol. 6. Prop. IV.) Si vis illa corporis centralis paulatim langueſceret, corpus P minùs ſemper & minùs attractum perpetuò recederet longiùs à centro T; & contrà, ſi vis illa augeretur, accederet propiùs. Ergo ſi actio corporis longinqui S, quâ vis illa diminuitur, augeatur ac diminuatur per vices: augebitur ſimul ac diminuetur radius TP per vices; & tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione compoſitâ ex ratione ſeſquiplicatâ radii, & ratione ſubduplicatâ, quâ vis illa centripeta corporis centralis T, per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui S, diminuitur vel augetur.

Corol. 7. Ex præmiſſis conſequitur etiam, quòd Ellipſeos à corpore P deſcriptæ axis, ſeu apſidum linea, quoad motum angularem, progreditur & regreditur per vices, ſed magis tamen pro-

ſcriptionis areæ nihil mutat. Altera, FE, auget velocitatem illam, dum à C ad A, vel à D ad B corpus tranſfert; minuit viciſſim, corpore ab A in D, vel à B in C tranſeunte. Quod figura ipſa, ni fallor, ſatis monſtrat. Quòd ſi corpus S extra planum orbitæ ADBC ſitum fuerit, tum partem illam vis NM, quæ cum plano orbitæ parallela ſit, in duas reſolvendo, quarum altera agat ſecundum rectam TP, altera ſecundum rectam quæ parallela ſit cum eâ quæ orbitam in P contingat, eadem ferè efficientur.

greditur,

greditur, & per exceffum progreffionis fertur in confequentia. Nam vis quâ corpus P urgetur in corpus T in quadraturis, ubi vis MN evanuit, componitur ex vi LM & vi centripetâ, quâ corpus T trahit corpus P. Vis prior LM, fi augeatur diftantia PT, augetur in eâdem ferè ratione cum hâc diftantiâ; & vis pofterior decrefcit in duplicatâ illâ ratione: ideoque fumma harum virium decrefcit in minore quàm duplicatâ ratione diftantiæ PT, & propterea (per Corol. I. Prop. XLV.) efficit ut aux, feu apfis fumma, regrediatur. In conjunctione verò & oppofitione vis, quâ corpus P urgetur in corpus T, differentia eft inter vim, quâ corpus T trahit corpus P, & vim KL; & differentia illa, propterea quòd vis KL augetur quamproximè in ratione diftantiæ PT, decrefcit in majore quàm duplicatâ ratione diftantiæ PT, ideoque (per Corol. I. Prop. XLV.) efficit ut aux progrediatur. In locis inter fyzygias & quadraturas pendet motus augis ex causâ utrâque conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius exceffu progrediatur ipfa, vel regrediatur. Unde cùm vis KL in fyzygiis fit quafi duplo major quàm vis LM in quadraturis, exceffus erit penes vim KL, transferetque augem in confequentia [d]. Veritas autem hujus & præcedentis Corollarii faciliùs intelligetur, concipiendo fyftema corporum duorum T, P corporibus pluribus S, S, S, &c. in orbe ESE confiftentibus, undique cingi. Namque horum actionibus actio ipfius T minuetur undique, decrefcetque in ratione plufquam duplicatâ diftantiæ.

Corol. 8. Cùm autem pendeat apfidum progreffus vel regreffus a decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quàm duplicata ratione diftantiæ TP, in tranfitu corporis ab apfide imâ ad apfidem fummam; ut & à fimili incremento in reditu ad apfidem imam; atque ideo maximus fit ubi proportio vis in apfide fummâ ad vim in apfide imâ maxime recedit à duplicatâ ratione diftantiarum inverfâ: manifeftum eft, quòd apfides in fyzygiis fuis, per vim ablatitiam KL feu NM − LM, progredientur velociùs, inque quadraturis fuis tardiùs recedent per vim addititiam LM [e]. Ob diuturnitatem verò temporis, quo velocitas progreffùs vel tarditas regreffùs continuatur, fit hæc inæqualitas longè maxima.

[d] Vide Lib. 3. Prop. XXV & XXVI.

Corol.

Corol. 9. Si corpus aliquod, vi reciprocè proportionali quadrato diftantiæ fuæ à centro, revolveretur circa hoc centrum in Ellipfi; & mox, in defcenfu ab apfide fummâ, feu auge, ad apfidem imam, vis illa per acceffum perpetuum vis novæ augeretur in ratione plufquam duplicatâ diftantiæ diminutæ: manifeftum eft, quòd corpus, perpetuo acceffu vis illius novæ impulfum femper in centrum, magis vergeret in hoc centrum, quàm fi urgeretur vi folâ crefcente in duplicatâ ratione diftantiæ diminutæ; ideoque orbem defcriberet orbe elliptico interiorem, & in apfide imâ propiùs accederet ad centrum quàm priùs. Orbis igitur, acceffu hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis, in receffu corporis ab apfide imâ ad apfidem fummam, decrefceret iifdem gradibus quibus antè creverat, rediret corpus ad diftantiam priorem; ideoque fi vis decrefcat in majori ratione, corpus jam minùs attractum afcendet ad diftantiam majorem, & fic orbis excentricitas adhuc magis augebitur. Quare fi ratio incrementi & decrementi vis centripetæ fingulis revolutionibus augeatur, augebitur femper excentricitas; & contrà, diminuetur eadem, fi ratio illa decrefcat. Jam verò in fyftemate corporum T, P, S, ubi apfides orbis PAB funt in quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima eft; & maxima fit, ubi apfides funt in fyzygiis. Si apfides conftituantur in quadraturis, ratio prope apfides minor eft, & prope fyzygias major quàm duplicata diftantiarum; & ex ratione illâ majori oritur augis motus directus, uti jam dictum eft. At fi confideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progreffu inter apfides, hæc minor eft quàm duplicata diftantiarum. Vis in apfide imâ eft ad vim in apfide fummâ in minore quàm duplicatâ ratione diftantiæ apfidis fummæ ab umbilico Ellipfeos ad diftantiam apfidis imæ ab eodem umbilico: & contrà, ubi apfides conftituuntur in fyzygiis, vis in apfide imâ eft ad vim in apfide fummâ in majore quàm duplicatâ ratione diftantiarum. Nam vires LM in quadraturis additæ viribus corporis T componunt vires in ratione minore, & vires KL in fyzygiis fubductæ à viribus corporis T relinquunt vires in ratione majore. Eft igitur ratio decrementi & incrementi totius, in tranfitu inter apfides, minima

[e] Nempe cùm vis KL in fyzygiis maxima fit, vis LM in quadraturis tantùm non ad nihilum redacta fit.

in

De Motu Corporum

in quadraturis, maxima in ſyzygiis: & propterea in tranſitu apſidum à quadraturis ad ſyzygias perpetuò augetur, augetque excentricitatem Ellipſeos; inque tranſitu à ſyzygiis ad quadraturas perpetuò diminuitur, & excentricitatem diminuit.

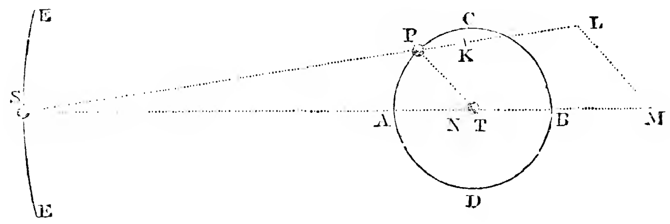
Corol. 10. Ut rationem ineamus errorum in latitudinem, fingamus planum orbis EST immobile manere; & ex errorum expoſità cauſâ manifeſtum eſt, quòd ex viribus NM, ML, quæ ſunt cauſa illa tota, vis ML, agendo ſemper ſecundum planum orbis PAB, nunquam perturbat motus in latitudinem; quódque vis NM, ubi nodi ſunt in ſyzygiis, agendo etiam ſecundum idem orbis planum, non perturbat hos motus; ubi vero ſunt in quadraturis, eos maximè perturbat, corpuſque P de plano orbis ſui perpetuò trahendo, minuit inclinationem plani in tranſitu corporis à quadraturis ad ſyzygias, augetque viciſſim eandem in tranſitu à ſyzygiis ad quadraturas. Unde fit, ut corpore in ſyzygiis exiſtente inclinatio evadat omnium minima, redeatque ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus ad nodum proximum accedit. At ſi nodi conſtituantur in octantibus poſt quadraturas, id eſt, inter C & A, D & B, intelligetur ex modò expoſitis, quòd, in tranſitu corporis P à nodo alterutro ad gradum inde nonageſimum, inclinatio plani perpetuò minuitur; deinde in tranſitu per proximos 45 gradus, uſque ad quadraturam proximam, inclinatio augetur, & poſtea denuo in tranſitu per alios 45 gradus, uſque ad nodum proximum, diminuitur. Magis itaque diminuitur inclinatio quàm augetur, & propterea minor eſt ſemper in nodo ſubſequente quàm in præcedente. Et ſimili ratiocinio, inclinatio magis augetur, quam diminuitur, ubi nodi ſunt in octantibus alteris inter A & D, B & C. Inclinatio igitur ubi nodi ſunt in ſyzygiis eſt omnium maxima. In tranſitu eorum à ſyzygiis ad quadraturas, in ſingulis corporis ad nodos appulſibus, diminuitur; fitque omnium minima, ubi nodi ſunt in quadraturis, & corpus in ſyzygiis: dein creſcit iiſdem gradibus, quibus antea decreverat; nodiſque ad ſyzygias proximas appulſis, ad magnitudinem primam revertitur[f].

Corol. 11. Quoniam corpus P, ubi nodi ſunt in quadraturis, perpetuò trahitur de plano orbis ſui, idque in partem verſus S in tranſitu

[f] Hæc optimè intelligenda ſunt ex calculis quos in Propoſitionibus Libri Tertii XXX & XXXIV. Newtonus ſubducere inſtituit.

Liber Primus.

tranſitu ſuo à nodo C per conjunctionem A ad nodum D; & in contrariam partem in tranſitu à nodo D per oppoſitionem B ad nodum C: manifeſtum eſt, quòd in motu ſuo à nodo C corpus per-



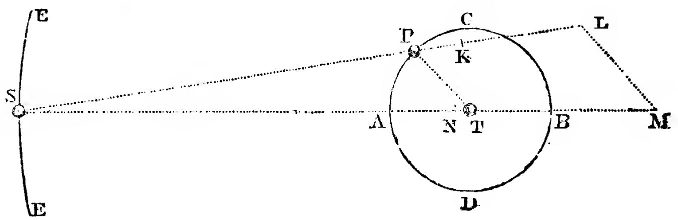
petuò recedit ab orbis ſui plano primo CD, uſque dum perventum eſt ad nodum proximum; ideoque in hoc nodo, longiſſimè diſtans à plano illo primo CD, tranſit per planum orbis EST non in plani illius nodo altero D, ſed in puncto quod inde vergit ad partes corporis S, quodque proinde novus eſt nodi locus in anteriora vergens. Et ſimili argumento pergent nodi recedere, in tranſitu corporis de hoc nodo in nodum proximum. Nodi igitur in quadraturis conſtituti perpetuò recedunt; in ſyzygiis, ubi motus in latitudinem nil perturbatur, quieſcunt; in locis intermediis, conditionis utriuſque participes, recedunt tardiùs: ideoque, ſemper vel retrogradi, vel ſtationarii, ſingulis revolutionibus feruntur in antecedentia.

Corol. 12. Omnes illi in his Corollariis deſcripti errores ſunt paulò majores in conjunctione corporum P, S, quàm in eorum oppoſitione; idque ob majores vires generantes NM & ML.

Corol. 13. Cúmque rationes horum Corollariorum non pendeant à magnitudine corporis S, obtinent præcedentia omnia, ubi corporis S tanta ſtatuitur magnitudo, ut circa ipſum revolvatur corporum duorum T & P ſyſtema. Et ex aucto corpore S, auctâque ideo ipſius vi centripetâ, à quâ errores corporis P oriuntur, evadent errores illi omnes, paribus diſtantiis, majores in hoc caſu quàm in altero, ubi corpus S circum ſyſtema corporum P & T revolvitur.

Corol. 14. Cùm autem vires NM, ML, ubi corpus S longinquum eſt, ſint quamproximè ut vis SK & ratio PT ad ST con- junc-

junctim (f), hoc eſt, ſi detur tum diſtantia PT, tum corporis S vis ſoluta, ut ST cub. reciprocè; ſint autem vires illæ NM, ML cauſæ errorum & effectuum omnium, de quibus actum eſt in præcedentibus Corollariis: manifeſtum eſt, quòd effectus illi omnes, ſtante corporum T & P ſyſtemate, & mutatis tantum diſtantiâ ST



& vi abſolutâ corporis S, ſint quamproximè in ratione compoſitâ ex ratione directâ vis abſolutæ corporis S, & ratione triplicatâ inverſâ diſtantiæ ST. Unde ſi ſyſtema corporum T & P revolvatur circa corpus longinquum S; vires illæ NM, ML, & earum effectus erunt (per Corol. 2 & 6. Prop. IV.) reciprocè in duplicata ratione temporis periodici. Et inde etiam, ſi magnitudo corporis S proportionalis ſit ipſius vi abſolutæ, erunt vires illæ NM, ML, & earum effectus directè ut cubus diametri apparentis longinqui corporis S è corpore T ſpectati, & vice verſâ. Namque hæ rationes eædem ſunt, atque ratio ſuperior compoſita.

Corol. 15. Et quoniam ſi, manentibus orbium ESE & PAB formâ, proportionibus & inclinatione ad invicem, mutetur eorum magnitudo, & ſi corporum S & T vel maneant, vel mutentur vires in datâ quâvis ratione; hæ vires (hoc eſt, vis corporis T, quâ corpus P de recto tramite in orbitam PAB deflectere, & vis corporis S, quâ corpus idem P de orbitâ illâ deviare cogitur) agunt ſemper eodem modo, & eadem proportione: neceſſe eſt, ut ſimiles

(f) Vis ML eſt ad vim SK ſicut recta ML ad rectam SK; hoc eſt, ſi permagna fuerit corporis S diſtantia, ut TP ad ST, illis utique ML, TP, necnon SK, ST, quando diſtantia ST infinitè augetur, ipſam æqualitatis rationem ultimò induentibus. Hinc ſi litera A deſignet vim SK, erit vis $ML = \frac{A \times PT}{ST}$. Unde ſatis conſtat ratio illa compoſita virium ML, quam Newtonus allegavit. Rurſum diſtantiâ ST infinitè auctâ, rectæ MT, PL ultimò parallelæ & æquales fiunt. Quare et recta NM rectæ PL æqualis erit: nam ſi corpora T, P viribus eiſdem pro diſtantiarum ratione verſus S urgeantur, id quod ponendum eſt, punctum N ultimò cum ipſo T congruet. Quare recta NM rectæ PL ultimò æqualis fiet. Diſtantiâ autem ST infinitè auctâ, recta PL triplæ rectæ PK æqualis erit. Nimirum

les & proportionales ſint effectus omnes, & proportionalia effectuum tempora; hoc eſt, ut errores omnes lineares ſint ut orbium diametri; angulares verò, iidem qui priùs; & errorum linearium ſimilium, vel angularium æqualium, tempora ut orbium tempora periodica.

Corol. 16. Unde, ſi dentur orbium formæ & inclinatio ad invicem, & mutentur utcunque corporum magnitudines, vires & diſtantiæ; ex datis erroribus & errorum temporibus in uno caſu, colligi poſſunt errores & errorum tempora in alio quovis, quàm proximè: ſed breviùs hâc methodo. Vires NM, ML, cæteris ſtantibus, ſunt ut radius TP, & harum effectus periodici (per Corol. 2. Lem. X.) ut vires, & quadratum temporis periodici corporis P conjunctim. Hi ſunt errores lineares corporis P; & hinc errores angulares è centro T ſpectati (id eſt, tam motus augis & nodorum, quàm omnes in longitudinem & latitudinem errores apparentes) ſunt, in quâlibet revolutione corporis P, ut quadratum temporis revolutionis quàm proximè (g). Conjungantur hæ rationes cum rationibus Corollarii 14. & in quolibet corporum T, P, S ſyſtemate, ubi P circum T ſibi propinquum, & T circum S longinquum revolvitur, errores angulares corporis P, de centro T apparentes, erunt, in ſingulis revolutionibus corporis illius P, ut quadratum temporis periodici corporis P directè & quadratum temporis periodici corporis T inverſè. Et inde motus medius augis erit in datâ ratione ad motum medium nodorum; & motus uterque erit ut tempus periodicum corporis P directè & quadratum temporis periodici corporis T inverſè. Augendo vel minuendo excentricitatem & inclinationem orbis PAB non mutantur motus augis & nodorum ſenſibiliter, niſi ubi eædem ſunt nimis magnæ.

Corol. 17. Cùm autem linea LM nunc major ſit nunc minor quàm radius PT, exponatur vis mediocris LM per radium illum

Nimirum cùm SL ſit ad SK ut quadratum ex SK ad quadratum ex SP, atque ipſæ SK, SP tantùm non æquales ſint. Inde enim ſequetur duarum SL, SK differentiam, KL, duplam eſſe PK, quæ duarum SK, SP differentia eſt. Quare tota PL ejuſdem PK tripla erit. Dato autem angulo PTA, propter angulum ad K junctâ TK rectum, ratio rectæ PK ad PT data erit. Quare et triplæ PK, ſive illius PL, vel NM, ad PT ratio data. Sed PT, LM ultimò æquales. Ratio igitur NM ad ML data. Quare et vis NM ad vim ML ratio dabitur. Quam igitur vires ML inter ſe rationem habeant, eandem alteræ illæ NM habituræ ſunt. Unde conſtat id quod à Newtono affirmatum eſt.

(g) Nam errores angulares rationem inter ſe habebunt linearium directam, cum contrariâ radiorum TP compoſitam.

PT;

De Motu Corporum

PT; & erit hæc ad vim mediocrem SK, vel SN, (quam exponere licet per ST) ut longitudo PT ad longitudinem ST. Eſt autem vis mediocris SN vel ST, quâ corpus T retinetur in orbe ſuo circum S, ad vim, quâ corpus P retinetur in orbe ſuo circum T, in ratione compoſitâ ex ratione radii ST ad radium PT, & ratione duplicatâ temporis periodici corporis P circum T ad tempus periodicum corporis T circum S ([h]). Et ex æquo, vis mediocris LM ad vim, quâ corpus P retinetur in orbe ſuo circum T (quâve corpus idem P, eodem tempore periodico, circum punctum quodvis immobile T ad diſtantiam PT revolvi poſſet) eſt in ratione illâ duplicatâ periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis unâ cùm diſtantiâ PT, datur vis mediocris LM; & eâ datâ, datur etiam vis MN quamproximè, per analogiam linearum PT, MN.

Corol. 18. Iiſdem legibus, quibus corpus P circum corpus T revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem T ad æquales ab ipſo diſtantias moveri; deinde ex his contiguis factis conflari annulum fluidum, rotundum, ac corpori T concentricum; & ſingulæ annuli partes, motus ſuos omnes ad legem corporis P peragendo, propiùs accedent ad corpus T, & celeriùs movebuntur in conjunctione & oppoſitione ipſarum & corporis S, quàm in quadraturis. Et nodi annuli hujus, ſeu interſectiones ejus cum plano orbitæ corporis S vel T, quieſcent in ſyzygiis; extra ſyzygias verò movebuntur in antecedentia, & velociſſimè quidem in quadraturis, tardiùs aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur, & axis ejus ſingulis revolutionibus oſcillabitur, completâque revolutione ad priſtinum ſitum redibit, niſi quatenus per præceſſionem nodorum circumfertur.

Corol. 19. Fingas jam globum corporis T, ex materiâ non fluidâ conſtantem, ampliari & extendi uſque ad hunc annulum, & alveo per circuitum excavato continere aquam, motuque eodem periodico circa axem ſuum uniformiter revolvi. Hic liquor, per vices acceleratus & retardatus, ut in ſuperiore Corollario, in ſyzygiis velocior erit, in quadraturis tardior, quàm ſuperficies globi, & ſic fluet in alveo refluetque ad modum maris. Aqua, revolvendo circa globi centrum quieſcens, ſi tollatur attractio corporis S, nullum acquiret motum fluxûs & refluxûs. Par eſt ratio

([h]) Prop. IV. Cor. 2.

3

Liber Primus.

tio globi uniformiter progredientis in directum, & interea revolventis circa centrum ſuum (per legum Corol. 5.) ut & globi de curſu rectilineo uniformiter tracti (per legum Corol. 6.) Accedat autem corpus S, & ab ipſius inæquabili attractione mox turbabitur aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. Vis autem LM trahet aquam deorſum in quadraturis, facietque ipſam deſcendere uſque ad ſyzygias; & vis KL trahet eandem ſurſum in ſyzygiis, ſiſtetque deſcenſum ejus, & faciet ipſam aſcendere uſque ad quadraturas: niſi quatenus motus fluendi & refluendi ab alveo aquæ dirigatur, & per frictionem aliquatenus retardetur.

Corol. 20. Si annulus jam rigeat, & minuatur globus, ceſſabit motus fluendi & refluendi: ſed oſcillatorius ille inclinationis motus & præceſſio nodorum manebunt. Habeat globus eundem axem cum annulo, gyroſque compleat iiſdem temporibus, & ſuperficie ſuâ contingat ipſum interius, eique inhæreat; & participando motum ejus, compages utriuſque oſcillabitur, & nodi regredientur. Nam globus, ut mox dicetur, ad ſuſcipiendas impreſſiones omnes indifferens eſt. Annuli, globo orbati, maximus inclinationis angulus eſt, ubi nodi ſunt in ſyzygiis. Inde in progreſſu nodorum ad quadraturas conatur is inclinationem ſuam minuere, & iſto conatu motum imprimit globo toti. Retinet globus motum impreſſum, uſque dum annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatque motum novum in contrariam partem: atque hâc ratione maximus decreſcentis inclinationis motus fit in quadraturis nodorum, & minimus inclinationis angulus in octantibus poſt quadraturas; dein maximus reclinationis motus in ſyzygiis, & maximus angulus in octantibus proximis. Et eadem eſt ratio globi annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior eſt paulo quàm juxta polos, vel conſtat ex materiâ paulo denſiore. Supplet enim vicem annuli iſte materiæ in æquatoris regionibus exceſſus. Et quanquam, auctâ utcunque globi hujus vi centripetâ, tendere ſupponantur omnes ejus partes deorſum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen phænomena hujus & præcentis Corollarii vix inde mutabuntur; niſi quòd loca maximarum & minimarum altitudinum aquæ diverſa erunt. Aqua enim jam in orbe ſuo ſuſtinetur & permanet, non per

per vim ſuam centrifugam, ſed per alveum in quo fluit. Et præterea vis LM trahit aquam deorſum maximè in quadraturis, & vis KL ſeu NM − LM trahit eandem ſurſum maximè in ſyzygiis. Et hæ vires conjunctæ deſinunt trahere aquam deorſum, & incipiunt trahere aquam ſurſum in octantibus ante ſyzygias; ac deſinunt trahere aquam ſurſum, incipiuntque trahere aquam deorſum in octantibus poſt ſyzygias. Et inde maxima aquæ altitudo evenire poteſt in octantibus poſt ſyzygias, & minima in octantibus poſt quadraturas circiter; niſi quatenus motus aſcendendi vel deſcendendi ab his viribus impreſſus, vel per vim inſitam aquæ paulo diutiùs perſeveret, vel per impedimenta alvei paulo citiùs ſiſtatur.

Corol. 21. Eàdem ratione, quâ materia globi juxta æquatorem redundans efficit ut nodi regrediantur, atque ideo per hujus incrementum augetur iſte regreſſus, per diminutionem verò diminuitur, & per ablationem tollitur; ſi materia pluſquam redundans tollatur, hoc eſt, ſi globus juxta æquatorem vel depreſſior reddatur, vel rarior quàm juxta polos, orietur motus nodorum in conſequentia.

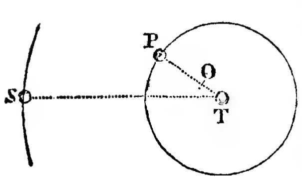
Corol. 22. Et inde viciſſim, ex motu nodorum innoteſcit conſtitutio globi. Nimirum ſi globus polos eoſdem conſtanter ſervat, & motus fit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat; ſi in conſequentia, deficit. Pone globum uniformem & perfectè circinatum in ſpatiis liberis primò quieſcere; dein impetu quocunque, obliquè in ſuperficiem ſuam facto, propelli, & motum inde concipere partim circularem, partim in directum. Quoniam globus iſte ad axes omnes per centrum ſuum tranſeuntes indifferenter ſe habet, neque propenſior eſt in unum axem, unumve axis ſitum, quàm in alium quemvis; perſpicuum eſt, quòd is axem ſuum, axiſque inclinationem vi propriâ nunquam mutabit. Impellatur jam globus obliquè, in eâdem illâ ſuperficiei parte, quâ priùs, impulſu quocunque novo; & cùm citior vel ſerior impulſus effectum nil mutet, manifeſtum eſt, quòd hi duo impulſus, ſucceſſivè impreſſi, eundem producent motum, ac ſi ſimul impreſſi fuiſſent; hoc eſt, eundem, ac ſi globus vi ſimplici ex utroque (per legum Corol. 2.) compoſitâ impulſus fuiſſet, atque ideo ſimplicem, circa axem inclinatione datum. Et par eſt

eſt ratio impulſûs ſecundi facti in locum alium quemvis in æquatore motûs primi; ut & impulſûs primi facti in locum quemvis in æquatore motûs, quem impulſus ſecundus ſine primo generaret; atque ideo impulſuum amborum factorum in loca quæcunque: generabunt hi eundem motum circularem, ac ſi ſimul & ſemel in locum interſectionis æquatorum motuum illorum, quos ſeorſim generarent, fuiſſent impreſſi. Globus igitur homogeneus & perfectus non retinet motus plures diſtinctos, ſed impreſſos omnes componit, & ad unum reducit; & quatenus in ſe eſt, gyratur ſemper motu ſimplici & uniformi circa axem unicum, inclinatione ſemper invariabili datum. Sed nec vis centripeta inclinationem axis, aut rotationis velocitatem, mutare poteſt. Si globus plano quocunque, per centrum ſuum & centrum in quod vis dirigitur tranſeunte, dividi intelligatur in duo hemiſphæria; urgebit ſemper vis illa utrumque hemiſphærium æqualiter, & propterea globum, quoad motum rotationis, nullam in partem inclinabit. Addatur verò alicubi inter polum & æquatorem materia nova, in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu recedendi à centro ſui motûs, turbabit motum globi, facietque ut poli ejus errent per ipſius ſuperficiem, & circulos circum ſe punctumque ſibi oppoſitum perpetuò deſcribant. Neque corrigetur iſta vagationis enormitas, niſi locando montem illum vel in polo alterutro, quo in caſu (per Corol. 21.) nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, quâ ratione (per Corol. 20.) nodi regredientur; vel denique, ex alterâ axis parte addendo materiam novam, quâ mons inter movendum libretur; & hoc pacto nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & hæcce nova materia ſunt vel polo, vel æquatori, propiores.

PROP. LXVII. THEOR. XXVII.

Poſitis iiſdem attractionum legibus, dico quòd corpus exterius S, *circa interiorum* P, T *commune gravitatis centrum* O, *radiis ad centrum illud ductis, deſcribit areas temporibus magis proportionales, & orbem ad formam Ellipſeos, umbilicum in centro eodem habentis, magis accedentem, quàm circa corpus intimum & maximum* T, *radiis ad ipſum ductis, deſcribere poteſt.*

Nam corporis S attractiones verſus T & P componunt ipſius attractionem



attractionem abſolutam, quæ magis dirigitur in corporum T & P commune gravitatis centrum, O, quàm in corpus maximum T, quæque quadrato diſtantiæ SO magis eſt proportionalis reciprocè, quàm quadrato diſtantiæ ST: ut rem perpendenti facilè conſtabit.

PROP. LXVIII. THEOR. XXVIII.

Poſitis iiſdem attractionum legibus, dico quòd corpus exterius S, *circa interiorum* P *&* T *commune gravitatis centrum* O, *radiis ad centrum illud ductis, deſcribit areas temporibus magis proportionales, & orbem ad formam Ellipſeos, umbilicum in centro eodem habentis, magis accedentem, ſi corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atque cætera agitetur, quàm ſi id vel non attractum quieſcat, vel multo magis aut multo minùs attractum aut multo magis aut multo minùs agitetur.*

Demonſtratur eodem ferè modo cum Prop. LXVI. ſed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Sufficeret rem ſic æſtimare. Ex demonſtratione Propoſitionis noviſſimæ liquet centrum, in quod corpus S conjunctis viribus urgetur, proximum eſſe communi centro gravitatis duorum illorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, & quieſceret commune centrum gravitatis corporum trium; deſcriberent corpus S ex unâ parte, & commune centrum aliorum duorum ex alterâ parte, circa commune omnium centrum quieſcens, Ellipſes accuratas. Liquet hoc per Corollarium ſecundum Propoſitionis LVIII. collatum cum demonſtratis in Prop. LXIV. & LXV. Perturbatur iſte motus ellipticus aliquantulum per diſtantiam centri duorum à centro, in quod tertium S attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, & augebitur perturbatio. Proinde minima eſt perturbatio, ubi commune trium centrum quieſcit; hoc eſt, ubi corpus intimum & maximum T, lege cæterorum attrahitur: fitque major ſemper, ubi trium commune illud centrum, minuendo motum corporis T, moveri incipit, & magis deinceps magiſque agitatur.

Corol.

Corol. Et hinc, ſi corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quòd orbitæ deſcriptæ propiùs accedent ad ellipticas, & arearum deſcriptiones fient magis æquabiles, ſi corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ ſunt ut eorum vires abſolutæ directè & quadrata diſtantiarum inverſè, ſe mutuò trahant agitentque, & orbitæ cujuſque umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum (nimirum umbilicus orbitæ primæ & intimæ in centro gravitatis corporis maximi & intimi; ille orbitæ ſecundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iſte tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum, & ſic deinceps) quàm ſi corpus intimum quieſcat, & ſtatuatur communis umbilicus orbitarum omnium.

PROP. LXIX. THEOR. XXIX.

In ſyſtemate corporum plurium A, B, C, D, *&c. ſi corpus aliquod* A *trahit cætera omnia* B, C, D, *&c. viribus acceleratricibus quæ ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à trahente; & corpus aliud* B *trahit etiam cætera* A, C, D, *&c. viribus quæ ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à trahente: erunt abſolutæ corporum trahentium* A, B *vires ad invicem, ut ſunt ipſa corpora* A, B, *quorum ſunt vires.*

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium B, C, D verſus A, paribus diſtantiis, ſibi invicem æquantur ex hypotheſi; & ſimiliter attractiones acceleratrices corporum omnium verſus B, paribus diſtantiis, ſibi invicem æquantur. Eſt autem abſoluta vis attractiva corporis A ad vim abſolutam attractivam corporis B, ut attractio acceleratrix corporum omnium verſus A ad attractionem acceleratricem corporum omnium verſus B, paribus diſtantiis; & ita eſt attractio acceleratrix corporis B verſus A, ad attractionem acceleratricem corporis A verſus B. Sed attractio acceleratrix corporis B verſus A eſt ad attractionem acceleratricem corporis A verſus B, ut maſſa corporis A ad maſſam corporis B; propterea quòd vires motrices, quæ (per definitionem ſecundam, ſeptimam & octavam) ſunt ut vires acceleratrices & corpora attracta conjunctim, hîc ſunt (per motûs legem tertiam) ſibi invicem æquales. Ergo abſoluta vis attractiva corporis A eſt ad abſolutam

De Motu Corporum

solutam vim attractivam corporis B, ut massa corporis A ad massam corporis B. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si singula systematis corpora A, B, C, D, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à trahente; erunt corporum illorum omnium vires absolutæ ad invicem ut sunt ipsa corpora.

Corol. 2. Eodem argumento, si singula systematis corpora A, B, C, D, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt vel reciprocè, vel directè, in ratione dignitatis cujuscunque distantiarum à trahente, quæve secundum legem quamcunque communem ex distantiis ab unoquoque trahente definiuntur; constat quòd corporum illorum vires absolutæ sunt ut corpora.

Corol. 3. In systemate corporum, quorum vires decrescunt in ratione duplicatâ distantiarum, si minora circa maximum in Ellipsibus, umbilicum communem in maximi illius centro habentibus, quàm fieri potest accuratissimis revolvantur; & radiis ad maximum illud ductis describant areas temporibus quàm maximè proportionales: erunt corporum illorum vires absolutæ ad invicem, aut accuratè aut quamproximè, in ratione corporum; & contrà. Patet per Corol. Prop. LXVIII. collatum cum hujus Corol. 1.

Scholium.

His Propositionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas, & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi solent. Rationi enim consentaneum est, ut vires, quæ ad corpora diriguntur, pendeant ab eorundem naturâ & quantitate, ut fit in magneticis. Et quoties hujusmodi casus incidunt, æstimandæ erunt corporum attractiones, assignando singulis eorum particulis vires proprias, & colligendo summas virium. Vocem attractionis hîc generaliter usurpo pro corporum conatu quocunque accedendi ad invicem: sive conatus iste fiat ab actione corporum, vel se mutuò petentium,

(a) Nam si à punctis I, K in rectas HP, PL intelligantur rectæ ad perpendiculum deduci, deductæ illæ rectarum IP, PK inter se proportionem gerent; utpote quæ angulorum ad P æqualium sunt sinus pro radiis inæqualibus IP, PK. Sed, propter circulum, IP : PK = HP : PL. Quare rectæ à punctis I, K in rectas HP, PL ad perpendiculum deductæ, eæ ipsarum HP, PL inter se proportionem gerent; et in omni magnitudine angulorum circum P ista proportionum similitudo manebit. Evanescentibus

Liber Primus.

petentium, vel per spiritus emissos se invicem agitantium; sive is ab actione ætheris, aut aëris, mediive cujuscunque, seu corporei seu incorporei, oriatur, corpora innatantia in se invicem utcunque impellentis. Eodem sensu generali usurpo vocem impulsûs, non species virium & qualitates physicas, sed quantitates & proportiones mathematicas in hoc tractatu expendens, ut in definitionibus explicui. In Mathesi investigandæ sunt virium quantitates & rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuscunque positis consequentur: deinde, ubi in Physicam descenditur, conferendæ sunt hæ rationes cum phænomenis; ut innotescat quænam virium conditiones singulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium speciebus, causis & rationibus physicis tutiùs disputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora sphærica, ex particulis modo jam exposito attractivis constantia, debeant in se mutuò agere; & quales motus inde consequantur.

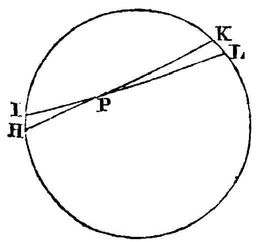
SECTIO XII.

De corporum sphæricorum viribus attractivis.

PROP. LXX. THEOR. XXX.

Si ad sphæricæ superficiei puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis: dico quòd corpusculum, intra superficiem constitutum, his viribus nullam in partem attrahitur.

Sit HIKL superficies illa sphærica, & P corpusculum intùs constitutum. Per P agantur ad hanc superficiem lineæ duæ HK, IL, arcus quàm minimos HI, KL intercipientes; &, ob triangula HPI, LPK (per Corol. 3. Lem. VII.) similia, arcus illi erunt distantiis HP, LP proportionales (a); & superficiei sphæricæ particulæ quævis ad HI & KL, rectis per punctum P transeuntibus undique terminatæ, erunt in duplicatâ illâ ratione. Ergo vires harum particularum in corpus P exercitæ sunt inter se æquales. Sunt enim ut particulæ



Evanescentibus igitur angulis IPH, KPL, deductæ illæ simul evanescentes rectarum HP, PL rationem vel ultimò servabunt. Sed evanescentibus angulis illis, arcus IH, KL evanescunt, & deductarum rationem ultimò induunt. Nempe cùm arcus illi sint ultimò ad deductas, ut radius ad sinus angulorum IHP, KLP ultimò æqualium. Deductarum igitur ratio ultima, ea arcuum inter ipsos ultima erit. Erunt igitur arcus HI, KL ultimò inter se, sicut rectæ HP, PL.

directè,

De Motu Corporum

directè, & quadrata diſtantiarum inverſè. Et hæ duæ rationes componunt rationem æqualitatis. Attractiones igitur, in contrarias partes æqualiter factæ, ſe mutuò deſtruunt. Et ſimili argumento, attractiones omnes per totam ſphæricam ſuperficiem à contrariis attractionibus deſtruuntur. Proinde corpus P nullam in partem his attractionibus impellitur. Q. E. D.

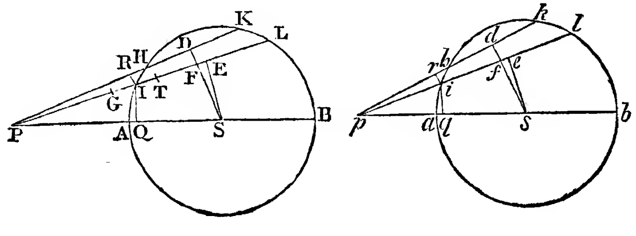
PROP. LXXI. THEOR. XXXI.

Iiſdem poſitis, dico quòd corpuſculum extra ſphæricam ſuperficiem conſtitutum attrahitur ad centrum ſphæræ, vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab eodem centro.

Sint AHKB, *ahkb* æquales duæ ſuperficies ſphæricæ, centris S, *s*, diametris AB, *ab* deſcriptæ, & P, *p* corpuſcula ſita extrinſecus in diametris illis productis. Agantur à corpuſculis lineæ PHK, PIL, *phk*, *pil*, auferentes à circulis maximis AHB, *ahb*, æquales arcus HK, *hk*, & IL, *il*: et ad eas demittantur perpendicula SD, *sd*; SE, *se*; IR, *ir*; quorum SD, *sd* ſecent PL, *pl* in F & *f*: demittantur etiam ad diametros perpendicula IQ, *iq*. Evaneſcant anguli DPE, *dpe*: & ob æquales DS & *ds*, ES & *es*; lineæ PE, PF, & *pe*, *pf*; & lineolæ DF, *df*, pro æqualibus habeantur; quippe quarum ratio ultima, angulis illis DPE, *dpe* ſimul evaneſcentibus, eſt æqualitatis.

Liber Primus.

æqualitatis. His itaque conſtitutis, erit PI ad PF ut RI ad DF, & *pf* ad *pi* ut *df* vel DF ad *ri*; & ex æquo PI×*pf* ad PF×*pi* ut RI ad *ri*, hoc eſt (per Corol. 3. Lem. VII.) ut arcus IH ad arcum *ib*.

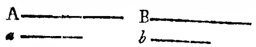


Rurſus PI ad PS ut IQ ad SE, & *ps* ad *pi* ut *se* vel SE ad *iq*; & ex æquo PI×*ps* ad PS×*pi* ut IQ ad *iq*. Et conjunctis rationibus ([b]) PI *quad.*×*pf*×*ps* ad *pi quad.*×PF×PS, ut IH×IQ ad *ib*×*iq*; hoc eſt, ut ſuperficies circularis, quam arcus IH convolutione ſemicirculi AKB circa diametrum AB deſcribet, ad ſuperficiem circularem, quam arcus *ib* convolutione ſemicirculi *akb* circa diametrum *ab* deſcribet. Et vires, quibus hæ ſuperficies ſecundum lineas ad ſe tendentes attrahunt corpuſcula P & *p*, ſunt (per hypotheſin) ut ipſæ ſuperficies directè, & quadrata diſtantiarum ſuperficierum à corporibus inverſè, hoc eſt, ut *pf*×*ps* ad PF×PS. Suntque hæ

vires

([b]) *Et conjunctis rationibus.* Quæ ſequuntur ad argumenta purioris Geometriæ hoc modo revocari poſſint.

Capiatur PG ad quam PF rationem habeat quam *pf* ad *pi*; et PT ad quam PS rationem habeat eam quam *ps* ad *pi*. Jam cùm IH habeat ultimò ad *ib* rationem eam, quam rectangulum PI×*pf* ad rectangulum PF×*pi*; ſive eam, quæ componitur è rationibus rectæ PI ad rectam PF, rectæque *pf* ad *pi*; harum verò poſterior, ea utique quam *pf* habet ad *pi*, eadem ſit quam PF habet ad PG: idcirco habebit IH ad *ib* ultimò rationem quæ componitur è rationibus rectæ PI ad PF rectæque PF ad PG; eam igitur quam PI ad PG. Simili modo, eo quòd IQ ſit ad *iq* ut rectangulum PI×*ps* ad rectangulum PS×*pi*, quódque *ps* ſit ad *pi* ut PS ad PT; obtinebimus IQ eſſe ad *iq* ut PI ad PT. Cùm igitur ſit IH ad *ib* ut PI ad PG, et IQ ad *iq* ut PI ad PT, erit rectangulum IH×IQ ad rectangulum *ib*×*iq*, ultimò ſcilicet angulis HPI, *hpi* infinitè imminutis, ut quadratum ex PI ad rectangulum PG×PT. At verò ratio illa, quam, angulis HPI, *hpi* infinitè imminutis, evaneſcentia illa IH×IQ, *ib*×*iq* inter ſe ultimam habent, ea zonarum quoque evaneſcentium, quarum latitudines ſunt arcus IH, *ib*, ultima inter ipſas erit. Quare zona evaneſcens, cujus latitudo arcus IH, erit ultimò ad zonam evaneſcentem, cujus latitudo *ib*, ut quadratum ex PI ad rectangulum PG×PT. Eademque partium ſimilium harum zonarum ultima erit inter ipſas ratio. Planis igitur circulorum maximorum quorum, in ſphærâ utrâque, diametri ſint communes illæ AB, *ab*, quæ centra ſphærarum cum corporum centris conjungunt, talium inquam circulorum planis dividi intelligantur illæ zonæ in partes ſimiles. Exponatur recta A datæ cujuſvis longitudis; ſitque alia *a* eâ lege mutabilis, ut latitudinibus zonarum quovis modo mutatis, necnon partium utriuſque ſimilium magnitudinibus, recta *a* habeat ad alteram A rationem eam, quam vires, quibus zonæ *ib* pars aliqua, ex iis in quas eam dividi poſuimus, corpus *p* ſollicitat, ad vires quibus pars cognata zonæ IH ſollicitat corpus P. Latitudinibus zonarum infinitè imminutis, necnon partium, in quas ſimiliter ſunt diviſæ, magnitudinibus, numero ſcilicet partium illarum infinitè aucto, vires, quibus præditæ ſunt zonarum partes cognatæ planis LPB, KPB, *lpb*, *kpb* interceptæ, evaneſcentibus utique angulis KPL, *kpl*, corpora P, *p* ſecundum rectas PI, *pi* ultimò totæ trahunt. Unde rationem inter ſe ultimò habebunt eam, quæ componitur è rationibus partium illarum directâ, diſtantiarumque PI, *pi* duplicatâ contrariè ſumptâ; hoc eſt, eam quæ componitur è rationibus quadrati ex PI ad rectangulum PG×PT, quadratique ex *pi* ad quadratum ex PI. Invertendo, vis, quâ ultimò pars zonæ *ib*, planis *lpb*, *kpb* intercepta, trahit corpus *p* ſecundum rectam *pi*, ad vim, quâ ultimò cognata pars zonæ IH trahit corpus P ſecundum rectam PI, rationem habet quæ componitur è rationibus rectanguli PG×PT ad quadratum ex PI, quadratique ex PI ad quadratum ex *pi*; hoc eſt eam, quam rectangulum PG×PT ad quadratum ex *pi*; ſive eam, quæ componitur è rationibus rectæ PG ad *pi* rectæque PT ad *pi*; hoc eſt, è rationibus rectæ PF ad *pf*, rectæque PS ad *ps* (nempe cùm ſit PF : PG = *pf* : *pi*, et PS : PT = *ps* : *pi*) hoc eſt, eam quam rectangulum PF×PS habet ad rectangulum *pf*×*ps*. Eademque rectarum *a*, A erit ratio ultima. Sint B, *b* rectæ, ad quas A, *a* rationes ſingulatim habeant eas, quas vires totæ, quibus trahuntur corpora P, *p* ſecundum rectas PI, *pi* à zonarum partibus cognatis infinitè imminutis, ad virium illarum partes illas, quæ, reſolutione virium per legum Cor. 2. factâ, ad centra ſphærarum tendunt. Erit igitur A ad B ut PI ad PQ, ſive ut PS ad PF. Et *a* ad *b* ut *pi* ad *pq*, ſive ut *ps* ad *pf*.

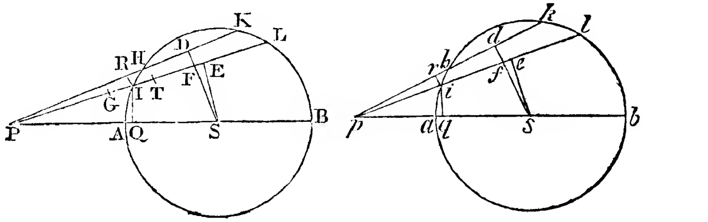


Jam verò cùm ſit B : A = PF : PS = PF×PS : PS²

et A : *a* = =*pf*×*ps* : PF×PS (ex modo oſtenſis) ex æquo perturbatè erit B : *a* = *pf*×*ps* : PS². Unde cùm ſit etiam *a* : *b* = *ps* : *pf* = *ps*² : *pf*×*ps* ex æquo perturbatè erit B : *b* = *ps*² : PS².

Vires igitur quibus cognatæ ſphæricarum ſuperficierum partes corpora P, *p* verſus centra trahunt, rationem duplicatæ diſtantiarum à centris contrariam inter ſe gerunt. Et cùm ſimili argumento de quibuſvis partibus cognatis idem obtinendum ſit, vires, quibus ſuperficies totæ corpora verſus centra trahant, eandem inter ſe rationem gerent. (Geometr. Flux. Th. IV.)

vires ad ipſarum partes obliquas, quæ (factâ per legum Corol. 2. reſolutione virium) ſecundum lineas PS, *ps* ad centra tendunt, ut



PI ad PQ, & *pi* ad *pq*; id eſt (ob ſimilia triangula PIQ & PSF, *piq* & *psf*) ut PS ad PF & *ps* ad *pf*. Unde, ex æquo, fit attractio corpuſculi hujus P verſus S ad attractionem corpuſculi *p* verſus *s*, ut $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ ad $\frac{pf \times PF \times PS}{ps}$, hoc eſt, ut *ps quad.* ad PS *quad.* Et ſimili argumento vires, quibus ſuperficies convolutione arcuum KL, *kl* deſcriptæ trahunt corpuſcula, erunt ut *ps quad.* ad PS *quad.* inque eâdem ratione erunt vires ſuperficierum omnium circularium in quas utraque ſuperficies ſphærica, capiendo ſemper *sd* æqualem SD, & *se* æqualem SE, diſtingui poteſt. Et, per compoſitionem, vires totarum ſuperficierum ſphæricarum in corpuſcula exercitæ erunt in eâdem ratione. Q. E. D.

PROP. LXXII. THEOR. XXXII.

Si ad ſphæræ cujuſvis puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis; ac detur tum ſphæræ denſitas, tum ratio diametri ſphæræ ad diſtantiam corpuſculi à centro ejus: dico quòd vis, quâ corpuſculum attrahitur, proportionalis erit ſemidiametro ſphæræ.

Nam concipe corpuſcula duo ſeorſim à ſphæris duabus attrahi, unum ab unâ & alterum ab alterâ, & diſtantias eorum à ſphærarum centris proportionales eſſe diametris ſphærarum reſpectivè, ſphæras autem reſolvi in particulas ſimiles & ſimiliter poſitas ad corpuſcula. Et attractiones corpuſculi unius, factæ verſus ſingulas particulas ſphæræ unius, erunt ad attractiones alterius verſus analogas totidem particulas ſphæræ alterius, in ratione compoſitâ ex ratione particularum directè & ratione duplicatâ diſtantiarum

tiarum inverſè. Sed particulæ ſunt ut ſphæræ, hoc eſt, in ratione triplicatâ diametrorum; & diſtantiæ ſunt ut diametri; & ratio prior directè unà cum ratione poſteriore bis inverſè eſt ratio diametri ad diametrum.

Corol. 1. Hinc ſi corpuſcula in circulis, circa ſphæras ex materiâ æqualiter attractivâ conſtantes, revolvantur; ſintque diſtantiæ à centris ſphærarum proportionales earundem diametris: tempora periodica erunt æqualia.

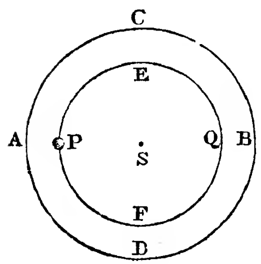
Corol. 2. Et vice verſâ, ſi tempora periodica ſunt æqualia; diſtantiæ erunt proportionales diametris. Conſtant hæc duo per Corol. 3. Prop. IV.

Corol. 3. Si ad ſolidorum duorum quorumvis, ſimilium & æqualiter denſorum, puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ, decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis; vires, quibus corpuſcula, ad ſolida illa duo ſimiliter ſita, attrahentur ab iiſdem, erunt ad invicem ut diametri ſolidorum.

PROP. LXXIII. THEOR. XXXIII.

Si ad ſphæræ alicujus datæ puncta ſingula tendant æquales vires centripetæ decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis: dico quòd corpuſculum intra ſphæram conſtitutum attrahitur vi proportionali diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.

In ſphærâ ABCD, centro S deſcriptâ, locetur corpuſculum P; & centro eodem S, intervallo SP, concipe ſphæram interiorem PEQF deſcribi. Manifeſtum eſt (per Prop. LXX.) quòd ſphæricæ ſuperficies concentricæ, ex quibus ſphærarum differentia AEBF componitur, attractionibus ſuis per attractiones contrarias deſtructis, nil agunt in corpus P. Reſtat ſola attractio ſphæræ interioris PEQF. Et (per Prop. LXXII.) hæc eſt ut diſtantia PS. Q. E. D.



Scholium.

Superficies, ex quibus ſolida componuntur, hîc non ſunt purè mathematicæ,

mathematicæ, sed orbes adeo tenues, ut eorum crassitudo instar nihili sit; nimirum orbes evanescentes, ex quibus sphæra ultimò constat, ubi orbium illorum numerus augetur & crassitudo minuitur in infinitum. Similiter per puncta, ex quibus lineæ, superficies, & solida componi dicuntur, intelligendæ sunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ.

PROP. LXXIV. THEOR. XXXIV.

Iisdem positis, dico quòd corpusculum extra sphæram constitutum attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato distantiæ suæ ab ipsius centro.

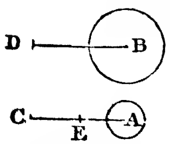
Nam distinguatur sphæra in superficies sphæricas innumeras concentricas; & attractiones corpusculi, à singulis superficiebus oriundæ, erunt reciprocè proportionales quadrato distantiæ corpusculi à centro (per Prop. LXXI.) Et componendo, fiet summa attractionum, hoc est attractio corpusculi in sphæram totam, in eâdem ratione. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc in æqualibus distantiis à centris homogenearum sphærarum attractiones sunt ut sphæræ ( ). Nam (per Prop. LXXII.) si distantiæ sunt proportionales diametris sphærarum, vires erunt ut diametri. Minuatur distantia major in illâ ratione; &, distantiis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicatâ illâ ratione; ideoque erit ad attractionem alteram in triplicatâ illâ ratione, hoc est, in ratione sphærarum.

Corol. 2. In distantiis quibusvis attractiones sunt ut sphæræ applicatæ ad quadrata distantiarum.

Corol. 3. Si corpusculum, extra sphæram homogeneam positum, trahitur vi reciprocè proportionali quadrato distantiæ suæ ab ipsius centro, constet autem sphæra ex particulis attractivis; decrescet

( ) Sint sphæræ homogeneæ A, B, et ad æquales à centris earum distantias collocata puta corpora C, D. Dicit Newtonus vim, quâ corpus C urgetur versus centrum sphæræ A, esse ad vim, quâ corpus D urgetur versus centrum sphæræ B, sicut sphæra ipsa A ad ipsam B. Capiatur enim AE quæ sit ad BD vel illi æqualem AC ut diameter sphæræ A ad diametrum sphæræ B; et in ipso puncto E collocatum puta corpus tertium. Jam vis quâ corpus D urgetur versus B erit ad vim quâ corpus E urgetur versus A ut diameter sphæræ B ad diameter sphæræ A (per Prop. LXXVII.) Et vis quâ corpus E urgetur versus A erit ad vim quâ corpus C urgetur versus A, ut quadratum ex AC ad quadratum AE, hoc est, ut quadratum è diametro sphæræ B ad quadratum è diametro sphæræ A. Ex æquo vis quâ corpus D urgetur versus B ad vim quâ corpus C urgetur versus A rationem habet quæ componitur è rationibus diametri sphæræ B ad diametrum sphæræ A, quadratique ex diametro



•4

crescet vis particulæ cujusque in duplicatâ ratione distantiæ à particulâ.

PROP. LXXV. THEOR. XXXV.

Si ad sphæræ datæ puncta singula tendant vires æquales centripetæ, decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis; dico quòd sphæra quævis alia similaris ab eâdem attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato distantiæ centrorum.

Nam particulæ cujusvis attractio est reciprocè ut quadratum distantiæ suæ à centro sphæræ trahentis (per Prop. LXXIV.) & propterea eadem est, ac si vis tota attrahens manaret de corpusculo unico sito in centro hujus sphæræ. Hæc autem attractio tanta est, quanta foret vicissim attractio corpusculi ejusdem, si modò illud à singulis sphæræ attractæ particulis eâdem vi traheretur, quâ ipsas attrahit. Foret autem illa corpusculi attractio (per Prop. LXXIV.) reciprocè proportionalis quadrato distantiæ suæ à centro sphæræ; ideoque huic æqualis attractio sphæræ est in eâdem ratione. Q. E. D.

Corol. 1. Attractiones sphærarum, versus alias sphæras homogeneas, sunt ut sphæræ trahentes applicatæ ad quadrata distantiarum centrorum suorum à centris earum, quas attrahunt.

Corol. 2. Idem valet, ubi sphæra attracta etiam attrahit. Namque hujus puncta singula trahent singula alterius eâdem vi, quâ ab ipsis vicissim trahuntur; ideoque, cùm in omni attractione urgeatur (per Legem 3.) tam punctum attrahens, quàm punctum attractum, geminabitur vis attractionis mutuæ, conservatis proportionibus.

Corol. 3. Eadem omnia, quæ superiùs de motu corporum circa umbilicum conicarum sectionum demonstrata sunt, obtinent, ubi

diametro sphæræ B ad quadratum ex diametro sphæræ A; hoc est eam, quæ est cubi ex diametro sphæræ B ad cubum ex diametro sphæræ A; sive eam, quæ est sphæræ ipsius B ad sphæram ipsam A. Q. E. D. *(Eadem ferè in notis suis MSS. Gregorius.)*

Cor. H. 1. In æqualibus distantiis à centris sphærarum, quarum densitates sint diversæ, singularum tamen uniformis, attractiones erunt inter se ut sphærarum corpora; hoc est, ut sphæræ & densitates conjunctim.

Cor. H. 2. Vis, quâ sphæra quælibet homogenea corpusculum quodvis, ad datam à centro distantiam positum, in centrum trahit, eadem est, ac si materia omnis sphæræ in ipso centro conglobata esset. Nam, radio sphæræ sensim se contrahente, puta concretione quâdam materiæ effici, ut corpus maneat. Manebit igitur vis attrahendi (per Cor. H. 1.) Et si radio ad minimum redacto corpus usque maneat, manebit usque cum corpore vis attrahendi.

sphæra

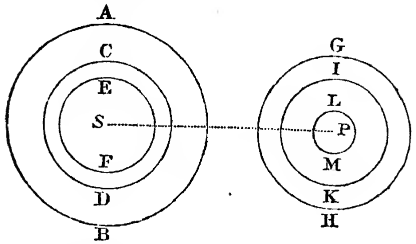
ſphæra attrahens locatur in umbilico, & corpora moventur extra ſphæram.

Corol. 4. Ea verò, quæ de motu corporum circa centrum conicarum ſectionum demonſtrantur, obtinent ubi motus peraguntur intra ſphæram.

PROP. LXXVI. THEOR. XXXVI.

Si ſphæræ in progreſſu à centro ad circumferentiam (quoad materiæ denſitatem & vim attractivam) utcunque diſſimilares, in progreſſu verò per circuitum ad datam omnem à centro diſtantiam ſunt undique ſimilares; & vis attractiva puncti cujuſque decreſcit in duplicatâ ratione diſtantiæ corporis attracti: dico, quòd vis tota, quâ hujuſmodi ſphæra una attrahit aliam, ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ centrorum.

Sunto ſphæræ quotcunque concentricæ ſimilares AB, CD, EF, &c. quarum interiores additæ exterioribus componant materiam denſiorem verſus centrum, vel ſubductæ relinquant tenuiorem; & hæ (per Prop. LXXV.) trahent ſphæras alias quotcunque concentricas ſimilares GH, IK, LM, &c. ſingulæ ſingulas, viribus reciprocè proportionalibus quadrato diſtantiæ SP. Et componendo vel dividendo, ſumma virium illarum omnium, vel exceſſus aliquarum ſupra alias; hoc eſt, vis, quâ ſphæra tota, ex concentricis quibuſcunque vel concentricarum differentiis compoſita, AB, trahit totam ex concentricis quibuſcunque vel concentricarum differentiis compoſitam, GH; erit in eâdem ratione. Augeatur numerus ſphærarum concentricarum in infinitum, ſic ut materiæ denſitas unà cum vi attractivâ, in progreſſu à circumferentiâ ad centrum, ſecundum legem quamcunque creſcat vel decreſcat; &, additâ materiâ non attractivâ, compleatur ubivis denſitas deficiens, eò ut ſphæræ acquirant formam quamvis optatam; & vis, quâ harum una attrahet alteram, erit etiamnum, per argumentum ſuperius, in eâdem illâ diſtantiæ quadratæ ratione inverſâ. Q. E. D.



Corol.

Corol. 1. Hinc ſi ejuſmodi ſphæræ complures, ſibi invicem per omnia ſimiles, ſe mutuò trahant; attractiones acceleratrices ſingularum in ſingulas erunt, in æqualibus quibuſvis centrorum diſtantiis, ut ſphæræ attrahentes.

Corol. 2. Inque diſtantiis quibuſvis inæqualibus, ut ſphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum inter centra.

Corol. 3. Attractiones verò motrices, ſeu pondera ſphærarum in ſphæras erunt, in æqualibus centrorum diſtantiis, ut ſphæræ attrahentes & attractæ conjunctim, id eſt, ut contenta ſub ſphæris per multiplicationem producta.

Corol. 4. Inque diſtantiis inæqualibus, ut contenta illa directè & quadrata diſtantiarum inter centra inverſè.

Corol. 5. Eadem valent, ubi attractio oritur à ſphæræ utriuſque virtute attractivâ mutuo exercitâ in ſphæram alteram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportione ſervatâ.

Corol. 6. Si hujuſmodi ſphæræ aliquæ circa alias quieſcentes revolvantur, ſingulæ circa ſingulas; ſintque diſtantiæ inter centra revolventium & quieſcentium proportionales quieſcentium diametris; æqualia erunt tempora periodica.

Corol. 7. Et viciſſim, ſi tempora periodica ſunt æqualia; diſtantiæ erunt proportionales diametris.

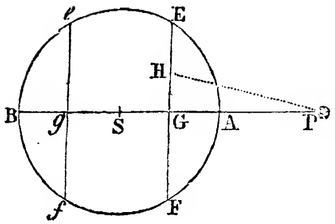
Corol. 8. Eadem omnia, quæ ſuperiùs de motu corporum circa umbilicos conicarum ſectionum demonſtrata ſunt, obtinent; ubi ſphæra attrahens, formæ & conditionis cujuſvis jam deſcriptæ, locatur in umbilico.

Corol. 9. Ut & ubi gyrantia ſunt etiam ſphæræ attrahentes, conditionis cujuſvis jam deſcriptæ.

PROP. LXXVII. THEOR. XXXVII.

Si ad ſingula ſphærarum puncta tendant vires centripetæ proportionales diſtantiis punctorum à corporibus attractis: dico quòd vis compoſita, quâ ſphæræ duæ ſe mutuò trahent, eſt ut diſtantia inter centra ſphærarum.

Caſ. 1. Sit AEBF ſphæra; S centrum ejus; P corpuſculum attractum; PASB axis ſphæræ per centrum corpuſculi tranſiens; EF, *ef* plana duo, quibus ſphæra ſecatur, huic axi perpendicularia, & hinc inde æqualiter diſtantia à centro ſphæræ; G, *g* interſectiones



ſectiones planorum & axis; & H punctum quodvis in plano EF. Puncti H vis centripeta in corpuſculum P, ſecundum lineam PH exercita, eſt ut diſtantia PH; & (per legum Corol. 2.) ſecundum lineam PG, ſeu verſus centrum S, ut longitudo PG. Igitur punctorum omnium in plano EF, hoc eſt plani totius vis, quâ corpuſculum P trahitur verſus centrum S, eſt ut diſtantia PG multiplicata per numerum punctorum; id eſt, ut ſolidum quod continetur ſub plano ipſo EF & diſtantia illa PG. Et ſimiliter, vis plani *ef*, quâ corpuſculum P trahitur verſus centrum S, eſt ut planum illud ductum in diſtantiam ſuam P*g*, ſive ut huic æquale planum EF ductum in diſtantiam illam P*g*; & ſumma virium plani utriuſque ut planum EF ductum in ſummam diſtantiarum PG+P*g*, id eſt, ut planum illud ductum in duplam centri & corpuſculi diſtantiam PS, hoc eſt, ut duplum planum EF ductum in diſtantiam PS, vel ut ſumma æqualium planorum EF+*ef* ducta in diſtantiam eandem. Et ſimili argumento, vires omnium planorum in ſphæra tota, hinc inde æqualiter à centro ſphæræ diſtantium, ſunt ut ſumma planorum ducta in diſtantiam PS, hoc eſt, ut ſphæra tota & ut diſtantia PS conjunctim. Q. E. D.

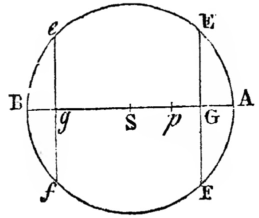
Caſ. 2. Trahit jam corpuſculum P ſphæram AEBF. Et eodem argumento probabitur quòd vis, quâ ſphæra illâ trahitur, erit ut diſtantia PS. Q. E. D.

Caſ. 3. Componatur jam ſphæra altera ex corpuſculis innumeris P; & quoniam vis, quâ corpuſculum unumquodque trahitur, eſt ut diſtantia corpuſculi à centro ſphæræ primæ & ut ſphæra eadem conjunctim, atque ideo eadem eſt, ac ſi prodiret tota de corpuſculo unico in centro ſphæræ; vis tota, quâ corpuſcula omnia in ſphærâ ſecundâ trahuntur, hoc eſt, quâ ſphæra illa tota trahitur, eadem erit, ac ſi ſphæra illa traheretur vi prodeunte de corpuſculo unico in centro ſphæræ primæ, & propterea proportionalis eſt diſtantiæ inter centra ſphærarum. Q. E. D.

Caſ. 4. Trahant ſphæræ ſe mutuò, & vis geminata proportionem priorem ſervabit. Q. E. D.

Caſ.

Caſ. 5. Locetur jam corpuſculum *p* intra ſphæram AEBF; & quoniam vis plani *ef* in corpuſculum eſt ut ſolidum contentum ſub plano illo & diſtantia *pg*; & vis contraria plani EF ut ſolidum contentum ſub plano illo & diſtantiâ *p*G; erit vis ex utrâque compoſita ut differentia ſolidorum; hoc eſt, ut ſumma æqualium planorum ducta in ſemiſſem differentiæ diſtantiarum, id eſt, ut ſumma illa ducta in *p*S diſtantiam corpuſculi à centro ſphæræ. Et ſimili argumento, attractio planorum omnium EF, *ef* in ſphærâ totâ, hoc eſt, attractio ſphæræ totius, eſt conjunctim ut ſumma planorum omnium, ſeu ſphæra tota, & ut *p*S, diſtantia corpuſculi à centro ſphæræ. Q. E. D.



PROP. LXXVIII. THEOR. XXXVIII.

Si ſphæræ in progreſſu à centro ad circumferentiam ſint utcunque diſſimilares & inæquabiles, in progreſſu verò per circuitum ad datam omnem à centro diſtantiam ſint undique ſimilares; & vis attractiva puncti cujuſque ſit ut diſtantia corporis attracti: dico quòd vis tota, quâ hujuſmodi ſphæræ duæ ſe mutuò trahunt, ſit proportionalis diſtantiæ inter centra ſphærarum.

Demonſtratur ex Propoſitione præcedente eodem modo, quo Propoſitio LXXVI. ex Propoſitione LXXV. demonſtrata fuit.

Corol. Quæ ſuperiùs in Propoſitionibus X & LXIV. de motu corporum circa centra conicarum ſectionum demonſtrata ſunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi corporum ſphæricorum conditionis jam deſcriptæ, & attracta corpora ſunt ſphæræ conditionis ejuſdem.

Scholium.

Attractionum caſus duos inſigniores jam dedi expoſitos; nimirum ubi vires centripetæ decreſcunt in duplicatâ diſtantiarum ratione, vel creſcunt in diſtantiarum ratione ſimplici; efficientes in utroque caſu ut corpora gyrentur in conicis ſectionibus, & componentes corporum ſphæricorum vires centripetas eâdem lege, in receſſu à centro, decreſcentes vel creſcentes cum ſeipſis: quod eſt

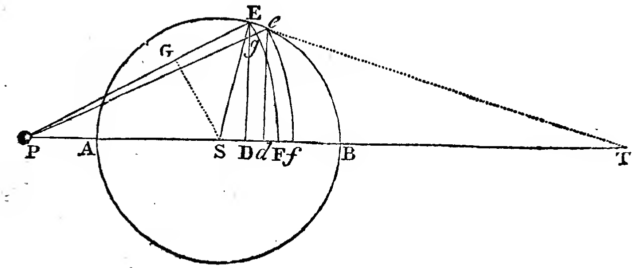
notatu

notatu dignum. Caſus cæteros, qui concluſiones minùs elegantes exhibent, ſigillatim percurrere longum eſſet. Malim cunctos methodo generali ſimul comprehendere ac determinare, ut ſequitur.

LEMMA XXIX.

Si deſcribantur, centro S, *circulus quilibet* AEB, *&, centro* P, *circuli duo* EF, *ef, ſecantes priorem in* E, *e, lineamque* PS *in* F, *f; & ad* PS *demittantur perpendicula* ED, *ed: dico quòd, ſi diſtantia arcuum* EF, *ef in infinitum minui intelligatur, ratio ultima lineæ evaneſcentis* Dd *ad lineam evaneſcentem* Ff *ea ſit, quæ lineæ* PE *ad lineam* PS.

Nam ſi linea P*e* ſecet arcum EF in *g*; & recta E*e*, quæ cum arcu evaneſcente E*e* coincidit, producta occurrat rectæ PS in T; & ab S demittatur in PE normalis SG: ob ſimilia triangula DTE, *d*T*e*, DES; erit D*d* ad E*e*, ut DT ad TE, ſeu DE ad ES; & ob tri-



angula E*eg*, ESG (per Lem. VIII. & Corol. 3. Lem. VII.) ſimilia (c), erit E*e* ad *eg*, ſeu F*f*, ut ES ad SG; & ex æquo, D*d* ad F*f* ut DE ad SG; hoc eſt (ob ſimilia triangula PDE, PGS) ut PE ad PS. Q. E. D.

PROP.

(c) Anguli recti PEF, SEB inter ſe æquales ſunt. Ablatoque communi SEF, relinquentur PES, ſive GES, *e*E*g* inter ſe æquales. Anguli autem ad G et *g* æquales, namque recti. Quapropter triangula GES, *g*E*e* erunt inter ſe ſimilia.

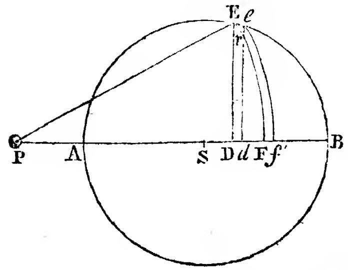
(d) Nimirum vis quâ corpuſculum in P poſitum trahitur verſus centrum S ab annulo evaneſcente ſphærico, converſione evaneſcentis arcûs EF genito, fluxio eſt virium, quibus corpus idem trahitur verſus idem centrum S à ſuperficie ſphæricâ, quæ converſione arcûs integri EF generatur. Ex iis autem quæ hactenus à Newtono diſputata ſunt, id ſcilicet efficitur, illam virium fluxionem rectanguli $\text{PD} \times \text{D}d$, ſive $\text{PD} \times \dot{\overline{\text{PD}}}$, ſive $\text{PD} \times \dot{\overline{\text{FD}}}$, rationem conſtanter ſervare. Sive ſpatii $\text{PF} \times \dot{\overline{\text{FD}}} - \text{FD} \times \dot{\overline{\text{FD}}}$. Hujus autem ſpatii ſpatium $\text{PF} \times \text{FD} - \frac{1}{2}\text{FD}^2$ fluens erit. Quare vires ipſæ ſpatii $\text{PF} \times \text{FD} -$

6

PROP. LXXIX. THEOR. XXXIX.

Si ſuperficies ob latitudinem infinitè diminutam jamjam evaneſcens EF*fe, convolutione ſui circa axem* PS, *deſcribat ſolidum ſphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quòd vis, quâ ſolidum illud trahit corpuſculum ſitum in* P, *eſt in ratione compoſitâ ex ratione ſolidi* $\text{DE}q \times \text{F}f$, *& ratione vis, quâ particula data in loco* F*f traheret idem corpuſculum.*

Nam ſi primò conſideremus vim ſuperficiei ſphæricæ EF, quæ convolutione arcûs FE generatur, & à linea *de* ubivis ſecatur in *r*; erit ſuperficiei pars annularis, convolutione arcûs *r*E genita, ut lineola D*d*, manente ſphæræ radio PE (uti demonſtravit *Archimedes* in Lib. de *Sphærâ* & *Cylindro.*) Et hujus vis, ſecundum lineas, PE vel P*r*, undique in ſuperficie conicâ ſitas, exercita, ut hæc ipſa ſuperficiei pars annularis; hoc eſt, ut lineola D*d*, vel, quod perinde eſt, ut rectangulum ſub dato ſphæræ radio PE & lineolâ illâ D*d*: at ſecundum lineam, PS, ad centrum S tendentem, minor in ratione PD ad PE, ideoque ut $\text{PD} \times \text{D}d$.



Dividi jam intelligatur linea DF in particulas innumeras æquales, quæ ſingulæ nominentur D*d*; & ſuperficies FE dividetur in totidem æquales annulos; quorum vires erunt ut ſumma omnium $\text{PD} \times \text{D}d$, hoc eſt, ut $\frac{1}{2}\text{PF}q - \frac{1}{2}\text{PD}q$, ideoque ut DE *quad* (d). Ducatur jam ſuperficies FE in altitudinem F*f*; & fiet ſolidi EF*fe* vis exercita in corpuſculum P ut $\text{DE}q \times \text{F}f$: puta ſi detur vis, quam particula aliqua data, F*f*, in diſtantiâ PF exercet

$\text{FD} - \frac{1}{2}\text{FD}^2$, vel inter ſe rationem gerent, vel datis majores minoreſve erunt, quàm ut rationem illam gerere poſſint. (Geometr. Flux. Th. IV.) Evaneſcente FD punctum D tandem cum ipſo F jungatur, rectaque FD in nihilum abeat. Superficies ipſa ſphærica FE, cum viribus ſuis ſimul in nihilum abierit. Non igitur datis majores minoreſve erunt vires illæ, quàm ut ſpatii illius inter ſe rationem gerant, quocum unà in nihilum abierint. Gerent igitur conſtanter ſpatii $\text{PF} \times \text{FD} - \frac{1}{2}\text{FD}^2$ inter ſe rationem. Junctâ verò FE, dimidium quadrati ex FE rectangulo $\text{PF} \times \text{FD}$ æquale erit. Quare $\text{PF} \times \text{FD} - \frac{1}{2}\text{FD}^2$ differentiæ quadratorum ex EF, FD dimidium erit; hoc eſt, dimidium quadratum ex FD. Vires igitur, quibus ſuperficies ſpherica converſione arcûs EF genita corpuſculum in P poſitum verſus S trahunt, quæcunque fuerit arcûs illius amplitudo, quadrati ex ED, hoc eſt, è ſinu arcûs, rationem inter ſe conſtanter gerunt, ſicut Newtonus affirmavit.

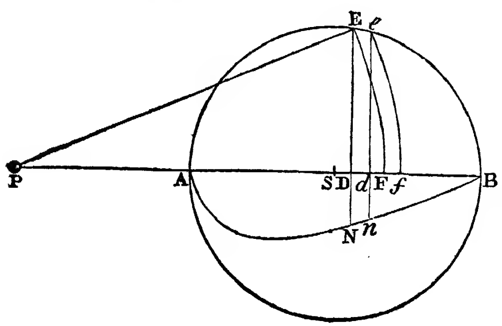
in

in corpuſculum P. At ſi vis illa non detur, fiet vis ſolidi EF*fe* ut ſolidum DE*q* × F*f* & vis illa non data conjunctim. Q. E. D.

PROP. LXXX. THEOR. XL.

Si ad ſphæræ alicujus ABE, *centro* S *deſcriptæ, particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ, & ad ſphæræ axem* AB, *in quo corpuſculum aliquod* P *locatur, erigantur de punctis ſingulis,* D, *perpendicula,* DE, *ſphæræ occurrentia in* E, *& in ipſis capiantur longitudines* DN, *quæ ſint ut quantitates* $\frac{DEq \times PS}{PE}$ *& vis, quam ſphæræ particula, ſita in axe ad diſtantiam* PE, *exercet in corpuſculum* P, *conjunctim: dico quòd vis tota, quâ corpuſculum* P *trahitur verſus ſphæram, eſt ut area* ANB *comprehenſa ſub axe ſphæræ* AB, *& linea curva* ANB, *quam punctum* N *perpetuò tangit.*

Etenim ſtantibus quæ in Lemmate & Theoremate noviſſimo conſtructa ſunt, concipe axem ſphæræ AB dividi in particulas innumeras æquales D*d*, & ſphæram totam dividi in totidem laminas ſphæricas concavo-convexas EF*fe*; & erigatur perpendiculum *dn*. Per Theorema ſuperius, vis, quâ lamina EF*fe* trahit corpuſculum P, eſt ut DE*q* × F*f* & vis particulæ unius ad diſtantiam PE vel PF exercita conjunctim. Eſt autem (per Lemma noviſſimum) D*d* ad F*f* ut PE ad PS, & inde F*f* æqualis $\frac{PS \times Dd}{PE}$; & DE*q* × F*f* æquale D*d* in $\frac{DEq \times PS}{PE}$; & propterea vis laminæ EF*fe* eſt ut D*d* in $\frac{DEq \times PS}{PE}$ & vis particulæ ad diſtantiam PF exercita conjunctim, hoc eſt (ex hypotheſi) ut DN × D*d*, ſeu area evaneſcens DN*nd*. Sunt igitur laminarum omnium vires, in corpus P exercitæ, ut areæ omnes DN*nd*; hoc eſt, ſphæræ vis tota ut area tota ANB. Q. E. D.



Corol. 1. Hinc ſi vis centripeta, ad particulas ſingulas tendens, eadem ſemper maneat in omnibus diſtantiis, & fiat DN ut

DE*q* ×

$\frac{DEq \times PS}{PE}$; erit vis tota, quâ corpuſculum à ſphærâ attrahitur, ut area ANB.

Corol. 2. Si particularum vis centripeta ſit reciprocè ut diſtantia corpuſculi à ſe attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEq}$; erit vis, quâ corpuſculum P à ſphærâ totâ attrahitur, ut area ANB.

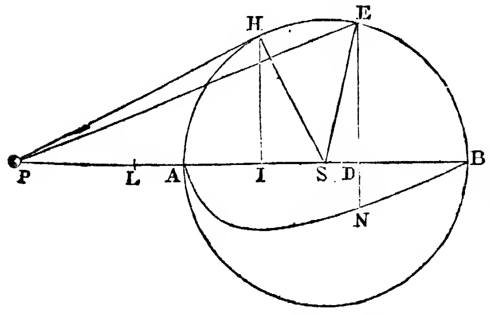
Corol. 3. Si particularum vis centripeta ſit reciprocè ut cubus diſtantiæ corpuſculi à ſe attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEqq}$; erit vis, quâ corpuſculum à totâ ſphærâ attrahitur, ut area ANB.

Corol. 4. Et univerſaliter ſi vis centripeta ad ſingulas ſphæræ particulas tendens ponatur eſſe reciprocè ut quantitas V, fiat autem DN ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$; erit vis, quâ corpuſculum à ſphærâ totâ attrahitur, ut area ANB.

PROP. LXXXI. PROB. XLI.

Stantibus jam poſitis, menſuranda eſt area ANB.

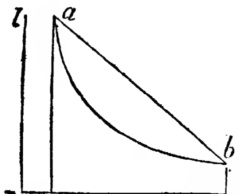
A puncto P ducatur recta PH ſphæram tangens in H, & ad axem PAB demiſſâ normali HI, biſecetur PI in L; & erit (per Prop. XII. Lib. 2. Elem.) PE*q* æquale PS*q* + SE*q* + 2PSD. Eſt autem SE*q* ſeu SH*q* (ob ſimilitudinem triangulorum SPH, SHI) æquale rectangulo PSI. Ergo PE*q* æquale eſt contento ſub PS & PS + SI + 2SD, hoc eſt, ſub PS & 2LS + 2SD, id eſt, ſub PS & 2LD. Porro DE *quad.* æquale eſt SE*q* − SD*q*, ſeu SE*q* − LS*q* + 2SLD − LD*q*, id eſt, 2SLD − LD*q* − ALB. Nam LS*q* − SE*q*, ſeu LS*q* − SA*q* (per Prop. VI. Lib. 2. Elem.) æquatur rectangulo ALB. Scribatur itaque 2SLD − LD*q* − ALB pro DE*q*; & quantitas $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$, quæ ſecundùm Corollarium quartum Propoſitionis præcedentis eſt ut longitudo ordinatim applicatæ DN, reſolvet ſeſe in tres partes $\frac{2SLD \times PS}{PE \times V} - \frac{LDq \times PS}{PE \times V} - \frac{ALB \times PS}{PE \times V}$: ubi ſi pro V ſcribatur ratio inverſa vis centripetæ, & pro PE medium proportionale



tionale

tionale inter PS & 2LD; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, quarum areæ per methodos vulgatas innotescunt. Q. E. F.

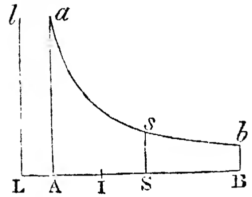
Exempl. 1. Si vis centripeta ad singulas sphæræ particulas tendens sit reciprocè ut distantia; pro V scribe distantiam PE; dein $2PS \times LD$ pro PEq, & fiet DN ut $SL - \frac{1}{2}LD - \frac{ALB}{2LD}$. Pone DN æqualem ejus duplo $2SL - LD - \frac{ALB}{LD}$: & ordinatæ pars data 2SL ducta in longitudinem AB describet aream rectangulam $2SL \times AB$; & pars indefinita LD ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, eâ lege, ut inter movendum crescendo vel decrescendo æquetur semper longitudini LD, describet aream $\frac{LBq - LAq}{2}$, id est, aream $SL \times AB$; quæ subducta de areâ priore $2SL \times AB$ relinquit aream $SL \times AB$. Pars autem tertia $\frac{ALB}{LD}$, ducta itidem per motum localem normaliter in eandem longitudinem, describet aream hyperbolicam; quæ subducta de area $SL \times AB$ relinquet aream quæsitam ANB. Unde talis emergit Problematis constructio. Ad puncta L, A, B erige perpendicula Ll, Aa, Bb, quorum Aa ipsi LB, & Bb ipsi LA æquetur. Asymptotis Ll, LB, per puncta a, b describatur hyperbola ab. Et acta chorda ba claudet aream aba areæ quæsitæ ANB æqualem.



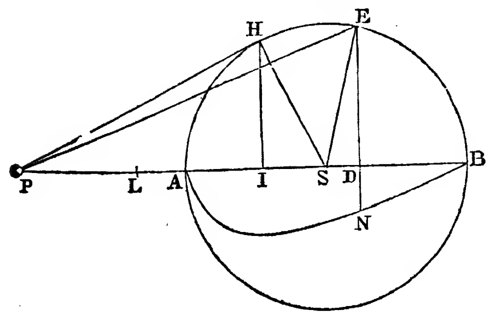
Exempl. 2. Si vis centripeta ad singulas sphæræ particulas tendens sit reciprocè ut cubus distantiæ, vel (quod perinde est) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum; scribe $\frac{PE\ cub.}{2ASq}$ pro V, dein $2PS \times LD$ pro PEq; & fiet DN ut $\frac{SL \times ASq}{PS \times LD} - \frac{ASq}{2PS} - \frac{ALB \times ASq}{2PS \times LDq}$, id

(e) Nimirum $AS^2 = SH^2 = PS \times SI$. Et $PS \times SI = LS^2 - LI^2$; nempe cùm recta PI in puncto L media sit divisa. Hinc $LI^2 = LS^2 - SA^2 = ALB$. Quare $LI = \sqrt{ALB}$. Sed $2SI = 2LS - 2LI = LB + AL - 2\sqrt{ALB}$. Quare $\sqrt{2.SI} = \sqrt{LB} - \sqrt{AL}$. Et $\frac{1}{\sqrt{2SI}} \times \frac{\sqrt{LB} - \sqrt{LA}}{\sqrt{ALB}} \left(= \frac{1}{\sqrt{2.SI}} \times \overline{\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{ALB}} = \frac{1}{LI}$. Hinc areas primam secundamque illis, $\frac{2SIq \times SL}{LI}$, SIq, singulatim æquari satis patet. Tertiæ reductio hujuscemodi erit. $\frac{SI^2 \times ALB}{3\sqrt{2.SI}} \times \overline{\frac{1}{LA^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{LB^{\frac{3}{2}}}} = \frac{SI^2 \times ALB}{3.\overline{LB^{\frac{1}{2}} - LA^{\frac{1}{2}}}} \times \frac{\overline{LB^{\frac{3}{2}} - LA^{\frac{3}{2}}}}{ALB^{\frac{3}{2}}} =$ SI²

id est, (ob continuè proportionales PS, AS, SI) ut $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2}SI - \frac{ALB \times SI}{2LDq}$. Si ducantur hujus partes tres in longitudinem AB, prima $\frac{LSI}{LD}$ generabit aream hyperbolicam; secunda $\frac{1}{2}SI$, aream $\frac{1}{2}AB \times SI$; tertia $\frac{ALB \times SI}{2LDq}$, aream $\frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB}$, id est $\frac{1}{2}AB \times SI$. De primâ subducatur summa secundæ & tertiæ, & manebit area quæsita ANB. Unde talis emergit Problematis constructio. Ad puncta L, A, S, B, erige perpendicula Ll, Aa, Ss, Bb, quorum Ss ipsi SI æquetur, perque punctum s, asymptotis Ll, LB, describatur hyperbola asb, occurrens perpendiculis Aa, Bb in a & b; & rectangulum 2ASI subductum de area hyperbolica $AasbB$ relinquet aream quæsitam ANB.



Exempl. 3. Si vis centripeta, ad singulas sphæræ particulas tendens, decrescit in quadruplicatâ ratione distantiæ à particulis; scribe $\frac{PEqq}{2AS\ cub.}$ pro V, dein $\sqrt{2PS \times LD}$ pro PE, & fiet DN ut $\frac{SIq \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDc}} - \frac{SIq}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD}} - \frac{SIq \times ALB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDqc}}$. Cujus tres partes ductæ in longitudinem AB producunt areas totidem, *viz.* $\frac{2SIq \times SL}{\sqrt{2SI}}$ in $\overline{\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}}$; $\frac{SIq}{\sqrt{2SI}}$ in $\overline{\sqrt{LB} - \sqrt{LA}}$; & $\frac{SIq \times ALB}{3\sqrt{2SI}}$ in $\overline{\frac{1}{\sqrt{LA\ cub.}} - \frac{1}{\sqrt{LB\ cub.}}}$. Et hæ post debitam reductionem fiunt $\frac{2SIq \times SL}{LI}$, SIq, & $SIq + \frac{2SI\ cub.}{3LI}$ (e). Hæ verò, subductis posterioribus de priore, evadunt $\frac{4SI\ cub.}{3LI}$. Proinde vis tota,



$\frac{SI^2}{3.\overline{LB^{\frac{1}{2}} - LA^{\frac{1}{2}}}} \times \frac{LB^{\frac{3}{2}} - LA^{\frac{3}{2}}}{\overline{ALB}|^{\frac{1}{2}}} = \frac{SI^2}{3.LI} \times \frac{LB^{\frac{3}{2}} - LA^{\frac{3}{2}}}{LB^{\frac{1}{2}} - LA^{\frac{1}{2}}} = \frac{SI^2}{3LI} \times LB + LB^{\frac{1}{2}} \times LA^{\frac{1}{2}} + LA = \frac{SI^2}{3LI} \times \overline{LB + LI + LA}$. Jam verò $LB + LA = 2LS = 2SI + 2LI$. Quare $\frac{SI^2}{3LI} \times LB + LI + LA = \frac{SI^2}{3LI} \times \overline{2SI + 3LI}$. Quare $\frac{SI^2 \times ALB}{3\sqrt{2.SI}} \times \overline{\frac{1}{LA^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{LB^{\frac{3}{2}}}} = \frac{SI^2}{3LI} \times \overline{2SI + 3LI} = SI^2 + \frac{2SI^3}{LI}$. Q. E. D. (*Le Sœur & Jacquier ad locum.*)

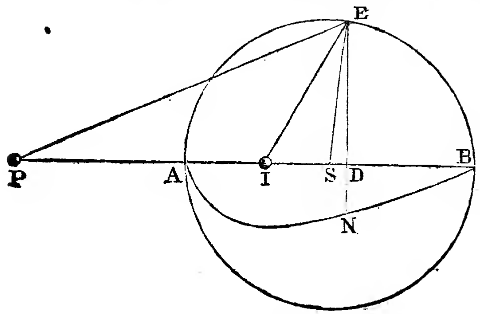
tota, quâ corpuſculum P in ſphæræ centrum trahitur, eſt ut $\frac{SI\ cub.}{PI}$, id eſt, reciprocè ut PS *cub.* × PI. Q. E. I.

Eâdem methodo determinari poteſt attractio corpuſculi ſiti intra ſphæram; ſed expeditiùs per Theorema ſequens.

PROP. LXXXII. THEOR. XLI.

In ſphærâ centro S *intervallo* SA *deſcriptâ, ſi capiantur* SI, SA, SP *continuè proportionales: dico quòd corpuſculi intra ſphæram, in loco quovis* I, *attractio eſt ad attractionem ipſius extra ſphæram, in loco* P, *in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione diſtantiarum à centro* IS, PS, *& ſubduplicatâ ratione virium centripetarum, in locis illis* P *&* I, *ad centrum tendentium.*

Ut, ſi vires centripetæ particularum ſphæræ ſint reciprocè ut diſtantiæ corpuſculi à ſe attracti; vis, quâ corpuſculum ſitum in I trahitur à ſphærâ totâ, erit ad vim, quâ trahitur in P, in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione diſtantiæ SI ad diſtantiam SP, & ratione ſubduplicatâ vis centripetæ in loco I, à particulâ aliquâ in centro oriundæ, ad vim centripetam in loco P ab eâdem in centro particulâ oriundam, id eſt, ratione ſubduplicatâ diſtantiarum SI, SP ad invicem reciprocè. Hæ duæ rationes ſubduplicatæ componunt rationem æqualitatis, & propterea attractiones in I & P à ſphærâ totâ factæ æquantur. Simili computo, ſi vires particularum ſphæræ ſint reciprocè in duplicatâ ratione diſtantiarum,



colligetur quod attractio in I ſit ad attractionem in P, ut diſtantia SP ad ſphæræ ſemidiametrum SA: ſi vires illæ ſunt reciprocè in triplicatâ ratione diſtantiarum, attractiones in I & P erunt ad invicem ut SP *quad.* ad SA *quad.* ſi in quadruplicatâ, ut SP *cub.* ad SA *cub.* Unde cùm attractio in P, in hoc ultimo caſu, inventa fuit reciprocè ut PS *cub.* × PI, attractio in I erit reciprocè ut SA *cub.* × PI, id eſt (ob datum SA *cub.*) reciprocè ut PI. Et ſimilis eſt progreſſus in infinitum. Theorema verò ſic demonſtratur.

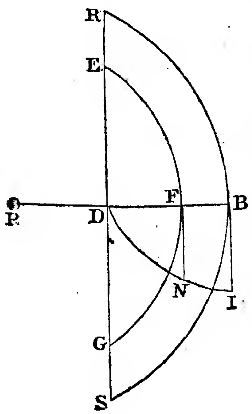
Stantibus

Stantibus jam antè conſtructis, & exiſtente corpuſculo in loco quovis P, ordinatim applicata DN inventa fuit ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$. Ergo ſi agatur IE, ordinata illa, pro alio quovis corpuſculi loco I, mutatis mutandis, evadet ut $\frac{DEq \times IS}{IE \times V}$. Pone vires centripetas, è ſphæræ puncto quovis E manantes, eſſe ad invicem in diſtantiis IE, PE, ut PE^n ad IE^n (ubi numerus *n* deſignet indicem poteſtatum PE & IE) & ordinatæ illæ fient ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times PE^n}$ & $\frac{DEq \times IS}{IE \times IE^n}$; quarum ratio ad invicem eſt ut $PS \times IE \times IE^n$ ad $IS \times PE \times PE^n$. Quoniam ob continuè proportionales SI, SE, SP, ſimilia ſunt triangula SPE, SEI, & inde fit IE ad PE ut IS ad SE vel SA; pro ratione IE ad PE ſcribe rationem IS ad SA; & ordinatarum ratio evadet $PS \times IE^n$ ad $SA \times PE^n$. Sed PS ad SA ſubduplicata eſt ratio diſtantiarum PS, SI; & IE^n ad PE^n (ob proportionales IE ad PE ut IS ad SA) ſubduplicata eſt ratio virium in diſtantiis PS, IS. Ergo ordinatæ, & propterea areæ, quas ordinatæ deſcribunt, hiſque proportionales attractiones, ſunt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatis illis rationibus. Q. E. D.

PROP. LXXXIII. PROB. XLII.

Invenire vim quâ corpuſculum in centro ſphæræ locatum ad ejus ſegmentum quodcunque attrahitur.

Sit P corpus in centro ſphæræ, & RBSD ſegmentum ejus plano RDS & ſuperficie ſphæricâ RBS contentum. Superficie ſphæricâ



EFG centro P deſcriptâ ſecetur DB in F, ac diſtinguatur ſegmentum in partes BREFGS, FEDG. Sit autem ſuperficies illa non purè mathematica, ſed phyſica, profunditatem habens quàm minimam. Nominetur iſta profunditas O, & erit hæc ſuperficies (per demonſtrata *Archimedis*) ut PF × DF × O. Ponamus præterea vires attractivas particularum ſphæræ eſſe reciprocè ut diſtantiarum dignitas illa, cujus index eſt *n*; & vis, quâ ſuperficies EFG trahit corpus P, erit (per Prop. LXXIX.) ut $\frac{DEq \times O}{PF^n}$, id eſt, ut $\frac{2DF \times O}{PF^{n-1}} - \frac{DFq \times O}{PF^n}$ (g). Huic propor-

(g) Nimirum pro DE^q ſcribendo $2DF \times PF - DF^q$.

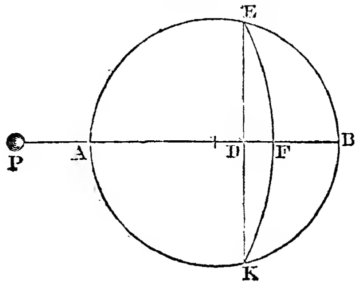
tionale

tionale ſit perpendiculum FN ductum in O; & area curvilinea BDI, quam ordinatim applicata FN, in longitudinem DB per motum continuum ducta, deſcribit, erit ut vis tota quâ ſegmentum totum RBSD trahit corpus P. Q. E. I.

PROP. LXXXIV. PROB. XLIII.

Invenire vim, quâ corpuſculum, extra centrum ſphæræ in axe ſegmenti cujuſvis locatum, attrahitur ab eodem ſegmento.

A ſegmento EBK trahatur corpus P in ejus axe ADB locatum. Centro P intervallo PE deſcribatur ſuperficies ſphærica EFK, quâ diſtinguatur ſegmentum in partes duas EBKFE & EFKDE. Quæratur vis partis prioris per Prop. LXXXI. & vis partis poſterioris per Prop. LXXXIII; & ſumma virium erit vis ſegmenti totius EBKDE. Q. E. I.



Scholium.

Explicatis attractionibus corporum ſphæricorum, jam pergere liceret ad leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis ſimiliter conſtantium corporum; ſed iſta particulatim tractare minus ad inſtitutum ſpectat. Suffecerit Propoſitiones quaſdam generaliores de viribus hujuſmodi corporum, deque motibus inde oriundis, ob earum in rebus philoſophicis aliqualem uſum, ſubjungere.

SECTIO XIII.

De corporum non ſphæricorum viribus attractivis.

PROP.

(a) Nam in Exemplo ſecundo, ſi corpus P tangat ſuperficiem ſphæricam in A, punctum L cum ipſo A congruet, rectaque Aa cum hyperbolæ aſymptotâ Ll. Unde vis, quâ corpus trahitur verſus centrum ſphæræ, cum ipſâ areâ hyperbolicâ, infinita evadet.

In

PROP. LXXXV. THEOR. XLII.

Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum eſt, attractio longè fortior ſit, quàm cùm vel minimo intervallo ſeparantur ab invicem: vires particularum trahentis, in receſſu corporis attracti, decreſcunt in ratione pluſquam duplicatâ diſtantiarum à particulis.

Nam ſi vires decreſcunt in ratione duplicatâ diſtantiarum à particulis; attractio verſus corpus ſphæricum, propterea quòd (per Prop. LXXIV.) ſit reciprocè ut quadratum diſtantiæ attracti corporis à centro ſphæræ, haud ſenſibiliter augebitur ex contactu; atque adhuc minùs augebitur ex contactu, ſi attractio in receſſu corporis attracti decreſcat in ratione minore. Patet igitur Propoſitio de ſphæris attractivis. Et par eſt ratio orbium ſphæricorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res conſtat in orbibus corpora interiùs conſtituta trahentibus, cùm attractiones paſſim per orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per Prop. LXX.) tollantur, ideoque vel in ipſo contactu nullæ ſunt. Quòd ſi ſphæris hiſce orbibuſque ſphæricis partes quælibet à loco contactûs remotæ auferantur, & partes novæ ubivis addantur: mutari poſſunt figuræ horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additæ vel ſubductæ, cùm ſint à loco contactûs remotæ, augebunt notabiliter attractionis exceſſum, qui ex contactu oritur. Conſtat igitur Propoſitio de corporibus figurarum omnium. Q. E. D.

PROP. LXXXVI. THEOR. XLIII.

Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in receſſu corporis attracti decreſcunt in triplicatâ, vel pluſquam triplicatâ ratione diſtantiarum à particulis: attractio longè fortior erit in contactu, quàm cùm attrahens & attractum intervallo vel minimo ſeparantur ab invicem.

Nam attractionem, in acceſſu attracti corpuſculi ad hujuſmodi ſphæram trahentem, augeri in infinitum, conſtat per ſolutionem Problematis XLI. in exemplo ſecundo ac tertio exhibitam (a). Idem,

In Exemplo autem tertio, ſi corpus ſuperficiem ſphæricam itidem in A tangat, fiet PS = AS, rectaque PI in nihilum abierit, puncto utique I æquè ac P cum ipſo A congruente. Hinc quantitas PS cub. × PI in nihilum planè abierit; vires autem, quæ contrariam quantitatis hujus inter ſe rationem gerunt, infinitæ fient.

per

per Exempla illa & Theorema XLI. inter ſe collata, facilè colligitur de attractionibus corporum verſus orbes concavo-convexos, ſive corpora attracta collocentur extra orbes, ſive intra in eorum cavitatibus. Sed & addendo vel auferendo his ſphæris & orbibus ubivis, extra locum contactûs, materiam quamlibet attractivam, eò ut corpora attractiva induant figuram quamvis aſſignatam, conſtabit Propoſitio de corporibus univerſis. Q. E. D.

PROP. LXXXVII. THEOR. XLIV.

Si corpora duo ſibi invicem ſimilia, & ex materiâ æqualiter attractivâ conſtantia, ſeorſim attrahant corpuſcula ſibi ipſis proportionalia & ad ſe ſimiliter poſita: attractiones acceleratrices corpuſculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpuſculorum in eorum particulas totis proportionales, & in totis ſimiliter poſitas.

Nam ſi corpora diſtinguantur in particulas, quæ ſint totis proportionales, & in totis ſimiliter ſitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correſpondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas ſingulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas ſingulas correſpondentes; & componendo, ita attractio in totum primum corpus ad attractionem in totum ſecundum. Q. E. D.

Corol. 1. Ergo ſi vires attractivæ particularum, augendo diſtantias corpuſculorum attractorum, decreſcant in ratione dignitatis cujuſvis diſtantiarum; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directè, & diſtantiarum dignitates illæ inverſè. Ut ſi vires particularum decreſcant in ratione duplicatâ diſtantiarum à corpuſculis attractis, corpora autem ſint ut A *cub.* & B *cub.* ideoque tum corporum latera cubica, tum corpuſculorum attractorum diſtantiæ à corporibus, ut A & B: attractiones acceleratrices in corpora erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ quad.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ quad.}$, id eſt, ut corporum latera illa cubica A & B. Si vires particularum decreſcant in ratione triplicatâ diſtantiarum à corpuſculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ cub.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ cub.}$, id eſt, æquales. Si vires decreſcant in ratione quadruplicatâ; attractiones in corpora

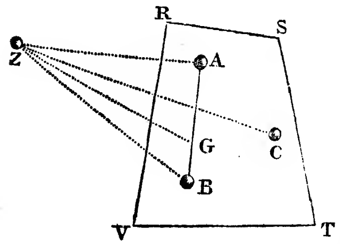
pora erunt ut $\frac{A\ cub.}{Aqq}$ & $\frac{B\ cub.}{Bqq}$, id eſt, reciprocè ut latera cubica A & B. Et ſic in cæteris.

Corol. 2. Unde viciſſim, ex viribus, quibus corpora ſimilia trahunt corpuſcula ad ſe ſimiliter poſita, colligi poteſt ratio decrementi virium particularum attractivarum in receſſu corpuſculi attracti; ſi modò decrementum illud ſit directè vel inverſè in ratione aliquâ diſtantiarum.

PROP. LXXXVIII. THEOR. XLV.

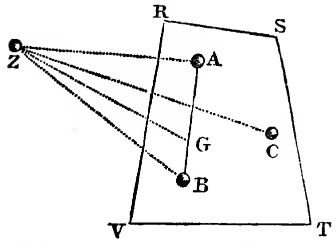
Si particularum æqualium corporis cujuſcunque vires attractivæ ſint ut diſtantiæ locorum à particulis: vis corporis totius tendet ad ipſius centrum gravitatis; & eadem erit cum vi globi ex materiâ conſimili & æquali conſtantis, & centrum habentis in ejus centro gravitatis.

Corporis RSTV particulæ A, B trahant corpuſculum aliquod Z viribus, quæ, ſi particulæ æquantur inter ſe, ſint ut diſtantiæ AZ, BZ; ſin particulæ ſtatuantur inæquales, ſint ut hæ particulæ & ipſarum diſtantiæ AZ, BZ conjunctim, ſive (ſi ita loquar) ut hæ particulæ in diſtantias ſuas AZ, BZ reſpectivè ductæ. Et exponantur hæ vires per contenta illa $A \times AZ$ & $B \times BZ$. Jungatur AB, & ſecetur ea in G, ut ſit AG ad BG ut particula B ad particulam A; & erit G commune centrum gravitatis particularum A & B. Vis $A \times AZ$ (per legum Corol. 2.) reſolvitur in vires $A \times GZ$ & $A \times AG$; & vis $B \times BZ$ in vires $B \times GZ$ & $B \times BG$. Vires autem $A \times AG$ & $B \times BG$, ob proportionales A ad B & BG ad AG, æquantur; ideoque cùm dirigantur in partes contrarias, ſe mutuò deſtruunt. Reſtant vires $A \times GZ$ & $B \times GZ$. Tendunt hæ ab Z verſus centrum G, & vim $\overline{A+B} \times GZ$ componunt; hoc eſt, vim eandem ac ſi particulæ attractivæ A & B conſiſterent in eorum communi gravitatis centro G, globum ibi componentes.



Eodem argumento, ſi adjungatur particula tertia C, & componatur

ponatur hujus vis cum vi $\overline{A+B}\times GZ$ tendente ad centrum G; vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis globi illius in G, & particulæ C; hoc eſt, ad commune centrum gravitatis trium particularum A, B, C; & eadem erit, ac ſi globus & particula C conſiſterent in centro illo communi, globum majorem ibi componentes.



Et ſic pergitur in infinitum. Eadem eſt igitur vis tota particularum omnium corporis cujuſcunque RSTV, ac ſi corpus illud, ſervato gravitatis centro, figuram globi indueret. Q. E. D.

Corol. Hinc motus corporis attracti Z idem erit, ac ſi corpus attrahens RSTV eſſet ſphæricum: & propterea ſi corpus illud attrahens vel quieſcat, vel progrediatur uniformiter in directum; corpus attractum movebitur in Ellipſi centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

PROP. LXXXIX. THEOR. XLVI.

Si corpora ſint plura ex particulis æqualibus conſtantia, quarum vires ſunt ut diſtantiæ locorum à ſingulis: vis ex omnium viribus compoſita, quâ corpuſculum quodcunque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis; & eadem erit, ac ſi trahentia illa, ſervato gravitatis centro communi, coirent & in globum formarentur.

Demonſtratur eodem modo, atque Propoſitio ſuperior.

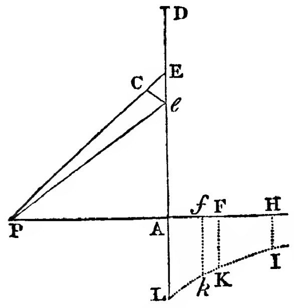
Corol. Ergo motus corporis attracti idem erit, ac ſi corpora trahentia, ſervato communi gravitatis centro, coirent & in globum formarentur. Ideoque ſi corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quieſcit, vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; corpus attractum movebitur in Ellipſi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

PROP.

PROP. XC. PROB. XLIV.

Si ad ſingula circuli cujuſcunque puncta tendant vires æquales centripetæ, creſcentes vel decreſcentes in quâcunque diſtantiarum ratione: invenire vim, quâ corpuſculum attrahitur ubivis poſitum in rectâ, quæ plano circuli ad centrum ejus perpendiculariter inſiſtit.

Centro A, intervallo quovis AD, in plano, cui recta AP perpendicularis eſt, deſcribi intelligatur Circulus; & invenienda ſit vis, quâ corpuſculum quodvis, P, in eundem attrahitur. A circuli puncto quovis, E ad corpuſculum attractum P agatur recta PE. In rectâ PA capiatur PF ipſi PE æqualis, & erigatur normalis FK, quæ ſit ut vis quâ punctum E trahit corpuſculum P. Sitque IKL curva linea, quam punctum K perpetuò tangit. Occurrat eadem circuli plano in L. In PA capiatur PH æqualis PD, & erigatur perpendiculum HI Curvæ prædictæ occurrens in I; & erit corpuſculi P attractio in Circulum ut area AHIL ducta in altitudinem AP. Q. E. I.



Etenim in AE capiatur linea quàm minima Ee. Jungatur Pe, & in PE, PA capiantur PC, Pf ipſi Pe æquales. Et quoniam vis, quâ annuli, centro A intervallo AE in plano prædicto deſcripti, punctum quodvis E trahit ad ſe corpus P, ponitur eſſe ut FK; & inde vis, quâ punctum illud trahit corpus P verſus A, eſt ut $\frac{AP\times FK}{PE}$, & vis, quâ annulus totus trahit corpus P verſus A, ut annulus & $\frac{AP\times FK}{PE}$ conjunctim; annulus autem iſte eſt ut rectangulum ſub radio AE & latitudine Ee, & hoc rectangulum (ob proportionales PE & AE, Ee & CE) æquatur rectangulo $PE\times CE$ ſeu $PE\times Ff$; erit vis, quâ annulus iſte trahit corpus P verſus A, ut $PE\times Ff$ & $\frac{AP\times FK}{PE}$ conjunctim; id eſt, ut contentum $Ff\times FK\times AP$, ſive ut area $FKkf$ ducta in AP. Et propterea ſumma virium, quibus annuli omnes in circulo, qui centro A & intervallo AD deſcribitur,

scribitur, trahunt corpus P versus A, est ut area tota AHIKL ducta in AP. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si vires punctorum decrescunt in duplicatâ distantiarum ratione, hoc est, si sit FK ut $\frac{1}{\text{PF quad.}}$, atque ideo area AHIKL ut $\frac{1}{\text{PA}} - \frac{1}{\text{PH}}$; erit attractio corpusculi P in circulum ut $1 - \frac{\text{PA}}{\text{PH}}$, id est ([b]), ut $\frac{\text{AH}}{\text{PH}}$.

Corol. 2. Et universaliter, si vires punctorum ad distantias D sint reciprocè ut distantiarum dignitas quælibet D^n, hoc est, si sit FK ut $\frac{1}{\text{D}^n}$, ideoque area AHIKL ut $\frac{1}{\text{PA}^{n-1}} - \frac{1}{\text{PH}^{n-1}}$; erit attractio corpusculi P in circulum ut $\frac{1}{\text{PA}^{n-2}} - \frac{\text{PA}}{\text{PH}^{n-1}}$.

Corol. 3. Et si diameter circuli augeatur in infinitum, & numerus n sit unitate major; attractio corpusculi P in planum totum infinitum erit reciprocè ut PA^{n-2}, propterea quòd terminus alter $\frac{\text{PA}}{\text{PH}^{n-1}}$ evanescet ([c]).

PROP. XCI. PROB. XLV.

Invenire attractionem corpusculi siti in axe Solidi Rotundi, ad cujus puncta singula tendunt vires æquales centripetæ in quâcunque distantiarum ratione decrescentes.

In Solidum DECG trahatur corpusculum P, situm in ejus axe AB. Circulo quolibet RFS, ad hunc axem perpendiculari, secetur hoc solidum, & in ejus semidiametro FS, in plano aliquo PALKB per axem transeunte, capiatur (per Prop. xc.) longitudo FK vi, quâ

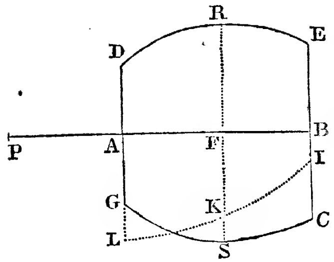
([b]) Ut $\frac{\text{PH}-\text{PA}}{\text{PH}} = \frac{\text{AH}}{\text{PH}}$.

([c]) Rectâ utique PH cum illâ AD infinitè auctâ.

([d]) CURVÆ LKI QUADRATURA.

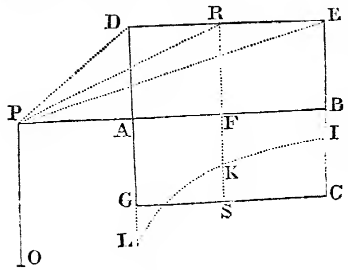
Pro 1 scribatur litera b. Hoc est, designet litera b datam illam rectam cujus longitudinem, in Arithmeticâ quantitatum æstimatione, pro unitate haberi velis.

Datam rectam AD designet litera a; indefinitam PF, litera x. Ita, propter angulum ad F rectum, PR his notis designanda erit; $\sqrt{x^2+a^2}$. Ordinataque FK, cùm per Cor. 1. Prop. xc. æquanda sit quantitati $1-\frac{\text{PF}}{\text{PR}}$, idcirco hæc erit $b-\frac{bx}{\sqrt{x^2+a^2}}$. Hinc fluxio areæ curvi linearis LKI, quæ ab asymptotâ PO, à puncto P cum axe PB ad perpendiculum eductâ, initium sumit, quæque ad ordinatam FK terminata est, hujus inquam fluxio, sive $\text{FK}\times\dot{x} = b\dot{x}-\frac{bx\dot{x}}{\sqrt{x^2+a^2}}$. Quare area ipsa $\boxed{\text{FK}\times\dot{x}}$ spatio $bx-b\sqrt{x^2+a^2}$, quod fluens est fluxionis $b\dot{x}-\frac{bx\dot{x}}{\sqrt{x^2+a^2}}$, vel æqualis erit, vel illo major minorve dato



quâ corpusculum P in circulum illum attrahitur, proportionalis. Tangat autem punctum K curvam lineam LKI, planis extimorum circulorum, AL & BI, occurrentem in L & I; & erit attractio corpusculi P in Solidum ut area LABI. Q. E. I.

Corol. 1. Unde si Solidum Cylindrus sit, parallelogrammo ADEB circa axem AB revoluto descriptus, & vires centripetæ, in singula ejus puncta tendentes, sint reciprocè ut quadrata distantiarum à punctis: erit attractio corpusculi P in hunc cylindrum ut AB−PE+PD. Nam ordinatim applicata FK (per Corol. 1. Prop. xc.) erit ut $1-\frac{\text{PF}}{\text{PR}}$. Hujus pars 1 ducta in longitudinem AB, describit aream $1\times\text{AB}$: & pars altera $\frac{\text{PF}}{\text{PR}}$ ducta in longitudinem PB, describit aream 1 in $\overline{\text{PE}-\text{AD}}$ (id quod ex Curvæ LKI quadraturâ facilè ostendi potest); & similiter pars eadem ducta in longitudinem PA describit aream 1 in $\overline{\text{PD}-\text{AD}}$, ductaque in ipsarum PB, PA differentiam, AB, describit arearum differentiam, 1 in $\overline{\text{PE}-\text{PD}}$ ([d]). De contento primo, $1\times\text{AB}$, auferatur contentum postremum, 1 in $\overline{\text{PE}-\text{PD}}$, & restabit area LABI æqualis 1 in



AB−

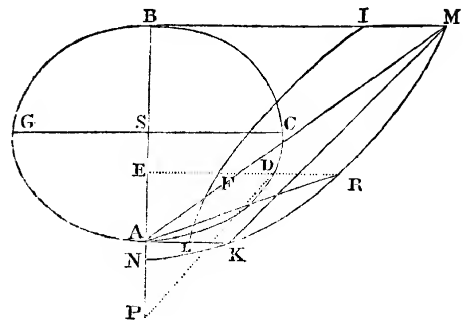
dato (Geometr. Flux. Th. iv.) Vel, quod eodem redit, spatium $\boxed{\text{FK}\times\dot{x}} + b\sqrt{x^2+a^2}$ rectangulo bx vel æquale erit, vel illo majus minusve dato. Evanescendo fluat recta PF, ut congruente tandem puncto F cum ipso P, recta PF seu x ad nihilum planè redigatur. Quo facto, pro spatio omni $\boxed{\text{FK}\times\dot{x}} + b\sqrt{x^2+a^2}$ manebit quidem rectangulum ba datum. Quando igitur ordinata mobilis FK cum ipsâ PO congruat, spatium $\boxed{\text{FK}\times\dot{x}} + b\sqrt{x^2+a^2}$ rectangulum bx dato ba exsuperabit. Quoniam rectangulum bx in nihilum abierit. Quare et in omni situ ordinatæ FK spatium illud hoc rectangulum eodem dato exsuperabit. Quare $\boxed{\text{FK}\times\dot{x}} + b\sqrt{x^2+a^2} - ba = bx$. Unde $\boxed{\text{FK}\times\dot{x}} = b\times\overline{x-\sqrt{x^2+a^2}+a}$. Atque hæc erit dimensio areæ, quæ Curvâ LKI, Asymptotâ PO, Ordinatâ FK, Abscissâque PF interclusa est, quæcunque fuerit abscissæ illius PF, seu x, longitudo. Ponatur igitur x æqualis primùm rectæ toti PB, tum datæ ejus parti PA; arearumque OPBI, OPAL à formulâ generali hæ venient æstimationes.

$$\text{OPBI} = b\times\overline{\text{PB}-\text{PE}+\text{AD}}$$

$$\text{OPAL} = b\times\overline{\text{PA}-\text{PD}+\text{AD}}.$$

Quare $\text{LABI} = \text{OPBI}-\text{OPAL} = b\times\overline{\text{AB}-\text{PE}+\text{PD}}$. Q. E. D.

$\overline{AB - PE + PD}$. Ergo vis, huic areæ proportionalis, eſt ut $AB - PE + PD$.



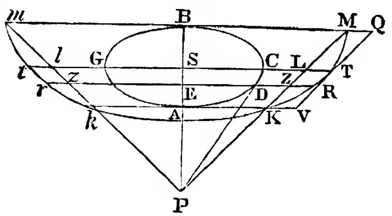
Corol. 2. Hinc etiam vis innoteſcit, quâ Sphærois AGBC attrahit corpus quodvis P, exteriùs in axe ſuo AB ſitum. Sit NKRM ſectio conica, cujus ordinatim applicata ER, ipſi PE perpendicularis, æquetur ſemper longitudini PD, quæ ducitur ad punctum illud D, in quo applicata iſta ſphæroidem ſecat (e). A ſphæroidis verticibus A, B ad ejus axem

axem AB erigantur perpendicula AK, BM, ipſis AP, BP æqualia reſpectivè, & propterea ſectioni conicæ occurrentia in K & M; & jungatur KM auferens ab eâdem ſegmentum KMRK. Sit autem ſphæroidis centrum S, & ſemidiameter maxima SC: & vis, quâ Sphærois trahit corpus P, erit ad vim, quâ ſphæra diametro AB deſcripta trahit idem corpus, ut $\frac{AS \times CSq - PS \times KMRK}{PSq + CSq - ASq}$ ad $\frac{AS\ cub.}{3PS\ quad.}$ (f). Et eodem computandi fundamento invenire licet vires ſegmentorum ſphæroidis.

Corol. 3. Quod ſi corpuſculum intra ſphæroidem in axe collocetur; attractio erit ut ipſius diſtantia à centro. Id quod faciliùs hoc argumento colligitur, ſive particula in axe ſit, ſive in aliâ quâvis diametro datâ. Sit AGOF *(vide fig. p. 250)* ſphærois attrahens, S centrum ejus, & P corpus attractum. Per corpus illud P agantur tum ſemidiameter SPA, tum rectæ duæ quævis DE, FG ſphæroidi hinc inde

(e) L O C U S S O L I D U S.

Sectione conicâ ACB, *cujus centrum* S, *axes* AB, CG, *poſitione datâ, ſi in recta* ED *ordinatim ad axem alterutrum eductâ capiatur* ER, *quæ æqualis ſit rectæ* PD, *quæ terminum ordinatæ cum puncto* P, *in axe* BA *dato, jungat; punctum* R *erit ad aliam aliquam ſectionem conicam poſitione datam.*



Per puncta A, B, quæ vertices utique ſunt axis AB, ducantur AK, BM, cum ordinatis ED parallelæ. Capiantur hinc inde AK, Ak, inter ſe rectæque PA æquales. Junctæ PK, Pk rectæ BM in punctis M, *m*, rectæ verò ER in punctis Z, z occurrant. Ita erunt rectæ BM, B*m*, inter ſe rectæque BP, rectæ EZ, Ez, inter ſe rectæque FE æquales. Per R ducatur recta RQ, cum rectâ PM parallela; quæ illis BM, AK in punctis Q, V, occurrat. Propter ER, PD inter ſe æquales, quadratum ex ER æquale erit duobus quadratis ex PE, ED ſimul ſumptis; hoc eſt, propter PE, EZ inter ſe æquales, duobus quadratis, ex EZ, ED ſimul ſumptis. Cùm verò recta zZ media ſit diviſa in puncto F, quadratum ex ER æquale eſt quadrato ex EZ cum rectangulo zR × RZ. (Elem. II. 6.) Quadratum igitur ex EZ cum rectangulo zR × RZ, quadratis ex EZ, ED ſimul ſumptis æquale eſt. Quadratoque ex EZ communiter dempto, manebit rectangulum zR × RZ quadrato ex ED æquale. At verò quadratum ex ED ad rectangulum AE × EB, propter ſectionem conicam ACB poſitione datam, datam rationem habet. Quare et rectangulum zR × RZ ad rectangulum AE × EB rationem datam habet. Rectangulum autem AE × EB ad rectangulum KZ × ZM rationem habet datam; nimirum eam, quam quadratum ex datâ PA ad quadratum ex datâ PK; (El. VI. 20.) nempe cùm ſit tam AE ad KZ quàm EB ad ZM ut PA ad PK. Rectanguli igitur zR × RZ ad rectangulum KZ × ZM, ſive RV × RQ, ratio data eſt (8. dat) A puncto igitur R in rectas quatuor, KM, *km*, K*k*, M*m*, poſitione datas, deducuntur quatuor, RZ, Rz, RV, RQ, datis inclinationibus. Quodque deductarum duæ, RZ, Rz, rectangulum claudunt, ad rectangulum, alteris duabus deductarum concluſum, datam rationem habet. Erit igitur punctum R ad ſectionem conicam poſitione datam. Q. E. D.

C O M P O S I T I O L O C I S O L I D I.

Ductis per A, B, rectis AK, BM cum axe SC parallelis, fiant AK, A*k* rectæ PA ſingulatim æquales. Junctæ PK, P*k*, rectæ BM in punctis M, *m* occurrant. Jungatur PC, & in axe SC producto capiatur ST junctæ PC æqualis. Per puncta quinque, K, T, M, *m*, *k*, ſcribatur ſectio conica. Ea Locus erit punctorum R. Hoc eſt, ſi recta ED, quæ ad axem AB Curvæ ACB ordinatim eſt educta, ſectionæ conicæ KTM*mk* in puncto R occurrat, recta ER junctæ PD æqualis erit.

D E M O N S T R A T I O C O M P O S I T I O N I S.

Sectionis conicæ ACB axis GC rectis PM, P*m* in punctis L, *l* occurrat. Propter ſectionem conicam KTM*mk*, rectangulum RZ × Rz, erit ad RV × RQ, ſive ZK × ZM, ſicut TL × T*l* ad quadratum ex LM. (Hamilton. Conic. Lib. 1. Prop. LVI. Cor.) Rectangulum autem RZ × Rz ad rectangulum AE × EB rationem habet, quæ componitur è rationibus rectanguli RZ × Rz ad ZK × ZM, rectangulique ZK × ZM ad AE × EB; ſive è rationibus rectanguli TL × T*l* ad quadratum ex LM, quadratique ex LM ad quadratum ex SB. Ex eiſdem verò componitur ratio illa, quam TL × T*l* habet ad quadratum ex SB. Quare RZ × Rz erit ad AE × EB ut TL × T*l* ad quadratum ex SB. At verò rectangulum TL × T*l* quadrato ex SC æquale eſt. Nam, propter æquales ST, PC, quadratum ex ST duobus quadratis ex PS, SC ſimul ſumptis eſt æquale; ſive duobus ex SL, SC ſimul ſumptis. Et cùm recta L*l* media ſit diviſa in puncto S, quadratum ex ST, quadrato ex SL cum rectangulo TL × T*l* eſt æquale. (El. II. 6.) Quadratum igitur ex SL cum rectangulo TL × T*l* quadratis duobus ex SL, SC ſimul ſumptis eſt æquale. Quadratoque ex SL communiter ablato, manet rectangulum TL × T*l* quadrato ex SC æquale. Rectangulum igitur TL × T*l* quadratumque ex SC ad quadratum ex SB eandem utrumque rationem habent. Sed oſtenſum eſt rectangulum RZ × Rz ad AE × EB rationem habere eam, quam TL × T*l* ad quadratum ex SB. Erit igitur rectangulum RZ × Rz ad AE × EB ſicut quadratum ex SC ad quadratum ex SB; hoc eſt, (propter ſectionem conicam ACB) ſicut quadratum ex DE ad rectangulum AEB. Rectangulum igitur RZ × Rz et quadratum ex DE, cùm ad rectangulum AE × EB eandem rationem gerant, erunt inter ſe æqualia. (El. V. 9.) Quadratoque ex EZ communiter addito, rectangulum RZ × Rz cum quadrato ex EZ, hoc eſt quadratum ex ER, quadratis ex ED, EZ, ſimul ſumptis æquale erit. Quare cùm EZ, EP ſint inter ſe æquales, quadratum ex ER quadratis ex ED, EP ſimul ſumptis, hoc eſt quadrato ex PD, æquale erit. Quare recta ER æqualis erit rectæ PD. Q. E. D.

Hæc velim Lector conferas cùm iis, quibus alii oſtendere conati ſunt, quod à Newtono affirmatum eſt, lineam KRM, ſive locum puncti R, Curvam eſſe è conicis. Senties, ni fallor, quantum lucis, ſi Diis placeat, quantum compendii, cum calculis iſtis ſuis Algebra rationibus Geometricis attulerit.

(d) Capiatur enim EF quæ ſit ut vis, quâ circulus, cujus centrum E, radius ED, trahit corpuſculum in P poſitum. Sitque LFI Curva, quam punctum F perpetuò tangit, quæ planis AK, BM, ſphæroidem in verticibus axis ſui contingentibus, in punctis L, I occurrat. Erit igitur EF = I — FB

DE MOTU CORPORUM

inde occurrentes in D & E, F & G; ſintque PCM, HLN ſuperficies ſphæroidum duarum interiorum, exteriori ſimilium & concentricarum, quarum prior tranſeat per corpus P, & ſecet rectas DE & FG

$\frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{PD}}$, vel ſi b deſignet rectam illam quam pro unitate haberi velis, $\mathrm{EF} = b - \frac{b.\mathrm{PE}}{\mathrm{PD}}$.

Ponatur $\mathrm{AE} = x$. $\mathrm{AB} = 2b$. $a = \frac{\mathrm{CS}^2}{\mathrm{SA}}$. Ita erit $\mathrm{DE}^2 = 2ax - \frac{ax^2}{b}$.

Rurſum ponatur $\mathrm{PA} = c$. Erit $\mathrm{PE} = c + x$. Et $\mathrm{PE}^2 = c^2 + 2cx + x^2$.

Unde $\mathrm{PD}^2 = c^2 + \overline{2c + 2a}.x + \frac{b-a}{b}x^2$. Vel ſi pro $2c + 2a$ ſcribatur f, et g pro $\frac{b-a}{b}$, $\mathrm{PD}^2 = c^2 + fx + gx^2$.

Quare $\mathrm{EF} = b - \frac{b\mathrm{PE}}{\mathrm{PD}} = b - \frac{bc}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}} - \frac{bx}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}$.

Et fluxio areæ $\mathrm{LAEF} = \mathrm{EF} \times \dot{x} = b\dot{x} - \frac{bc\dot{x}}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}} - \frac{bx\dot{x}}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}$.

Unde area $\mathrm{LAEF} = bx - \boxed{\frac{bc\dot{x}}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}} + \frac{bx\dot{x}}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}}$.

Ordinatæ autem EF membra illa $\frac{bc}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}$, $\frac{bx}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}$, ſi ſcribas e pro c^2, d pro bc in primo, et d pro b in ſecundo, fiunt $\frac{d}{\sqrt{e+fx+gx^2}}$, $\frac{dx}{\sqrt{e+fx+gx^2}}$; ex quibus ſingulatim venient areæ $\frac{8dgs - 4dgxv - 2dfv}{4eg - f^2}$, $\frac{-4dfs + 2dfxv + 4dev}{4eg - f^2}$ (per TAB. IIm. Newtoni Claſſ. VIII. Form. 1 & 2.) literâ nimirum v ſectionis conicæ NKRM ordinatam ER deſignante; literâ verò s, ſectionis illius aream KAER. Quare harum arearum ſumma areæ $\boxed{\frac{bc\dot{x} + bx\dot{x}}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}}$ vel æqualis erit, vel eâ major minorve datâ. (Geometr. Flux. Th. IV.)

Cùm verò per literas x, s, v eædem quantitates in utroque ſymbolo ſignificentur, arearum ſummam ita facillimè collegeris, ſi membrorum homologorum coefficientes pro ſignis ſuis, +, −, algebraicè conſummaveris. Id quod fit operâ ſequente.

I. 1. $8dg = 8bc \times \frac{b-a}{b} = 8bc - 8ca$
2. $-4df = -4b \times \overline{2c + 2a} = -8bc - 8ba$
Summa $\left\{ -8a \times \overline{b + c} = -8a \times \mathrm{PS}. \right.$

II. 1. $-4dg = -4bc \times \frac{b-a}{b} = -4bc + 4ca$
2. $+2df = 2b \times \overline{2c + 2a} = +4bc + 4ba$
$\left\{ +4a \times \overline{b + c} = +4a \times \mathrm{PS}. \right.$

III. 1. $-2df = -2bc \times \overline{2c + 2a} = -4bc^2 - 4bac$
2. $+4de = 4b \times c^2 = +4bc^2$
$\left\{ -4bac \right.$

$4eg = 4c^2 \times \frac{b-a}{b} = \frac{4bc^2 - 4ac^2}{b}$

$f^2 = 4c^2 + 8ac + 4a^2$

$4eg - f^2 = \frac{4bc^2 - 4ac^2 - 4bc^2 - 8acb - 4a^2b}{b} = \frac{-4ac^2 - 8acb - 4a^2b}{b}$.

Hinc $\frac{8dgs - 4dfxv - 2dfv}{4eg - f^2} + \frac{-4dfs + 2dfxv + 4dev}{4eg - f^2} = \frac{-8a \times \mathrm{PS}.s + 4a \times \mathrm{PS}.xv - 4bacv}{-4ac^2 - 8acb - 4a^2b} \times b = \frac{2\mathrm{PS}.s - \mathrm{PS}.xv + bcv}{c^2 + 2cb + ab} \times b = \frac{2\mathrm{PS} \times \mathrm{KREA} - \mathrm{PS} \times \mathrm{AE} \times \mathrm{ER} + bc.\mathrm{ER}}{c^2 + 2cb + ab} \times b$.

Hinc

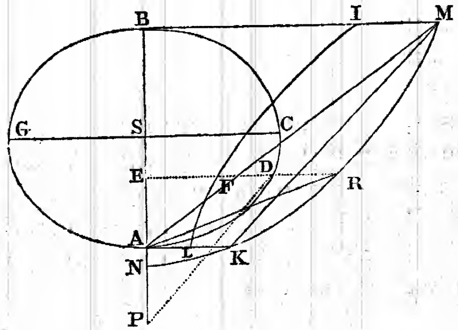
LIBER PRIMUS.

FG in B & C, poſterior ſecet eaſdem rectas in H, I & K, L. Habeant autem ſphæroides omnes axem communem, & erunt rectarum,

Hinc area $\boxed{\frac{bc\dot{x} + bx\dot{x}}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}}$ ſpatio $b \times \frac{2\mathrm{PS} \times \mathrm{KREA} - \overline{\mathrm{PS} \times \mathrm{AE} \times \mathrm{ER}} + bc \times \mathrm{ER}}{c^2 + 2cb + ab}$ vel æqualis erit, vel eo major minorve dato.

Fluendo decreſcat recta AE, donec puncto E in ipſum A tranſlato, recta AE, ſive x, in nihilum abeat. Area $\boxed{\frac{bc\dot{x} + bx\dot{x}}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}}$ ſimul in nihilum abierit. Et pro omni ſpatio $\frac{2\mathrm{PS} \times \mathrm{KREA} - \overline{\mathrm{PS} \times \mathrm{AE} \times \mathrm{ER}} + bc \times \mathrm{ER}}{c^2 + 2cb + ab} \times b$ manebit $\frac{bc \times \mathrm{AK}}{c^2 + 2cb + ab} \times b$. Quare hoc ſpatium areâ illâ dato $\frac{bc \times \mathrm{AK}}{c^2 + 2cb + ab} \times b$ majus erit.

Ergo $\boxed{\frac{bc\dot{x} + bx\dot{x}}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}} = \frac{2\mathrm{PS} \times \mathrm{KREA} - \overline{\mathrm{PS} \times \mathrm{AE} \times \mathrm{ER}} + bc \times \overline{\mathrm{ER} - \mathrm{AK}}}{c^2 + 2cb + ab} \times b$.



Jungatur AR. Rectangulum $\mathrm{AE} \times \mathrm{ER}$ trianguli AER duplum erit. Quare ſolidum $\mathrm{PS} \times \mathrm{AE} \times \mathrm{ER}$, ſolidi $2\mathrm{PS} \times$ triang. AER æquale erit. Unde $2\mathrm{PS} \times \mathrm{KREA} - \overline{\mathrm{PS} \times \mathrm{AE} \times \mathrm{ER}} = 2\mathrm{PS} \times \overline{\mathrm{KREA} - \text{triang. AER}}$. Sed KREA − triang. AER ſpatio conico triangulari RAK æquale eſt. Hinc $2\mathrm{PS} \times \mathrm{KREA} - \mathrm{PS} \times \mathrm{AE} \times \mathrm{ER} = 2\mathrm{PS} \times \mathrm{RAK}$. Unde efficitur $\boxed{\frac{bc\dot{x} + bx\dot{x}}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}} = \frac{2\mathrm{PS} \times \mathrm{RAK} + bc \times \overline{\mathrm{ER} - \mathrm{AK}}}{c^2 + 2cb + ab} \times b$. Unde $bx - \boxed{\frac{bc\dot{x} + bx\dot{x}}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}}$, ſive area LAEF, $= bx - \frac{2\mathrm{PS} \times \mathrm{KARK} + bc \times \overline{\mathrm{ER} - \mathrm{AK}}}{c^2 + 2cb + ab} \times b$. Unde rurſum, cùm recta x in ipſam AB, ſive $2b$, fluendo adoleverit, area tota $\mathrm{LABI} = 2b^2 - \frac{2\mathrm{PS} \times \mathrm{MAKRM} + bc \times \overline{\mathrm{BM} - \mathrm{AK}}}{c^2 + 2cb + ab} b$. Sed $\mathrm{BM} - \mathrm{AK} = \mathrm{PB} - \mathrm{PA} = \mathrm{AB}$. Quare $\mathrm{LABI} = 2b^2 - \frac{2\mathrm{PS} \times \mathrm{MAKRM} + bc.\mathrm{AB}}{c^2 + 2cb + ab} b = \frac{2c^2b^2 + 4cb^3 + 2ab^3 - 2b.\mathrm{PS} \times \mathrm{MAKRM} - 2cb^3}{c^2 + 2cb + ab}$.

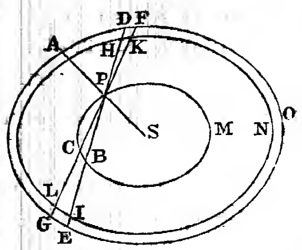
Quare propter datam $2b$, area LABI rectæ $\frac{c^2b + 2cb^2 + ab^2 - \mathrm{PS} \times \mathrm{MAKRM} - cb^2}{c^2 + 2cb + ab}$ rationem conſtanter ſervabit; ſive rectæ $\frac{c^2b + cb^2 + ab^2 - \mathrm{PS} \times \mathrm{MAKRM}}{c^2 + 2cb + ab}$. Atque $c^2b + cb^2 = cb \times \overline{c + b} = \mathrm{KA} \times \mathrm{AS} \times \mathrm{PS} =$ triang. $\mathrm{MAK} \times \mathrm{PS}$. Hinc recta $\frac{c^2b + cb^2 + ab^2 - \mathrm{PS} \times \mathrm{MAKRM}}{c^2 + 2cb + ab} = \frac{\mathrm{PS} \times \text{triang.}\mathrm{MAK} + ab^2 - \mathrm{PS} \times \mathrm{MAKRM}}{c^2 + 2cb + ab}$.

Sed triang. $\mathrm{MAK} - \mathrm{MAKRM} = -\mathrm{KRM}$. Et $ab = \mathrm{CS}^2$. Et $c^2 + 2cb = \mathrm{AP}^2 + \mathrm{BAP} = \mathrm{BP} \times \mathrm{PA} = \mathrm{PS}^2 - \mathrm{AS}^2$.

Quare recta $\frac{c^2b + cb^2 + ab^2 - \mathrm{PS} \times \mathrm{MAKRM}}{c^2 + 2cb + ab} = \frac{\mathrm{CS}^2 \times \mathrm{AS} - \mathrm{PS} \times \mathrm{KRM}}{\mathrm{PS}^2 + \mathrm{CS}^2 - \mathrm{AS}^2}$. Atque hujus rectæ rationem area LABI, nec non vis quâ ſphærois AGBC corpus in P poſitum verſus centrum ſuum trahit, ſervabit.

JAM verò manentibus AS, PS, recta CS minuatur paulatim vel creſcat, ut rectæ AS æqualis tandem evadat; ita verò Ellipſis ACBG in Circulum abierit, & Sphærois ACBG in Sphæram perfectam.

Rectaque



tarum partes hinc inde interceptæ DP & BE, FF & CG, DH & IE, FK & LG ſibi mutuò æquales; propterea quòd rectæ DE, PB, & HI biſecantur in eodem puncto, ut & rectæ FG, PC, & KL. Concipe jam DPF, EPG deſignare conos oppoſitos, angulis verticalibus DPF, EPG infinitè parvis deſcriptos, & lineas etiam DH, EI infinitè parvas eſſe; & conorum particulæ ſphæroidum ſuperficiebus abſciſſæ DHKF, GLIE, ob æqualitatem linearum DH, EI, erunt ad invicem ut quadrata diſtantiarum ſuarum à corpuſculo P, & propterea corpuſculum illud æqualiter trahent. Et pari ratione, ſi ſuperficiebus ſphæroidum innumerarum, ſimilium, concentricarum, & axem communem habentium, dividantur ſpatia DPF, EGCB in particulas, hæ omnes utrinque æqualiter trahent corpus P in partes contrarias. Æquales igitur ſunt vires coni DPF & ſegmenti conici EGCB, & per contrarietatem ſe mutuò deſtruunt. Et par eſt ratio virium materiæ omnis extra ſphæroidem intimam PCBM. Trahitur igitur corpus P à ſolâ ſphæroide intimâ PCBM, & propterea (per Corol. 3. Prop. LXXII.) attractio ejus eſt ad vim, quâ corpus A trahitur à ſphæroide totâ AGOD, ut diſtantia PS ad diſtantiam AS. Q. E. D.

PROP. XCII. PROB. XLVI.

Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta ſingula tendentium.

E corpore dato formanda eſt Sphæra, vel Cylindrus, aliave figura

Rectaque $\frac{CS^2 \times AS - PS \times KRM}{PS^2 + CS^2 - AS^2}$, cujus rationem area LABI ſervat, ea fiet $\frac{AS^3 - PS \times KRM}{PS^2}$. Jam verò exſiſtente ACBG Circulo, ſectio conica NKRM Parabola erit, cujus axis NB, parameter 2PS. Id quod ex æquatione illâ, PD^2, ſive ER^2, $= c^2 + \overline{2c + 2a}.x + \frac{b-a}{b}x^2$ ſatis patet: quæ rectis, b, a, propter circulum ACBG jam factis æqualibus, in hanc migraverit, $ER^2 = c^2 + \overline{2c + 2b}|x$.

Hinc area conica KRMBA $=$ NRMB $-$ NKA $= \frac{2}{3}NB \times BM - \frac{2}{3}NA \times AK$. Sed $NB = \frac{BM^2}{2PS}$. Et $NA = \frac{AK^2}{2PS}$ (propter parabolam). Hinc $\frac{2}{3}NB \times BM - \frac{2}{3}NA \times AK = \frac{BM^3 - AK^3}{3PS}$.

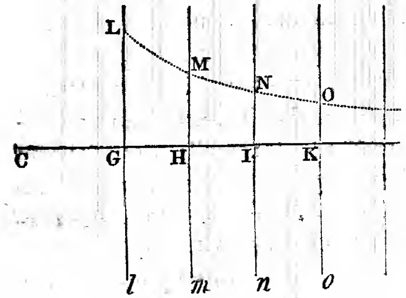
Quare area parabolica KRMBA $= \frac{BM^3 - AK^3}{3PS}$.

gura regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi congruens (per Prop. LXXX, LXXXI & XCI.) inveniri poteſt. Dein factis experimentis invenienda eſt vis attractionis in diverſis diſtantiis, & lex attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium ſingularum, quam invenire oportuit.

PROP. XCIII. THEOR. XLVII.

Si Solidum ex unâ parte planum, ex reliquis autem partibus infinitum, conſtet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in receſſu à Solido decreſcunt in ratione poteſtatis cujuſvis diſtantiarum pluſquam quadraticæ, & vi Solidi totius corpuſculum ad utramvis plani partem conſtitutum trahatur: dico quòd Solidi vis illa attractiva, in receſſu ab ejus ſuperficie planâ, decreſcet in ratione poteſtatis, cujus latus eſt diſtantia corpuſculi à plano, & index ternario minor quàm index poteſtatis diſtantiarum.

Caſ. I. Sit LG*l* planum quo Solidum terminatur. Jaceat Solidum autem ex parte plani hujus verſus I, inque plana innumera *m*HM, *n*IN, *o*KO, &c. ipſi GL parallela reſolvatur. Et primò collocetur corpus attractum C extra ſolidum. Agatur autem CGHI planis illis innumeris perpendicularis, & decreſcant vires attractivæ punctorum ſolidi in ratione poteſtatis diſtantiarum, cujus index ſit numerus *n* ternario non

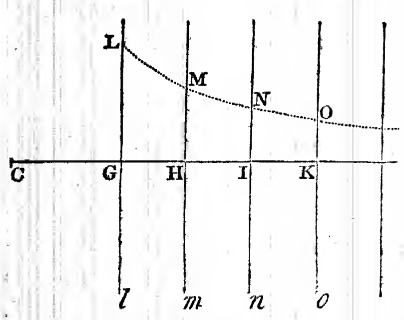


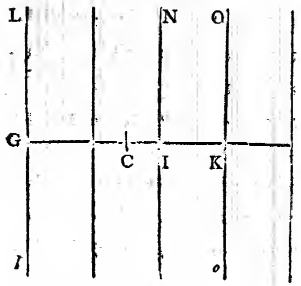
Sed BM $=$ PB $=$ PS $+$ SA. Et AK $=$ PA $=$ PS $-$ SA. Quare $BM^3 - AK^3 = 6PS^2 \times SA + 2SA^3$.

Quare area parabolica KRMBA $= \frac{6PS^2 \times SA + 2SA^3}{3PS}$. Demptoque trapezio KABM $= AS \times \overline{BM + AK} = AS \times 2PS = \frac{6PS^2 \times SA}{3PS}$, manebit $KRM = \frac{2SA^3}{3PS}$. Unde et $PS \times KRM = \frac{2SA^3}{3}$. Hinc $\frac{AS^3 - PS \times KRM}{PS^2} = \frac{AS^3}{PS^2} - \frac{2SA^3}{3PS^2} = \frac{AS^3}{3PS^2}$.

Atque huic rectæ æqualis erit illa, cujus rationem area LABI ſervat; quando ſcilicet ſphærois ACBG, diametro æquatoris CG cum ipſo axe AB æquatâ, perfectam ſphæræ figuram induerit. Erit igitur vis, quâ ſphærois trahit corpus P, ad vim quâ ſphæra, diametro AB ſcripta, idem corpus trahit, ut $\frac{AS \times CS^2 - PS \times KMRK}{PS^2 + CS^2 - AS^2}$ ad $\frac{AS^3}{3PS^2}$, ſicut Newtonus affirmavit. Q. E. D.

minor. Ergo (per Corol. 3. Prop. xc.) vis, quâ planum quodvis *m*HM trahit punctum C, eſt reciprocè ut CH^{n-2}. In plano *m*HM capiatur longitudo HM ipſi CH^{n-2} reciprocè proportionalis, & erit vis illa ut HM. Similiter in planis ſingulis *l*GL, *n*IK, *o*KO, &c. capiantur longitudines GL, IN, KO, &c. ipſis CG^{n-2}, CI^{n-2}, CK^{n-2}, &c. reciprocè proportionales; & vires planorum eorundem erunt ut longitudines captæ, ideoque ſumma virium ut ſumma longitudinum; hoc eſt, vis Solidi totius ut area GLOK in infinitum verſus OK producta. Sed area illa (per notas quadraturarum methodos) eſt reciprocè ut CG^{n-3}, & propterea vis Solidi totius eſt reciprocè ut CG^{n-3}. Q.E.D.





Caſ. 2. Collocetur jam corpuſculum C ex parte plani *l*GL intra Solidum, & capiatur diſtantia CK æqualis diſtantiæ CG. Et ſolidi pars LG*l*OK*o*, planis parallelis *l*GL, *o*KO terminata, corpuſculum C, in medio ſitum, nullam in partem trahet; contrariis oppoſitorum punctorum actionibus ſe mutuò per æqualitatem tollentibus. Proinde corpuſculum C ſolâ vi Solidi ultra planum OK ſiti trahitur. Hæc autem vis (per caſum primum) eſt reciprocè ut CK^{n-3}, hoc eſt (ob æquales CG, CK) reciprocè ut CG^{n-3}. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi Solidum LGIN planis duobus infinitis parallelis LG, IN utrinque terminetur; innoteſcit ejus vis attractiva, ſubducendo de vi attractivâ Solidi totius infiniti LGKO vim attractivam partis ulterioris NIKO, in infinitum verſus KO productæ.

Corol. 2. Si Solidi hujus infiniti pars ulterior, quando attractio ejus collata cum attractione partis citerioris nullius penè eſt momenti, rejiciatur: attractio partis illius citerioris, augendo diſtantiam, decreſcet quàm proximè in ratione poteſtatis CG^{n-3}.

Corol. 3. Et hinc ſi corpus quodvis finitum, & ex unâ parte planum,

num, trahat corpuſculum è regione medii illius plani; & diſtantia inter corpuſculum & planum, collata cum dimenſionibus corporis attrahentis, perexigua ſit; conſtet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione poteſtatis cujuſvis pluſquam quadruplicatæ diſtantiarum: vis attractiva corporis totius decreſcet quamproximè in ratione poteſtatis, cujus latus ſit diſtantia illa perexigua, & index ternario minor quàm index poteſtatis prioris. De corpore ex particulis conſtante, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione poteſtatis triplicatæ diſtantiarum, aſſertio non valet; propterea quòd, in hoc caſu, attractio partis illius ulterioris corporis infiniti in Corollario ſecundo, ſemper eſt infinitè major quàm attractio partis citerioris.

Scholium.

Si corpus aliquod perpendiculariter verſus planum datum trahatur, & ex datâ lege attractionis quæratur motus corporis: ſolvetur Problema quærendo (per Prop. XXXIX.) motum corporis rectâ deſcendentis ad hoc planum, & (per legum Corol. 2.) componendo motum iſtum cum uniformi motu, ſecundum lineas eidem plano parallelas facto. Et contrà, ſi quæratur lex attractionis in planum ſecundum lineas perpendiculares factæ, eâ conditione ut corpus attractum in datâ quâcunque curvâ lineâ moveatur, ſolvetur Problema operando ad exemplum Problematis Tertii.

Operationes autem contrahi ſolent reſolvendo ordinatim applicatas in ſeries convergentes. Ut ſi ad baſem A in angulo quovis dato ordinatim applicetur longitudo B, quæ ſit ut baſis dignitas quælibet $A^{\frac{m}{n}}$; & quæratur vis quâ corpus, ſecundum poſitionem ordinatim applicatæ vel in baſem attractum, vel à baſi fugatum, moveri poſſit in curvâ lineâ, quam ordinatim applicata termino ſuo ſuperiore ſemper attingit: ſuppono baſem augeri parte quàm minimâ O, & ordinatim applicatam, $\overline{A+O}|^{\frac{m}{n}}$, reſolvo in ſeriem infinitam, $A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}O.A^{\frac{m-n}{n}} + \frac{mm-mn}{2nn}OO.A^{\frac{m-2n}{n}}$ &c. atque hujus termino in quo O duarum eſt dimenſionum, id eſt, termino $\frac{mm-mn}{2nn}OO.A^{\frac{m-2n}{n}}$

vim

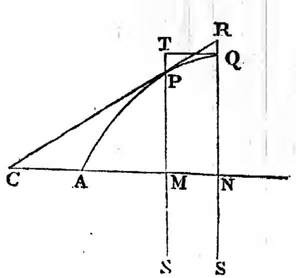
vim proportionalem esse suppono (e). Est igitur vis quæsita ut $\frac{mn-mn}{nn} A^{\frac{m-2n}{n}}$; vel quod perinde est, ut $\frac{mm-mn}{nn} B^{\frac{m-2n}{m}}$. Ut si ordinatim applicata Parabolam attingat, existente $m=2$, & $n=1$: fiet vis ut data $2B^{0}$, ideoque dabitur. Datâ igitur vi corpus movebitur in Parabola, quemadmodum *Galilæus* demonstravit. Quòd si ordinatim applicata Hyperbolam attingat, existente $m=0-1$, & $n=1$; fiet vis ut $2A^{-3}$ seu $2B^{3}$: ideoque vi, quæ sit ut cubus ordinatim applicatæ, corpus movebitur in Hyperbolâ. Sed missis hujusmodi Propositionibus, pergo ad alias quasdam de motu, quas nondum attigi.

SECTIO XIV.

De motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad singulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.

PROP. XCIV. THEOR. XLVIII.

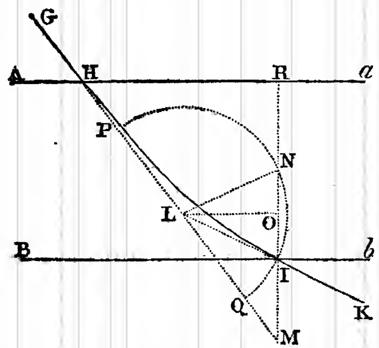
Si media duo similiaria, spatio planis parallelis utrinque terminato, distinguantur ab invicem, & corpus in transitu per hoc spatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter versus medium alterutrum, neque ullâ aliâ vi agitetur vel impediatur; sit autem attractio, in æqualibus ab utroque plano distantiis ad eandem ipsius partem captis, ubique eadem: dico quòd sinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad sinum emergentiæ ex plano altero in ratione datâ.



(c) Nimirum in figurâ Problematis tertii, sit Abscissa AM $=$ A, Ordinata PM $=$ B. Curvæ autem APQ ea sit natura, ut sit $A^{\frac{m}{n}} = B$, sive $A^{m} = B^{n}$.

Recta RP, quæ Curvam in P contingat, occurrat axi MA in C, & Ordinatæ NQ in R. Recta autem MN, ordinatis MP, NQ interjecta, dicatur o. Si corpus quodpiam, viribus secundum rectas parallelas PM, QN incitatum, per Curvam APQ feratur, vires illæ rationem inter se ejus quæ rectarum $\frac{QT^2}{QR}$, evanescente arcu PQ, est ultima contrariam, necesse est constanter gerant (Prop. VI. Cor. 5.) Sive ejus contrariam, quæ, evanescente arcu PQ, ultima est rectarum $\frac{MN^2}{QR}$. Namque propter rectas PM, QN parallelas, et angulum ad T rectum, ad M aut rectum aut datum, rectæ QT, MN, aut æquales erunt inter se, aut datam saltem inter se rationem gerent. Jam verò propter $A^{m} = B^{n}$, erit recta $MC = \frac{nB^{n}}{mA^{m-1}}$ (Geometr. Analyt. Prop. IV. Mod. 1.) Et propter rectas PM, NR inter se parallelas, erit CM : MP = CN : NR. Sive $\frac{nB^{n}}{mA^{m-1}} : A^{\frac{m}{n}} = \frac{nB^{n}}{mA^{m-1}} + o : NR$. Quare $NR = \overline{\frac{nB^{n}}{mA^{m-1}} + o} \times A^{\frac{m}{n}} \times \frac{mA^{m-1}}{nB^{n}}$

Cas. 1. Sunto Aa, Bb plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius Aa secundum lineam GH; ac, toto suo per spatium intermedium transitu, attrahatur vel impellatur versus medium incidentiæ, eâque actione describat lineam curvam HI, & emergat secundum lineam IK. Ad planum emergentiæ Bb erigatur perpendiculum IM, occurrens tum lineæ incidentiæ GH productæ in M, tum plano incidentiæ Aa in R; & linea emergentiæ, KI, producta occurrat HM in L. Centro L intervallo LI describatur circulus, secans tam HM in P & Q, quàm MI productam in N; & primò si attractio, vel impulsus, ponatur uniformis, erit (ex demonstratis *Galilæi*) Curva HI Parabola; cujus hæc est proprietas, ut rectangulum sub dato latere recto & lineâ IM æquale sit HM quadrato; sed & linea HM bisecabitur in L (a). Unde si ad MI demittatur perpendiculum



$\frac{mA^{m-1}}{nB^{n}} = A^{\frac{m}{n}} + \frac{m \times A^{\frac{m}{n}+m-1}}{nB^{n}} O$. Hoc est, propter $A^{m} = B^{n}$, $NR = A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} A^{\frac{m-n}{n}} O$.

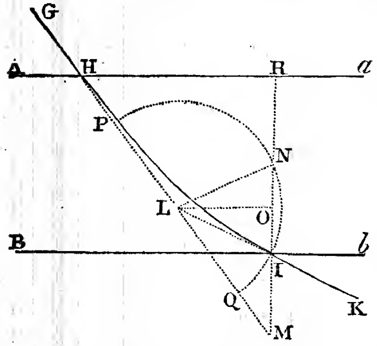
Sed ex naturâ Curvæ APQ, $QN = \overline{A+o}|^{\frac{m}{n}} = A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} A^{\frac{m-n}{n}} O + \frac{mm-mn}{2nn} A^{\frac{m-2n}{n}} O^{2} + \frac{m^{3}-3m^{2}n+2mn^{2}}{6n^{3}} A^{\frac{m-3n}{n}} O^{3}$.

Ergo $QR = NR - NQ = \frac{mn-mm}{2nn} A^{\frac{m-2n}{n}} O^{2} + \frac{3m^{2}n-m^{3}-2mn^{2}}{6n^{3}} A^{\frac{m-3n}{n}} O^{3} +$. Et $\frac{MN^{2}}{QR} = \frac{o^{2}}{QR} = \frac{1}{\frac{mn-mm}{2nn} A^{\frac{m-2n}{n}} + \frac{3m^{2}n-m^{3}-2mn^{2}}{6n^{3}} A^{\frac{m-3n}{3}} O +}$. Vires igitur, de quibus agitur, quantitatum $\frac{mn-mm}{2nn} A^{\frac{m-2n}{n}} + \frac{3m^{2}n-m^{3}-2mn^{2}}{6n^{3}} A^{\frac{m-3n}{n}} O +$ rationem ultimam constanter servant; hoc est, propter illam O infinitè imminutam, quantitatum $\frac{mn-mm}{2nn} A^{\frac{m-2n}{n}}$. Rectè igitur posuit Newtonus vires illas cum his quantitatibus proportione convenire.

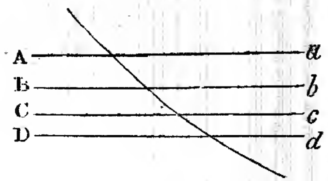
(a) Id quod facilè efficitur ex XLVII^{a}. Lib. 1. Conicorum Hamiltoni, si per H ducatur recta cum illâ LI, quæ Parabolam in I contingit, parallela.

diculum

diculum LO, æquales erunt MO, OR; & additis æqualibus ON, OI, fient totæ æquales MN, IR. Proinde cùm IR detur, datur etiam MN; eſtque rectangulum NMI ad rectangulum ſub latere recto & IM, hoc eſt, ad HM*q*, in datâ ratione. Sed rectangulum NMI æquale eſt rectangulo PMQ, id eſt, differentiæ quadratorum ML*q*, & PL*q* ſeu LI*q*; & HM*q* datam rationem habet ad ſui ipſius quartam partem ML*q*: ergo datur ratio ML*q* − LI*q* ad ML*q*; & convertendo ratio LI*q* ad ML*q*, & ratio dimidiata LI ad ML. Sed in omni triangulo LMI, ſinus angulorum ſunt proportionales lateribus oppoſitis. Ergo datur ratio ſinûs anguli incidentiæ LMR ad ſinum anguli emergentiæ LIR. Q. E. D.



Caſ. 2. Tranſeat jam corpus ſucceſſivè per ſpatia plura parallelis planis terminata, A*ab*B, B*bc*C, &c. & agitetur vi, quæ ſit in ſingulis ſeparatim uniformis, at in diverſis diverſa; & per jam demonſtrata, ſinus incidentiæ in planum primum A*a* erit ad ſinum emergentiæ ex plano ſecundo B*b*, in datâ ratione; & hic ſinus, qui eſt ſinus incidentiæ in planum ſecundum B*b*, erit ad ſinum emergentiæ ex plano tertio C*c*, in datâ ratione; & hic ſinus ad ſinum emergentiæ ex plano quarto D*d*, in datâ ratione; & ſic in infinitum: & ex æquo, ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo in datâ ratione. Minuantur jam planorum intervalla, & augeatur numerus in infinitum, eò ut attractionis vel impulſûs actio, ſecundum legem quamcunque aſſignatam, continua reddatur; & ratio ſinûs incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo, ſemper data exiſtens, etiamnum dabitur. Q. E. D.

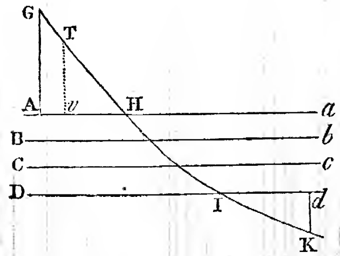


PROP.

PROP. XCV. THEOR. XLIX.

Iiſdem poſitis; dico quòd velocitas corporis ante incidentiam eſt ad ejus velocitatem poſt emergentiam, ut ſinus emergentiæ ad ſinum incidentiæ.

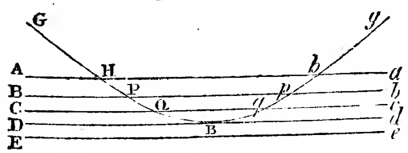
Capiantur AH, I*d* æquales, & erigantur perpendicula AG, *d*K occurrentia lineis incidentiæ & emergentiæ GH, IK, in G & K. In GH capiatur TH æqualis IK, & ad planum A*a* demittatur normaliter T*v*. Et (per legum Corol. 2.) diſtinguatur motus corporis in duos, unum planis A*a*, B*b*, C*c*, &c. perpendicularem, alterum iiſdem parallelum. Vis attractionis vel impulſûs, agendo ſecundum lineas perpendiculares, nil mutat motum ſecundum parallelas; & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa ſecundum parallelas intervalla, quæ ſunt inter lineam AG & punctum H, interque punctum I & lineam *d*K; hoc eſt, æqualibus temporibus deſcribet lineas GH, IK. Proinde velocitas ante incidentiam eſt ad velocitatem poſt emergentiam, ut GH ad IK vel TH, id eſt, ut AH vel I*d* ad *v*H, hoc eſt (reſpectu radii TH vel IK) ut ſinus emergentiæ ad ſinum incidentiæ. Q. E. D.



PROP. XCVI. THEOR. L.

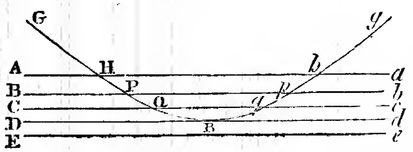
Iiſdem poſitis, & quòd motus ante incidentiam velocior ſit quàm poſtea: dico quòd corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.

Nam concipe corpus inter parallela plana A*a*, B*b*, C*c*, &c. deſcribere arcus parabolicos, ut ſupra; ſintque arcus illi HP, PQ, QR, &c. Et ſit ea linea incidentiæ, GH, obliquitas ad planum primum A*a*, ut



ut

ut ſinus incidentiæ ſit ad radium circuli, cujus eſt ſinus, in eâ ratione, quam habet idem ſinus incidentiæ ad ſinum emergentiæ ex plano Dd, in ſpatium DdeE: & ob ſinum emergentiæ jam factum æqualem radio, angulus emergentiæ erit rectus, ideóque linea emergentiæ coincidet cum plano Dd. Perveniat corpus ad hoc planum in puncto R; & quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perſpicuum eſt, quòd corpus non poteſt ultrà pergere verſus planum Ee.

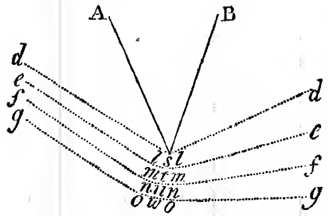


Sed nec poteſt idem pergere in lineâ emergentiæ Rd, propterea quòd perpetuò attrahitur vel impellitur verſus medium incidentiæ. Revertetur itaque inter plana Cc, Dd, deſcribendo arcum Parabolæ QRq, cujus vertex principalis (juxta demonſtrata *Galilæi*) eſt in R; ſecabit planum Cc in eodem angulo in *q*, ac priùs in Q; dein pergendo in arcubus parabolicis *qp*, *ph*, &c. arcubus prioribus QP, PH ſimilibus & æqualibus, ſecabit reliqua plana in iiſdem angulis in *p*, *h*, &c. ac priùs in P, H, &c. emergetque tandem eâdem obliquitate in *h*, quâ incidit in H. Concipe jam planorum A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, &c. intervalla in infinitum minui & numerum augeri, eò ut actio attractionis vel impulſûs, ſecundum legem quamcunque aſſignatam, continua reddatur; & angulus emergentiæ ſemper angulo incidentiæ æqualis exiſtens, eidem etiamnum manebit æqualis. Q. E. D.

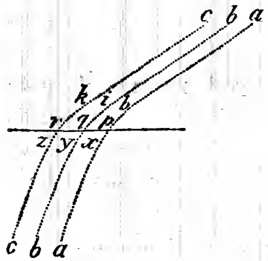
Scholium.

Harum attractionum haud multùm diſſimiles ſunt lucis reflexiones & refractiones, factæ ſecundum datam ſecantium rationem, ut invenit *Snellius*, & per conſequens ſecundum datam ſinuum rationem, ut expoſuit *Carteſius*. Namque lucem ſucceſſivè propagari, & ſpatio quaſi ſeptem vel octo minutorum primorum à ſole ad terram venire, jam conſtat per phænomena ſatellitum *Jovis*, obſervationibus diverſorum aſtronomorum confirmata. Radii autem in aëre exiſtentes (uti dudum *Grimaldus*, luce per foramen in tenebroſum cubiculum admiſſâ, invenit, & ipſe quoque expertus ſum) in tranſitu ſuo prope corporum vel opacorum vel perſpicuorum angulos (quales ſunt nummorum ex auro, argento & ære

ære cuſorum termini rectanguli circulares, & cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum acies) incurvantur circum corpora, quaſi attracti in eadem; & ex his radiis, qui in tranſitu illo propiùs accedunt ad corpora, incurvantur magis, quaſi magis attracti, ut ipſe etiam diligenter obſervavi. Et qui tranſeunt ad majores diſtantias minùs incurvantur; & ad diſtantias adhuc majores incurvantur aliquantulum ad partes contrarias, & tres colorum faſcias efformant. In figurâ deſignat *s* aciem cultri vel cunei cujuſvis A*s*B; & *gowog*, *fnunf*, *emtme*, *dlsld* ſunt radii, arcubus *owo*, *nun*, *mtm*, *lsl* verſus cultrum incurvati; idque magis vel minùs pro diſtantia eorum à cultro.



Cùm autem talis incurvatio radiorum fiat in aere extra cultrum, debebunt etiam radii, qui incidunt in cultrum, priùs incurvari in aere quàm cultrum attingunt. Et par eſt ratio incidentium in vitrum. Fit igitur refractio, non in puncto incidentiæ, ſed paulatim per continuam incurvationem radiorum, factam partim in aere antequam attingunt vitrum, partim (ni fallor) in vitro, poſtquam illud ingreſſi ſunt: uti in radiis *ckzc*, *biyb*, *ahxa* incidentibus ad *r*, *q*, *p*, & inter *k* & *z*, *i* & *y*, *h* & *x* incurvatis, delineatum eſt.



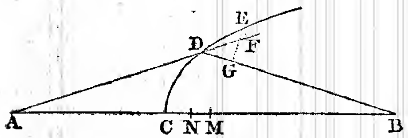
Igitur ob analogiam quæ eſt inter propagationem radiorum lucis & progreſſum corporum, viſum eſt Propoſitiones ſequentes in uſus opticos ſubjungere; interea de naturâ radiorum (utrùm ſint corpora necne) nihil omninò diſputans, ſed trajectorias corporum trajectoriis radiorum perſimiles ſolummodò determinans.

PROP. XCVII. PROB. XLVII.

Poſito quòd ſinus incidentiæ in ſuperficiem aliquam ſit ad ſinum emergentiæ in datâ ratione; quódque incurvatio viæ corporum juxta ſuperficiem illam fiat in ſpatio breviſſimo, quod ut punctum conſiderari

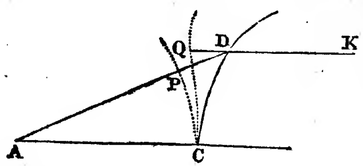
conſiderari poſſit: determinare ſuperficiem, quæ corpuſcula omnia de loco dato ſucceſſivè manantia convergere faciat ad alium locum datum.

Sit A locus à quo corpuſcula divergunt; B locus in quem convergere debent; CDE curva linea quæ circa axem AB revoluta deſcribat ſuperficiem quæſitam; D, E Curvæ illius puncta duo quævis; & EF, EG perpendicula in corporis vias AD, DB demiſſa. Accedat punctum D ad punctum E; & lineæ DF, quâ AD augetur, ad lineam DG, quâ DB diminuitur, ratio ultima erit eadem, quæ ſinûs incidentiæ ad ſinum emergentiæ (b). Datur ergo ratio incrementi lineæ AD ad decrementum lineæ DB; & propterea, ſi in axe AB ſumatur ubivis punctum C, per quod Curva CDE tranſire debet, & capiatur ipſius AC incrementum, CM, ad ipſius BC decrementum, CN, in datâ illâ ratione, centriſque A, B, & intervallis AM, BN deſcribantur circuli duo ſe mutuo ſecantes in D; punctum illud D tanget Curvam quæſitam CDE, eademque ubivis tangendo determinabit. Q. E. I.



Corol. 1. Faciendo autem ut punctum A vel B nunc abeat in infinitum, nunc migret ad alteras partes puncti C, habebuntur figuræ illæ omnes, quas *Carteſius* in Opticâ & Geometriâ ad refractiones expoſuit. Quarum inventionem cùm *Carteſius* celaverit, viſum fuit hâc Propoſitione exponere.

Corol. 2. Si corpus in ſuperficiem quamvis CD, ſecundum lineam rectam AD, lege quâvis ductam incidens, emerget ſecundum aliam quamvis rectam DK, & à puncto C duci intelligantur lineæ curvæ CP, CQ ipſis AD, DK ſemper perpendiculares: erunt incrementa linearum PD, QD, atque ideo lineæ ipſæ PD, QD, incrementis iſtis genitæ, ut ſinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem: & contrà.



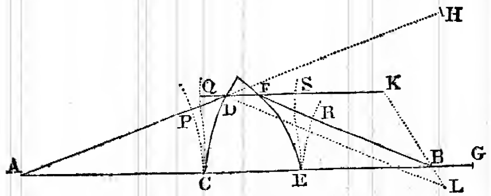
PROP.

(b) Junctâ enim DE, anguli rectilinei DEF, DEG, quorum ſinus ſunt DF, DG pro radio communi

PROP. XCVIII. PROB. XLVIII.

Iiſdem poſitis, & circa axem AB deſcriptâ ſuperficie quâcunque attractivâ CD, regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato A exeuntia tranſire debent: invenire ſuperficiem ſecundam attractivam EF, quæ corpora illa ad locum datum B convergere faciat.

Juncta AB ſecet ſuperficiem primam in C & ſecundam in E, puncto D utcunque aſſumpto. Et poſito ſinu incidentiæ in ſuperficiem primam ad ſinum emergentiæ ex eâdem, & ſinu emergentiæ è ſuperficie ſecundâ ad ſinum incidentiæ in eandem, ut quantitas aliqua data M ad aliam datam N: produc tum AB ad G, ut ſit BG ad CE ut M − N ad N; tum AD ad H, ut ſit AH æqualis AG; tum etiam DF ad K, ut ſit DK ad DH ut N ad M. Junge KB, & centro D intervallo DH deſcribe circulum occurrentem KB productæ in L, ipſique DL parallelam age BF: & punctum F tanget lineam EF, quæ circa axem AB revoluta deſcribet ſuperficiem quæſitam. Q. E. F.



Nam concipe lineas CP, CQ ipſis AD, DF reſpectivè, & lineas ER, ES ipſis FB, FD ubique perpendiculares eſſe, ideoque QS ipſi CE ſemper æqualem; & erit (per Corol. 2. Prop. XCVII.) PD ad QD ut M ad N, ideoque ut DL ad DK vel FB ad FK; & diviſim ut DL − FB, ſeu PH − PD − FB, ad FD, ſeu FQ − QD; & compoſitè ut PH − FB ad FQ, id eſt (ob æquales PH & CG, QS & CE) CE + BG − FR ad CE − FS. Verùm (ob proportionales BG ad CE & M − N ad N) eſt etiam CE + BG ad CE ut M ad N; ideoque diviſim FR ad FS ut M ad N; & propterea (per Corol. 2. Prop. XCVII.) ſuperficies EF cogit corpus, in ipſam ſecundùm lineam DF incidens, pergere in lineâ FR ad locum B. Q. E. D.

Scholium.

Eâdem methodo pergere liceret ad ſuperficies tres vel plures.

muni DE, hi, evaneſcente arcu DE, ſiunt anguli, ille incidentis radii, hic emergentis, ultimò æquales. Erunt igitur DF, DG ultimò ut ſinus illi.

Ad

De Motu Corporum

Ad usus autem opticos maximè accommodatæ sunt figuræ sphæricæ. Si perspicillorum vitra objectiva ex vitris duobus sphæricè figuratis & aquam inter se claudentibus conflentur; fieri potest ut à refractionibus aquæ errores refractionum, quæ fiunt in vitrorum superficiebus extremis, satis accuratè corrigantur. Talia autem vitra objectiva vitris ellipticis & hyperbolicis præferenda sunt, non solùm quòd faciliùs & accuratiùs formari possint, sed etiam quòd penicillos radiorum extra axem vitri sitos accuratiùs refringant. Veruntamen diversa diversorum radiorum refringibilitas impedimento est, quo minùs optica per figuras vel sphæricas vel alias quascunque perfici possit. Nisi corrigi possint errores illinc oriundi, labor omnis in cæteris corrigendis imperitè collocabitur.

DE

DE MOTU CORPORUM

LIBER SECUNDUS.

SECTIO I.

De motu corporum quibus resistitur in ratione velocitatis.

PROP. I. THEOR. I.

Corporis, cui resistitur in ratione velocitatis, motus ex resistentiâ amissus est ut spatium movendo confectum.

NAM cùm motus singulis temporis particulis æqualibus amissus sit ut velocitas, hoc est, ut itineris confecti particula: erit, componendo, motus toto tempore amissus ut iter totum. Q. E. D. Liber Secundus.

Corol. Quare si corpus, gravitate omni destitutum, in spatiis liberis solâ vi insitâ moveatur; ac detur tum motus totus sub initio, tum etiam motus reliquus post spatium aliquod confectum: dabitur spatium totum quod corpus infinito tempore describere potest. Erit enim spatium illud ad spatium jam descriptum, ut motus totus sub initio ad motûs illius partem amissam.

LEMMA

LEMMA I.

Quantitates differentiis ſuis proportionales ſunt continuè proportionales.

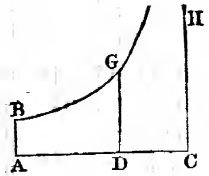
Sit A ad A−B ut B ad B−C & C ad C−D, &c. & convertendo fiet A ad B ut B ad C & C ad D, &c. Q. E. D.

PROP. II. THEOR. II.

Si corpori reſiſtitur in ratione velocitatis, & idem ſolâ vi inſitâ per medium ſimilare moveatur, ſumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis ſingulorum temporum ſunt in progreſſione geometricâ, & ſpatia ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitates.

Caſ. 1. Dividatur tempus in particulas æquales; & ſi ipſis particularum initiis agat vis reſiſtentiæ impulſu unico, quæ ſit ut velocitas: erit decrementum velocitatis, ſingulis temporis particulis, ut eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentiis ſuis proportionales, & propterea (per Lem. I. Lib. 2.) continuè proportionales. Proinde ſi ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, erunt velocitates ipſis temporum initiis, ut termini in progreſſione continuâ, qui per ſaltum capiuntur, omiſſo paſſim æquali terminorum intermediorum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex rationibus inter ſe iiſdem terminorum intermediorum æqualiter repetitis, & propterea eæ quoque rationes compoſitæ inter ſe eædem ſunt. Igitur velocitates, his terminis proportionales, ſunt in progreſſione geometricâ. Minuantur jam æquales illæ temporum particulæ, & augeatur earum numerus in infinitum, eò ut reſiſtentiæ impulſus reddatur continuus; & velocitates in principiis æqualium temporum, ſemper continuè proportionales, erunt in hoc etiam caſu continuè proportionales. Q. E. D.

Caſ. 2. Et diviſim velocitatum differentiæ, hoc eſt, earum partes ſingulis temporibus amiſſæ, ſunt ut totæ: ſpatia autem ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitatum partes amiſſæ (per Prop. I. Lib. 2.) & propterea etiam ut totæ. Q. E. D.

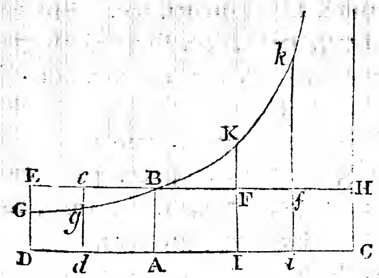


Corol. Hinc ſi aſymptotis rectangulis AC, CH deſcribatur hyperbola BG, ſintque AB, DG ad aſymptoton AC perpendiculares, & exponatur tum corporis velocitas tum reſiſtentia medii, ipſo motûs initio, per lineam quamvis datam AC, elapſo autem tempore aliquo per lineam indefinitam DC: exponi poteſt tempus per aream ABGD, & ſpatium eo tempore deſcriptum per lineam AD. Nam ſi area illa per motum puncti D augeatur uniformiter ad modum temporis, decreſcet recta DC in ratione geometricâ ad modum velocitatis, & partes rectæ AC, æqualibus temporibus deſcriptæ, decreſcent in eâdem ratione.

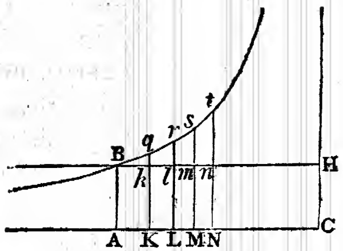
PROP. III. PROB. I.

Corporis, cui, dum in medio ſimilari rectâ aſcendit vel deſcendit, reſiſtitur in ratione velocitatis, quodque ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.

Corpore aſcendente, exponatur gravitas per datum quodvis rectangulum BACH, & reſiſtentia medii, initio aſcenſûs, per rectangulum BADE ſumptum ad contrarias partes rectæ AB. Aſymptotis rectangulis AC, CH, per punctum B deſcribatur hyperbola ſecans perpendicula DE, *de* in G, *g*; & corpus aſcendendo tempore DG*gd* deſcribet ſpatium EG*ge*, tempore DGBA ſpatium aſcenſûs totius EGB; tempore ABKI ſpatium deſcenſûs BFK, atque tempore IK*ki* ſpatium deſcenſûs KF*fk*; & velocitates corporis (reſiſtentiæ medii proportionales) in horum temporum periodis erunt ABED, AB*ed*, nulla, ABFI, AB*fi* reſpectivè; atque maxima velocitas, quam corpus deſcendendo poteſt acquirere, erit BACH.



Reſolvatur enim rectangulum BACH in rectangula innumera A*k*, K*l*, L*m*, M*n*, &c. quæ ſint ut incrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta; & erunt nihil, A*k*, A*l*, A*m*, A*n*,



&c. ut velocitates totæ, atque ideo (per hypothesin) ut resistentiæ medii principio singulorum temporum æqualium. Fiat AC ad AK, vel ABHC ad ABkK, ut vis gravitatis ad resistentiam in principio temporis secundi; deque vi gravitatis subducantur resistentiæ, & manebunt ABHC, KkHC, LlHC, MmHC, &c. ut vires absolutæ, quibus corpus in principio singulorum temporum urgetur, atque ideo (per motûs legem II.) ut incrementa velocitatum, id est, ut rectangula Ak, Kl, Lm, Mn, &c. & propterea (per Lem. I. Lib. II.) in progressione geometricâ. Quare si rectæ Kk, Ll, Mm, Nn, &c. productæ occurrant hyperbolæ in q, r, s, t, &c. erunt areæ ABqK, KqrL, LrsM, MstN, &c. æquales; ideoque tum temporibus tum viribus gravitatis semper æqualibus analogæ. Est autem area ABqK (per Corol. 3. Lem. VII. & Lem. VIII. Lib. I.) ad aream Bkq ut Kq ad $\frac{1}{2}$kq seu AC ad $\frac{1}{2}$AK, hoc est, ut vis gravitatis ad resistentiam in medio temporis primi. Et simili argumento areæ qKLr, rLMs, sMNt, &c. sunt ad areas qklr, rlms, smnt, &c. ut vires gravitatis ad resistentias in medio tempori secundi, tertii, quarti, &c. Proinde cùm areæ æquales BAKq, qKLr, rLMs, sMNt, &c. sint viribus gravitatis analogæ, erunt areæ Bkq, qklr, rlms, smnt, &c. resistentiis in mediis singulorum temporum, hoc est (per hypothesin) velocitatibus, atque ideo descriptis spatiis analogæ. Sumantur analogarum summæ, & erunt areæ Bkq, Blr, Bms, Bnt, &c. spatiis totis descriptis analogæ; necnon areæ ABqK, ABrL, ABsM, ABtN, &c. temporibus. Corpus igitur inter descendendum, tempore quovis ABrL, describit spatium Blr, & tempore LrtN spatium rlnt. Q. E. D. Et similis est demonstratio motûs expositi in ascensu. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo potest acquirere,

([a]) NIMIRUM sunt Bkq, qklr, rlms, smnt spatia, quæ temporum differentiis æqualibus, BAKq, qKLr, rLMs, sMNt, casu corporis conficiuntur. Horum verò spatiorum differentiæ rectangulorum Ak, Kl, Lm, Mn differentiis sunt æquales. (Nempe propter areas Aq, Kr, Ls, Mt inter se æquales.) Rectangula autem illa, cùm sint rectangulorum CB, Ck, Cl, Cm, Cn, geometricâ ratione decrescentium, differentiæ, eâdem ratione geometricâ ipsa decrescunt; hoc est eâ, quâ decrescunt differentiæ, quibus velocitates corporis cadentis absunt à velocitate maximâ, quam ultimò illud adeptum fuerit. Nam

acquirere, est ad velocitatem dato quovis tempore acquisitam, ut vis data gravitatis, quâ corpus illud perpetuò urgetur, ad vim resistentiæ, quâ in fine temporis illius impeditur.

Corol. 2. Tempore autem aucto in progressione arithmeticâ, summa velocitatis illius maximæ ac velocitatis, in ascensu; atque etiam earundem differentia, in ascensu, decrescit in progressione geometricâ.

Corol. 3. Sed & differentiæ spatiorum ([a]), quæ in æqualibus temporum differentiis describuntur, decrescunt in eâdem progressione geometricâ.

Corol. 4. Spatium vero à corpore descriptum differentia est duorum spatiorum, quorum alterum est ut tempus sumptum ab initio descensûs, & alterum ut velocitas, quæ etiam ipso descensûs initio æquantur inter se.

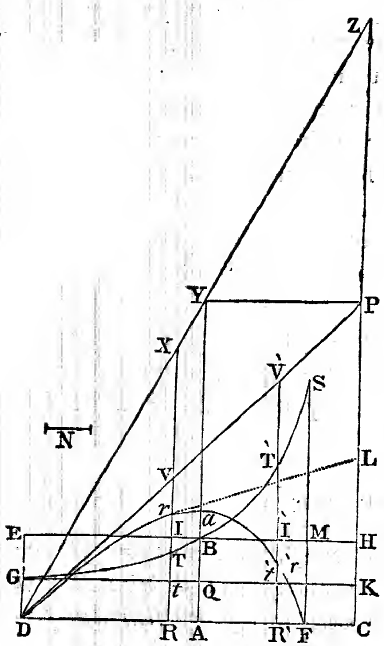
PROP. IV. PROB. II.

Posito quòd vis gravitatis in medio aliquo similari uniformis sit, ac tendat perpendiculariter ad planum horizontis; definire motum projectilis in eodem, resistentiam velocitati proportionalem patientis.

E loco quovis D egrediatur projectile secundùm lineam quamvis rectam DP, & per longitudinem DP exponatur ejusdem velocitas sub initio motûs. A puncto P ad lineam horizontalem DC demittatur perpendiculum PC; & secetur DC in A, ut sit DA ad AC ut resistentia medii, ex motu in altitudinem sub initio orta, ad vim gravitatis; vel (quod perinde est) ut sit rectangulum sub DA & DP ad rectangulum sub AC & CP ut resistentia tota, sub initio motûs, ad vim gravitatis. Asymptotis DC, CP describatur hyperbola quævis GTBS secans perpendicula DG, AB in G & B; & compleatur parallelogrammum DGKC, cujus latus GK secet AB in Q. Capiatur linea N in ratione ad QB, quâ DC sit ad CP; & ad rectæ

Nam rectangula CB, Ck, Cl, Cm, Cn pari ratione cum differentiis velocitatum illarum minuuntur. Cùm vero rectangula Ak, Kl, Lm, Mm geometricè decrescant, eorum etiam differentiæ, sive differentiæ spatiorum Bkq, qklr, rlms, smnt, similiter decrescent; hoc est pro ratione differentiarum, quibus velocitates corporis cadentis à maximâ velocitate absunt.

Simili modo ostendatur differentia spatiorum, quæ, æqualibus temporum differentiis, corpus ascendendo confecerit, pro ratione summæ velocitatis corporis ascendentis velocitatisque maximæ, quâcum ascensum inchoaverat, decrescere.



DC punctum quodvis R erecto perpendiculo RT, quod hyperbolæ in T, & rectis EH, GK, DP in I, t & V occurrat; in eo cape Vr æqualem $\frac{tGT}{N}$, vel quod perinde est, cape Rr æqualem $\frac{GTIE}{N}$ (b); & projectile tempore DRTG perveniet ad punctum r, describens curvam lineam DraF, quam punctum r semper tangit, perveniens autem ad maximam altitudinem a in perpendiculo AB, & postea semper appropinquans ad asymptoton PC. Estque velocitas ejus in puncto quovis r ut curvæ tangens rL. Q. E. I.

Est enim N ad QB ut DC ad CP, seu DR ad RV; ideoque RV æqualis $\frac{DR \times QB}{N}$, & Rr (id est RV − Vr, seu $\frac{DR \times QB - tGT}{N}$) æqualis $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Exponatur jam tempus per aream RDGT, & (per legum Corol. 2.) distinguatur motus corporis in duos, unum ascensûs, alterum ad latus. Et cùm resistentia sit ut motus, distinguetur etiam hæc in partes duas partibus motûs proportionales & contrarias: ideoque longitudo, à motu ad latus descripta, erit (per Prop. II. hujus) ut linea DR, altitudo verò (per Prop. III. hujus) ut area (c), DR × AB − RDGT, hoc est, ut linea Rr. Ipso autem motûs initio area RDGT æqualis est rectangulo DR × AQ, ideoque

(b) PROPTER figuram BQtI parallelogrammam erunt BQ, It inter se æquales. Et propter figuram tRDG parallelogrammam erunt DR, Gt inter se æquales. Quapropter cùm sit N ad QB ut DC ad CP, erit N ad tI ut DC ad CP, hoc est, ut DR, vel Gt ad RV. Erunt igitur rectangula GtIE, N × RV inter se æqualia. At verò N × RV, duobus N × Vr, N × Rr simul sumptis est æquale. (El. II. 1.) Duo igitur N × Vr, N × Rr simul sumpta rectangulo GtIE, sive spatiis duobus GTt, GTIE simul sumptis sunt æqualia. Quare si N × Vr æquale sit spatio GTt, erit N × Rr æquale spatio GTIE.

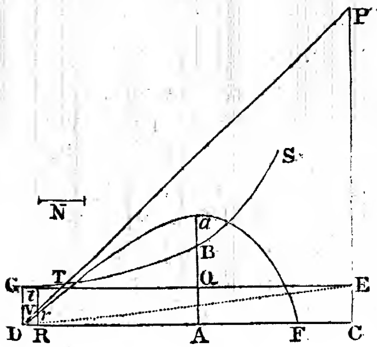
(c) Ut GTIE, hoc est ut $\overline{DR \times AB} - RDGT$.

(d) CORPUS verò projectum altitudinem maximam in puncto a attingere, id ex Propositione tertiâ patet, et velocitatem in loco r esse ut rL id quidem ex Propositione II[a]. Nempe cùm per Prop. II. velocitas motûs ad latus sit ut RC; velocitas autem ad latus ad velocitatem motûs per Curvam

que linea illa Rr (seu $\frac{DR \times AB - DR \times AQ}{N}$) tunc est ad DR ut AB − AQ seu QB ad N, id est, ut CP ad DC; atque ideo ut motus in altitudinem ad motum in longitudinem sub initio. Cùm igitur Rr semper sit ut altitudo, ac DR semper ut longitudo, atque Rr ad DR sub initio ut altitudo ad longitudinem: necesse est, ut Rr semper sit ad DR ut altitudo ad longitudinem, & propterea ut corpus moveatur in lineâ DraF, quam punctum r perpetuò tangit (d). Q. E. D.

Corol. 1. Est igitur Rr æqualis $\frac{DR \times AB}{N} - \frac{RDGT}{N}$: ideoque si producatur RT ad X, ut sit RX æqualis $\frac{DR \times AB}{N}$; id est, si compleatur parallelogrammum ACPY, jungatur DY secans CP in Z, & producatur RT donec occurrat DY in X (e); erit Xr æqualis $\frac{RDGT}{N}$, & propterea tempori proportionalis.

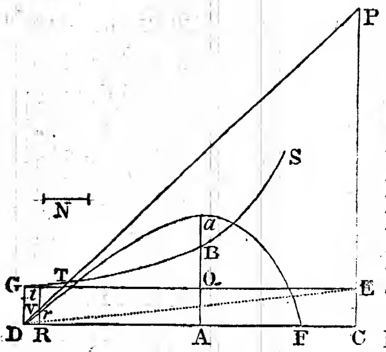
Corol. 2. Unde si capiantur innumeræ CR, vel, quod perinde est, innumeræ ZX in progressione geometricâ; erunt totidem Xr in progressione arithmeticâ. Et hinc Curva DraF per Tabulam Logarithmorum facilè delineatur.



Corol. 3. Si vertice D, diametro DG deorsum productâ, & latere recto quod sit ad 2DP ut resistentia tota ipso motûs initio ad vim gravitatis, Parabola construatur: velocitas, quâcum corpus exire debet de loco D secundum rectam DP, ut in medio uniformi resistente describat Curvam DraF, ea ipsa erit quâcum exire debet de eodem loco D, secundum eandem

Curvam in loco r, ut $\dot{\overline{DR}}$ ad $\dot{\overline{Dr}}$, hoc est ut RC ad rL.

(e) COMPLETO parallelogrammo ACPY, junctâque DY, quâcum recta RY, si opus sit producta, in X occurrat, dico rectangula RX × N, DR × AB inter se æqualia. Namque recta N est ad QB ut DC ad CP; id enim factum est. Et propter hyperbolam GBS, cujus centrum C, asymptotæ CH, CA, erit BA ad DG, vel AQ, ut CD ad CA. Convertendo et invertendo BQ erit ad BA ut DA ad DC. Cùm igitur sit N ad QB ut DC ad CP; et QB ad AB ut DA ad DC; ex æquo perturbate, erit N ad AB ut DA ad CP vel AY. Productis autem DY, CP concursum usque mutuum, qui in puncto Z fiat, erit DA : AY = DC : CZ. Quare N : AB = DC : CZ. Permutando et invertendo DC : N = CZ : AB. Quare RX × DC : RX × N = DR × CZ : DR × AB. Sed rectangulum RX × DC, rectangulo DR × CZ æquale est. Nempe cùm, propter rectas RX, CZ inter se parallelas, sit DR : RX = DC : CZ. Unde RX × N æquale erit rectangulo DR × AB. (El. V. 14.) Q. E. D.



eandem rectam DP, ut in ſpatio non reſiſtente deſcribat Parabolam. Nam latus rectum parabolæ hujus, ipſo motûs initio, eſt $\frac{DV\ quad.}{Vr}$; & Vr eſt $\frac{tGT}{N}$ ſeu $\frac{DR \times Tt}{2N}$. Recta autem quæ, ſi duceretur, hyperbolam GTS tangeret in G, parallela eſt ipſi DK (f), ideoque Tt eſt $\frac{CK \times DR}{DC}$ (g), & N erat $\frac{QB \times DC}{CP}$. Et propterea Vr eſt $\frac{DRq \times CK \times CP}{2DCq \times QB}$, id eſt (ob proportionales DR & DC, DV & DP) $\frac{DVq \times CK \times CP}{2DPq \times QB}$, & latus rectum, $\frac{DV\ quad.}{Vr}$, prodit $\frac{2DPq \times QB}{CK \times CP}$, id eſt (ob proportionales QB & CK, DA & AC (h)) $\frac{2DPq \times DA}{AC \times CP}$, ideoque ad 2DP, ut $DP \times DA$ ad $CP \times AC$; hoc eſt, ut reſiſtentia ad gravitatem. Q. E. D.

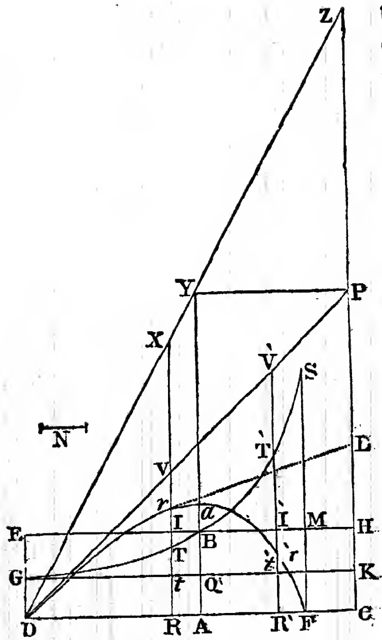
Corol. 4. Unde ſi corpus de loco quovis D, datâ cum velocitate, ſecundum rectam quamvis poſitione datam DP projiciatur; & reſiſtentia medii ipſo motûs initio detur: inveniri poteſt Curva $DraF$, quam corpus idem deſcribet. Nam ex datâ velocitate datur latus rectum parabolæ, ut notum eſt. Et ſumendo 2DP ad latus illud rectum, ut eſt vis gravitatis ad vim reſiſtentiæ, datur DP. Dein ſecando DC in A, ut ſit $CP \times AC$ ad $DP \times DA$ in eâdem illâ ratione gravitatis ad reſiſtentiam, dabitur punctum A. Et inde datur Curva $DraF$.

Corol. 5. Et contrà, ſi datur Curva $DraF$, dabitur & velocitas corporis, & reſiſtentia medii in locis ſingulis r. Nam ex datâ ratione $CP \times AC$ ad $DP \times DA$, datur tum reſiſtentia medii ſub initio motûs, tum latus rectum parabolæ: & inde datur etiam velocitas

(f) Nam recta GC, ſi ducta eſſet, illam DK mediam divideret. Nempe cùm omnis parallelogrammi diagoniæ ſe mutuò medias dividant. Quare et rectam per punctum G ductam cum illâ DK parallelam, rectis CA, CK hinc illinc occurrentem, punctum ipſum G mediam divideret. Quare recta illa hyperbolam in G contingeret. (Hamilton. Conic. Lib. I. Prop. XXXVI.)

(g) Nam ex eo quod modò probavimus, rectam per punctum G, quæ cum rectâ DK parallelâ ſit, hyperbolam in G contingere, ſequitur naſcentes Tt, Rr, eſſe primò inter ſe æquales. Sed propter parallelas CK, Rr, eſt $CK : Rr = CD : DR$. Rectangulum igitur $CK \times DR$ rectangulo $CD \times Rr$ æquale erit. Eidem igitur $CK \times DR$ naſcens illud $CD \times Tt$ primò quidem æquale erit. Unde $Tt = \frac{CK \times DR}{CD}$ primò.

(h) Vide



tas ſub initio motûs. Deinde ex longitudine tangentis rL, datur & huic proportionalis velocitas, & velocitati proportionalis reſiſtentia in loco quovis r.

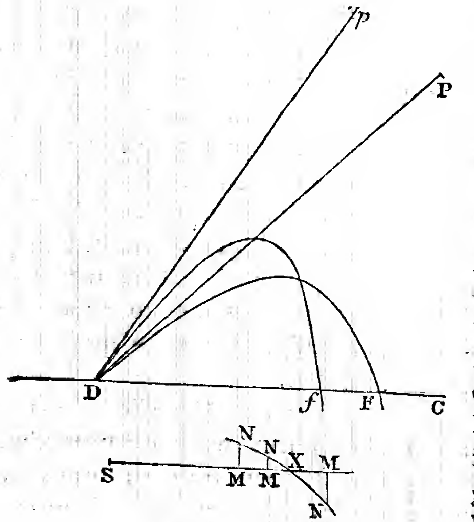
Corol. 6. Cùm autem longitudo 2DP ſit ad latus rectum parabolæ ut gravitas ad reſiſtentiam in D; & ex auctâ velocitate augeatur reſiſtentia in eâdem ratione, at latus rectum parabolæ augeatur in ratione illâ duplicatâ: patet longitudinem 2DP augeri in ratione illâ ſimplici, ideoque velocitati ſemper proportionalem eſſe, neque ex angulo CDP mutato augeri vel minui, niſi mutetur quoque velocitas.

Corol. 7. Unde liquet methodus determinandi Curvam $DraF$ ex phænomenis quamproximè, & inde colligendi reſiſtentiam, & velocitatem quâcum corpus projicitur. Projiciantur corpora duo ſimilia & æqualia eâdem cum velocitate, de loco D, ſecundum angulos diverſos CDP, CDp & cognoſcantur loca F, f, ubi incidunt in horizontale planum DC. Tum, aſſumptâ quâcunque longitudine pro DP vel Dp, fingatur quòd reſiſtentia in D ſit ad gravitatem in ratione quâlibet, & exponatur ratio illa per longitudinem quamvis SM. Deinde per computationem (i), ex longitudine illâ aſſumptâ DP, inveniantur longitudines

(h) Vide Not. c.

(i) —*per computationem*] Quæ ope hyperbolæ GBS faciliimè ineatur; nimirum ſi ducatur recta SM cum aſymptotâ CP parallela, quæ abſcindat aream SBM datæ EBG æqualem, hæc SM cum rectâ DC in ipſo puncto F concurret. Per quodvis enim punctum $'r$ inter punctum altitudinis maximæ a punctumque F, ut ſit $'r$ locus aliquis corporis ab altitudine maximâ jam deſcendentis, ducatur $'V'r'R$ cum aſymptotâ CP parallela, quæ rectis DP, EH, GK, DC, hyperbolæque GBS, in punctis $'V$, $'I$, $'t$, $'R$, $'T$ occurrat. Jam rectangula $Gt'IE$, $N \times 'R'V$ eſſe inter ſe æqualia id ſuprà oſtenſum eſt (Not. b.) Duo igitur $N \times 'V'r$, $N \times 'R'r$, quæ ſimul ſumpta illud $N \times 'R'V$ conficiunt, hæc ſimul ſumpta ſpatiis duobus $'I'tGB$, GBE ſimul ſumptis ſunt æqualia. Additoque communiter ſpatio $B'I'T$, tria $N \times 'V'r$, $N \times 'R'r$, $B'I'T$ ſimul ſumpta duobus $'tG'T$, BGE ſimul ſumptis

longitudines DF, Df, ac de ratione $\frac{Ff}{DF}$ per calculum inventâ, auferatur ratio eadem per experimentum inventa, & exponatur differentia per perpendiculum MN. Idem fac iterum ac tertiò, assumendo semper novam resistentiæ ad gravitatem rationem SM, & colligendo novam differentiam MN. Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ SM, & negativæ ad alteram; & per puncta N, N, N agatur curva regularis NNN secans rectam SMMM in X, & erit SX vera ratio resistentiæ ad gravitatem, quam invenire oportuit. Ex hâc ratione colligenda est longitudo DF per calculum; & longitudo, quæ sit ad assumptam longitudinem DP, ut longitudo DF per experimentum cognita ad longitudinem DF modò inventam, erit vera longitudo DP. Quâ inventâ, habetur tum curva linea DraF quam corpus describit, tum corporis velocitas & resistentia in locis singulis.



Scholium.

Cæterùm, resistentiam corporum esse in ratione velocitatis, hypothesis est magis mathematica quàm naturalis. In mediis, quæ rigore omni vacant, resistentiæ corporum sunt in duplicatâ ratione velocitatum. Etenim actione corporis velocioris communicatur eidem medii quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis; ideoque tempore æquali, ob majorem medii quantitatem

tis sunt æqualia. Trium verò N X 'V'r, N X 'R'r, B'I'T, illud N X 'V'r, è naturâ curvæ DAF spatio 'YG'T est æquale. Quare duo reliqua N X 'R'r, B'I'T simul sumpta spatio BGE sunt æqualia. Quare N X 'R'r illud ipsum est quo spatium BGE spatium B'I'T exsuperat. At verò puncto 'r in ipsum F translato, rectangulum N X 'R'r cum ipsâ rectâ 'R'r in nihilum abierit. Unde spatia BGE, B'I'T æqualia

quantitatem perturbatam, communicatur motus in duplicatâ ratione major; estque resistentia (per motûs Leg. 2 & 3.) ut motus communicatus. Videamus igitur quales oriantur motus ex hâc lege resistentiæ.

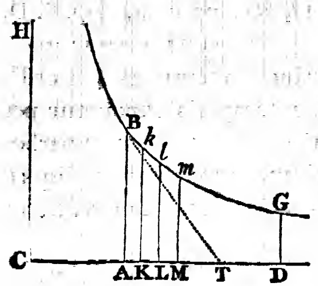
SECTIO II.

De motu corporum quibus resistitur in duplicatâ ratione velocitatum.

PROP. V. THEOR. III.

Si corpori resistitur in velocitatis ratione duplicatâ, & idem solâ vi insitâ per medium similare movetur; tempora verò sumantur in progressione geometricâ à minoribus terminis ad majores pergente: dico, quòd velocitates initio singulorum temporum sunt in eâdem progressione geometricâ inversè; & quòd spatia sunt æqualia, quæ singulis temporibus describuntur.

Nam quoniam quadrato velocitatis proportionalis est resistentia medii, & resistentiæ proportionale est decrementum velocitatis; si tempus in particulas innumeras æquales dividatur, quadrata velocitatum singulis temporum initiis erunt velocitatum earundem differentiis proportionalia. Sunto temporis particulæ illæ AK, KL, LM, &c. in rectâ CD sumptæ, & erigantur perpendicula AB, Kk, Ll, Mm, &c. hyperbolæ BklmG, centro C, asymptotis rectangulis CD, CH descriptæ, occurrentia in B, k, l, m, &c. & erit AB ad Kk ut CK ad CA, & divisim AB$-$Kk ad Kk ut AK ad CA, & vicissim AB$-$Kk ad AK ut Kk ad CA, ideoque ut AB$\times$Kk ad AB$\times$CA. Unde, cùm AK & AB$\times$CA dentur, erit AB$-$Kk ut AB$\times$Kk; & ultimò, ubi coeunt AB & Kk, ut ABq. Et simili argumento erunt K$k-$Ll, L$l-$Mm, &c. ut Kk *quad.* Ll *quad.* &c. Linearum igitur AB, Kk, Ll, Mm quadrata sunt ut earundem differentiæ [a]; & idcirco cùm quadrata

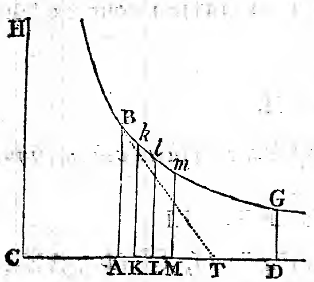


æqualia fient. Definietur igitur punctum F ducendo SM, cum asymptotâ CP parallelam, quæ abscindat aream SMB datæ EBG æqualem. Q. E. D.

[a] Nimirum si Hyperbola BG motu rectæ AB, cum asymptotâ CH parallelæ, super alterâ asymptotâ

De Motu Corporum

drata velocitatum fuerint etiam ut ipſarum differentiæ, ſimilis erit ambarum progreſſio. Quo demonſtrato, conſequens eſt etiam ut areæ, his lineis deſcriptæ, ſint in progreſſione conſimili cum ſpatiis quæ velocitatibus deſcribuntur. Ergo ſi velocitas initio primi temporis AK exponatur per lineam AB, & velocitas initio ſecundi KL per lineam Kk, & longitudo primo tempore deſcripta per aream AKkB; velocitates omnes ſubſequentes exponentur per lineas ſubſequentes Ll, Mm, &c. & longitudines deſcriptæ per areas Ll, Mm, &c. Et compoſite, ſi tempus totum exponatur per ſummam partium ſuarum AM, longitudo tota deſcripta exponetur per ſummam partium ſuarum AMmB ([b]). Concipe jam tempus AM ita dividi in partes AK, KL, LM, &c. ut ſint CA, CK, CL, CM, &c. in progreſſione geometricâ; & erunt partes illæ in eâdem progreſſione, & velocitates AB, Kk, Ll, Mm, &c. in progreſſione eâdem inverſâ, atque ſpatia deſcripta Ak, Kl, Ll, &c. æqualia. Q. E. D.



Corol. 1. Patet ergo quòd, ſi tempus exponatur per aſymptoti partem quamvis AD, & velocitas in principio temporis per ordinatim applicatam AB; velocitas in fine temporis exponetur per ordinatam DG, & ſpatium totum deſcriptum per aream hyperbolicam adjacentem ABGD; necnon ſpatium, quod corpus aliquod eodem tempore AD, velocitate primâ AB, in medio non reſiſtente deſcribere poſſet, per rectangulum AB × AD.

Corol. 2. Unde datur ſpatium in medio reſiſtente deſcriptum, capiendo illud ad ſpatium quod velocitate uniformi AB in medio non reſiſtente ſimul deſcribi poſſet, ut eſt area hyperbolica ABGD ad rectangulum AB × AD.

Corol.

totâ incedentis ſcribatur, fluxiones incedentium AB duplicatam ipſarum AB rationem inter ſe conſtanter ſervant.

Propter datam enim rectanguli CA × AB magnitudinem fluxio ejus nulla erit. Rectangula igitur $\dot{\overline{CA}} \times AB$, $CA \times \dot{\overline{AB}}$, quorum utique differentia, ſiquidem ulla eſſet, fluxio eſſet rectanguli CA × AB, hæc inquam rectangula inter ſe æqualia erunt; ne fluat rectangulum CA × AB, quod è naturâ hyperbolæ manet. Erit igitur $\dot{\overline{AB}}$ ad $\dot{\overline{CA}}$ ut AB ad CA. Hoc eſt, fluxio rectæ AB erit ad fluxionem abſciſſæ AC, ut AB ad CA. Ponatur AB motu uniformi ferri. Itaque conſtans erit fluxio abſciſſæ AC,

Liber Secundus.

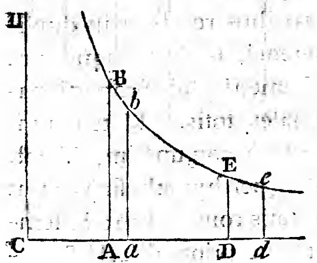
Corol. 3. Datur etiam reſiſtentia medii, ſtatuendo eam ipſo motûs initio æqualem eſſe vi uniformi centripetæ, quæ in cadente corpore, tempore AC, in medio non reſiſtente, generare poſſet velocitatem AB. Nam ſi ducatur BT quæ tangat hyperbolam in B, & occurrat aſymptoto in T; recta AT æqualis erit ipſi AC ([c]), & tempus exponet, quo reſiſtentia prima uniformiter continuata tollere poſſet velocitatem totam AB.

Corol. 4. Et inde datur etiam proportio hujus reſiſtentiæ ad vim gravitatis, aliamve quamvis datam vim centripetam.

Corol. 5. Et vice verſâ, ſi datur proportio reſiſtentiæ ad datam quamvis vim centripetam; datur tempus AC, quo vis centripeta, reſiſtentiæ æqualis, generare poſſit velocitatem quamvis AB: & inde datur punctum B per quod hyperbola, aſymptotis CH, CD, deſcribi debet; ut & ſpatium ABGD, quod corpus incipiendo motum ſuum cum velocitate illâ AB, tempore quovis AD, in medio ſimilari reſiſtente deſcribere poteſt.

PROP. VI. THEOR. IV.

Corpora ſphærica homogenea & æqualia, reſiſtentiis in duplicatâ ratione velocitatum impedita, & ſolis viribus inſitis incitata, temporibus, quæ ſunt reciprocè ut velocitates ſub initio, deſcribunt ſemper æqualia ſpatia, & amittunt partes velocitatum proportionales totis.



Aſymptotis rectangulis CD, CH deſcriptâ hyperbolâ quâvis, BbEe, ſecante perpendicula AB, ab, DE, de, in B, b, E, e, exponantur velocitates initiales per perpendicula AB, DE, & tempora per lineas Aa, Dd. Eſt ergo ut Aa ad Dd ita (per hypotheſin) DE ad AB, & ita (ex naturâ hyperbolæ) CA ad CD;

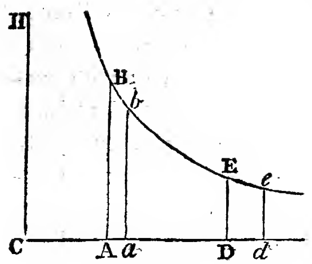
AC, eritque fluxio incedentis AB ad rectam datam ut AB ad CA, ſive ut quadratum ex AB ad rectangulum datum AB × CA. Pari ratione eadem data recta erit ad fluxionem rectæ Mm, ut AB × CA ad quadratum ex Mm. Ex æquo $\dot{\overline{AB}} : \dot{\overline{Mm}} = AB^2 : Mm^2$. Q. E. D.

Velocitates igitur, quarum fluxiones duplicatam ipſarum rationem inter ſe conſtanter ſervant, lineis AB, Kk, Ll, Mm, quibus ſimilis eſt decreſcendi lex, haud incommodè repreſentari poterunt.

([b]) Vide Lib. 1. Sect. I. Lemma x. Not. [g].

([c]) Patet per Prop. XXXVI. Lib. 1. Conicorum Hamiltoni.

&



& componendo, ita Ca ad Cd. Ergo areæ AB*ba*, DE*ed*, hoc eſt, ſpatia deſcripta æquantur inter ſe, & velocitates primæ AB, DE ſunt ultimis *ab*, *de*, & propterea, dividendo, partibus etiam ſuis amiſſis, AB$-$*ab*, DE$-$*de*, proportionales. Q. E. D.

PROP. VII. THEOR. V.

Corpora ſphærica quibus reſiſtitur in duplicatâ ratione velocitatum, temporibus, quæ ſunt ut motus primi directè & reſiſtentiæ primæ inverſè, amittent partes motuum proportionales totis, & ſpatia deſcribent temporibus iſtis & velocitatibus primis conjunctim proportionalia.

Namque motuum partes amiſſæ ſunt ut reſiſtentiæ & tempora conjunctim. Igitur ut partes illæ ſint totis proportionales, debebit reſiſtentia & tempus conjunctim eſſe ut motus. Proinde tempus erit ut motus directè & reſiſtentia inverſè. Quare temporum particulis in eâ ratione ſumptis, corpora amittent ſemper particulas motuum proportionales totis, ideoque retinebunt velocitates velocitatibus ſuis primis ſemper proportionales. Et ob datam velocitatum rationem, deſcribent ſemper ſpatia, quæ ſunt ut velocitates primæ & tempora conjunctim. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur ſi æquivelocibus corporibus reſiſtitur in duplicatâ ratione diametrorum: globi homogenei, quibuſcunque cum velocitatibus moti, deſcribendo ſpatia diametris ſuis proportionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim globi cujuſque erit ut ejus velocitas & maſſa conjunctim, id eſt, ut velocitas & cubus diametri; reſiſtentia (per hypotheſin) erit ut quadratum diametri & quadratum velocitatis conjunctim; & tempus (per hanc propoſitionem) eſt in ratione priore directè & ratione poſteriore inverſè, id eſt, ut diameter directè & velocitas inverſè; ideoque ſpatium, tempori & velocitati proportionale, eſt ut diameter.

Corol. 2. Si æquivelocibus corporibus reſiſtitur in ratione ſeſquiplicatâ diametrorum: globi homogenei quibuſcunque cum ve-

6 locitatibus

locitatibus moti, deſcribendo ſpatia in ſeſquiplicatâ ratione diametrorum, amittent partes motuum proportionales totis.

Corol. 3. Et univerſaliter, ſi æquivelocibus corporibus reſiſtitur in ratione dignitatis cujuſcunque diametrorum: ſpatia, quibus globi homogenei, quibuſcunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicati. Sunto diametri D & E; & ſi reſiſtentiæ, ubi velocitates æquales ponuntur, ſint ut D^n & E^n: ſpatia, quibus globi quibuſcunque cum velocitatibus moti amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut D^{3-n} & E^{3-n}. Et propterea globi homogenei deſcribendo ſpatia ipſis D^{3-n} & E^{3-n} proportionalia, retinebunt velocitates in eâdem ratione ad invicem ac ſub initio.

Corol. 4. Quòd ſi globi non ſint homogenei, ſpatium à globo denſiore deſcriptum augeri debet in ratione denſitatis. Motus enim, ſub pari velocitate, major eſt in ratione denſitatis, & tempus (per hanc propoſitionem) augetur in ratione motus directè, ac ſpatium deſcriptum in ratione temporis.

Corol. 5. Et ſi globi moveantur in mediis diverſis; ſpatium in medio, quod cæteris paribus magis reſiſtit, diminuendum erit in ratione majoris reſiſtentiæ. Tempus enim (per hanc propoſitionem) diminuetur in ratione reſiſtentiæ auctæ, & ſpatium in ratione temporis.

LEMMA II.

Momentum Genitæ æquatur momentis Laterum ſingulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum & coefficientia continuè ductis.

Genitam voco quantitatem omnem, quæ ex lateribus vel terminis quibuſcunque in Arithmeticâ per multiplicationem, diviſionem, & extractionem radicum; in Geometriâ per inventionem vel contentorum & laterum, vel extremarum & mediarum proportionalium, ſine additione & ſubductione generatur. Ejuſmodi quantitates ſunt facti, quoti, radices, rectangula, quadrata, cubi, latera quadrata, latera cubica, & ſimiles. Has quantitates, ut indeterminatas & inſtabiles, & quaſi motu fluxuve perpetuo creſcentes vel decreſcentes, hîc conſidero; & earum incrementa

vel

vel decrementa momentanea ſub nomine momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis additiis, ſeu affirmativis, ac decrementa pro ſubductitiis, ſeu negativis, habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Particulæ finitæ non ſunt momenta, ſed quantitates ipſæ ex momentis genitæ. Intelligenda ſunt principia jamjam naſcentia finitarum magnitudinum. Neque enim ſpectatur in hoc Lemmate magnitudo momentorum, ſed prima naſcentium proportio. Eodem recidit ſi loco momentorum uſurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum (quas etiam motus, mutationes & fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates velocitatibus hiſce proportionales. Lateris autem cujuſque generantis coefficiens eſt quantitas, quæ oritur applicando genitam ad hoc latus.

Igitur ſenſus Lemmatis eſt, ut, ſi quantitatum quarumcunque perpetuo motu creſcentium vel decreſcentium A, B, C, &c. momenta, vel his proportionales mutationum velocitates dicantur a, b, c, &c. momentum vel mutatio geniti rectanguli, AB, fuerit $aB + bA$; & geniti contenti ABC momentum fuerit $aBC + bAC + cAB$: & genitarum dignitatum A^2, A^3, A^4, $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{3}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, A^{-1}, A^{-2}, & $A^{-\frac{1}{2}}$ momenta $2aA$, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{2}aA^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$, & $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$ reſpectivè. Et generaliter, ut dignitatis cujuſcunque $A^{\frac{n}{m}}$ momentum fuerit $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$. Item ut genitæ A^2B momentum fuerit $2aAB + bA^2$; & genitæ $A^3B^4C^2$ momentum $3aA^2B^4C^2 + 4bA^3B^3C^2 + 2cA^3B^4C$; & genitæ $\frac{A^3}{B^2}$, ſive A^3B^{-2}, momentum $3aA^2B^{-2} - 2bA^3B^{-3}$: & ſic in cæteris. Demonſtratur verò Lemma in hunc modum.

Caſ. 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum, AB, ubi de lateribus A & B deerant momentorum dimidia $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, fuit $A - \frac{1}{2}a$ in $B - \frac{1}{2}b$, ſeu $AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$; & quàm primùm latera A & B alteris momentorum dimidiis aucta ſunt, evadit $A + \frac{1}{2}a$ in $B + \frac{1}{2}b$, ſeu $AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$. De hoc rectangulo ſubducatur rectangulum prius, & manebit exceſſus $aB + bA$. Igitur laterum incrementis totis a & b generatur rectanguli incrementum $aB + bA$. Q. E. D.

Caſ. 2. Ponatur AB ſemper æquale G; & contenti ABC, ſeu GC, momentum (per Caſ. 1) erit $gC + cG$, id eſt (ſi pro G & g ſcribantur AB & $aB + bA$) $aBC + bAC + cAB$. Et par eſt ratio contenti ſub lateribus quotcunque. Q. E. D.

Caſ. 3. Ponantur latera A, B, C ſibi mutuò ſemper æqualia; & ipſius A^2, id eſt rectanguli AB, momentum $aB + bA$ erit $2aA$; ipſius autem A^3, id eſt contenti ABC, momentum $aBC + bAC + cAB$ erit $3aA^2$. Et eodem argumento momentum dignitatis cujuſcunque A^n eſt naA^{n-1}. Q. E. D.

Caſ. 4. Unde cùm $\frac{1}{A}$ in A ſit 1, momentum ipſius $\frac{1}{A}$ ductum in A, unâ cum $\frac{1}{A}$ ducto in a, erit momentum ipſius 1, id eſt, nihil. Proinde momentum ipſius $\frac{1}{A}$, ſeu ipſius A^{-1}, eſt $\frac{-a}{A^2}$. Et generaliter cùm $\frac{1}{A^n}$ in A^n ſit 1, momentum ipſius $\frac{1}{A^n}$ ductum in A^n unà cum $\frac{1}{A^n}$ in naA^{n-1} erit nihil. Et propterea momentum ipſius $\frac{1}{A^n}$, ſeu A^{-n}, erit $-\frac{na}{A^{n+1}}$. Q. E. D.

Caſ. 5. Et cùm $A^{\frac{1}{2}}$ in $A^{\frac{1}{2}}$ ſit A, momentum ipſius $A^{\frac{1}{2}}$ ductum in $2A^{\frac{1}{2}}$ erit a, per Caſ. 3: ideoque momentum ipſius $A^{\frac{1}{2}}$ erit $\frac{a}{2A^{\frac{1}{2}}}$ ſive $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$. Et generaliter ſi ponatur $A^{\frac{m}{n}}$ æquale B, erit A^m æquale B^n, ideoque maA^{m-1} æquale nbB^{n-1}, & maA^{-1} æquale nbB^{-1}, ſeu $nbA^{-\frac{m}{n}}$; ideoque $\frac{m}{n}aA^{\frac{m-n}{n}}$ æquale b, id eſt, æquale momento ipſius $A^{\frac{m}{n}}$. Q. E. D.

Caſ. 6. Igitur Genitæ cujuſcunque, A^mB^n, momentum eſt momentum ipſius A^m ductum in B^n, unà cum momento ipſius B^n ducto in A^m, id eſt $maA^{m-1}B^n + nbB^{n-1}A^m$; idque ſive dignitatum indices m & n ſint integri numeri vel fracti, ſive affirmativi vel negativi. Et par eſt ratio contenti ſub pluribus dignitatibus. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc in continuè proportionalibus, ſi terminus unus datur, momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem termini multiplicati per numerum intervallorum inter ipſos & terminum datum. Sunto A, B, C, D, E, F continuè proportionales; & ſi detur terminus C, momenta reliquorum terminorum erunt inter ſe ut $-2A$, $-B$, D, $2E$, $3F$.

Corol. 2. Et ſi in quatuor proportionalibus duæ mediæ dentur, momenta extremarum erunt ut eædem extremæ. Idem intelligendum eſt de lateribus rectanguli cujuſcunque dati.

Corol.

De Motu Corporum

Corol. 3. Et ſi ſumma vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciprocè ut latera.

Scholium.

In Epiſtolâ quâdam ad D. *J. Collinium* noſtratem 10 Decem. 1672 datâ, cùm deſcripſiſſem methodum Tangentium, quam ſuſpicabar eandem eſſe cum methodo *Sluſii* tum nondum communicatâ, ſubjunxi: *Hoc eſt unum particulare, vel Corollarium potiùs, methodi generalis, quæ extendit ſe citra moleſtum ullum calculum, non modò ad ducendum tangentes ad quaſvis Curvas, ſive Geometricas, ſive Mechanicas, vel quomodocunque rectas lineas aliaſve Curvas reſpicientes, verùm etiam ad reſolvendum alia abſtruſiora Problematum genera de Curvitatibus, Areis, Longitudinibus, Centris Gravitatis Curvarum, &c. neque (quemadmodum* Huddenii *methodus de Maximis & Minimis) ad ſolas reſtringitur æquationes illas quæ quantitatibus ſurdis ſunt immunes. Hanc methodum intertexui alteri iſti, quâ æquationum exegeſin inſtituo, reducendo eas ad ſeries infinitas.* Hactenus Epiſtola. Et hæc ultima verba ſpectant ad tractatum quem anno 1671 de his rebus ſcripſeram. Methodi verò hujus generalis fundamentum continetur in lemmate præcedente (d).

PROP. VIII. THEOR. VI.

Si corpus in medio uniformi, gravitate uniformiter agente, rectâ aſcendat vel deſcendat, & ſpatium totum deſcriptum diſtinguatur in partes æquales, inque principiis ſingularum partium (addendo reſiſtentiam medii ad vim gravitatis, quando corpus aſcendit, vel ſubducendo ipſam quando corpus deſcendit) inveſtigentur vires abſolutæ; dico, quòd vires illæ abſolutæ ſunt in progreſſione geometricâ.

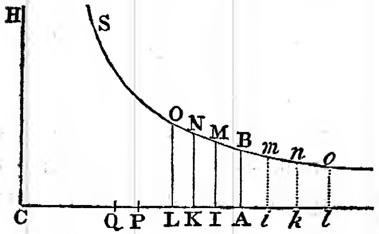
Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam AC; reſiſtentia per lineam indefinitam AK; vis abſoluta in deſcenſu corporis per differentiam KC; velocitas corporis per lineam AP, quæ ſit media proportionalis

(d) *Scholium Editionis Primæ & Secundæ.*

In literis quæ mihi cum Geometrâ peritiſſimo *G. G. Leibnitio* annis abhinc decem intercedebant, cùm ſignificarem me compotem eſſe methodi determinandi Maximas & Minimas, ducendi Tangentes, & ſimilia peragendi, quæ in terminis ſurdis æquè ac in rationalibus procederet, & literis tranſpoſitis hanc ſententiam involventibus [Datâ æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire, & vice verſâ] eandem celarem: reſcripſit Vir Clariſſimus, ſe quoque in ejuſmodi methodum incidiſſe, & methodum ſuam communicavit à meâ vix abludentem præterquam

Liber Secundus.

proportionalis inter AK & AC, ideoque in ſubduplicatâ ratione reſiſtentiæ; incrementum reſiſtentiæ, datâ temporis particulâ, factum per lineolam KL, & contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam PQ; & centro C, aſymptotis rectangulis, CA, CH, deſcribatur hyperbola quævis BNS, erectis perpendiculis AB, KN, LO occurrens in B, N, O. Quoniam AK eſt ut AP*q*, erit



hujus momentum KL ut illius momentum 2APQ: id eſt, ut AP in KC; nam velocitatis incrementum PQ (per motûs Leg. 2.) proportionale eſt vi generanti KC. Componatur ratio ipſius KL cum ratione ipſius KN, & fiet rectangulum KL×KN ut AP×KC×KN; hoc eſt, ob datum rectangulum KC×KN, ut AP. Atqui areæ hyperbolicæ KNOL ad rectangulum KL×KN ratio ultima, ubi coeunt puncta K & L, eſt æqualitatis. Ergo area illa hyperbolica evaneſcens eſt ut AP. Componitur igitur area tota hyperbolica ABOL ex particulis KNOL velocitati AP ſemper proportionalibus, & propterea ſpatio velocitate iſtâ deſcripto proportionalis eſt (e). Dividatur jam area illa in partes æquales ABMI, IMNK, KNOL, &c. & vires abſolutæ AC, IC, KC, LC, &c. erunt in progreſſione geometricâ. Q. E. D. Et ſimili argumento, in aſcenſu corporis, ſumendo, ad contrariam partem puncti A, æquales areas AB*mi*, *imnk*, *knol*, &c. conſtabit quòd vires abſolutæ AC, *i*C, *k*C, *l*C, &c. ſunt continuè proportionales. Ideoque ſi ſpatia omnia in aſcenſu & deſcenſu capiantur æqualia; omnes vires abſolutæ *l*C, *k*C, *i*C, AC, IC, KC, LC, &c. erunt continuè proportionales. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi ſpatium deſcriptum exponatur per aream hyperbolicam ABNK; exponi poſſunt vis gravitatis, velocitas corporis, & reſiſtentia medii per lineas AC, AP & AK reſpectivè; & vice verſâ.

præterquam in verborum & notarum * formulis & Ideâ generationis quantitatum *. Utriuſque fundamentum continetur in hoc Lemmate.

(e) Nimirum, tempore æquabiliter fluente, area BALO eâ lege fluit, ut illius fluxiones velocitatum corporis cadentis inter ſe rationes gerant. Sed tempore æquabiliter fluente, ſpatii, quod caſu recto corporis conficitur, fluxiones velocitatum quoque rationes induent. Areæ igitur BALO ſpatiique quod caſu recto corporis conficitur, fluxiones proportione inter ſe convenient. Area igitur ipſa ſpatiumque, cùm ſimul à nihilo generari inceperint, proportione inter ſe convenient. (Geometr. Flux. Prop. IV.)

* Hæc verba ſunt editionis ſecundæ. A primâ aberant.

Corol.

Corol. 2. Et velocitatis maximæ, quam corpus, in infinitum descendendo, poteſt unquam acquirere, exponens eſt linea AC.

Corol. 3. Igitur ſi in datâ aliquâ velocitate cognoſcatur reſiſtentia medii, invenietur velocitas maxima, ſumendo ipſam ad velocitatem illam datam in ſubduplicatâ ratione, quam habet vis gravitatis ad medii reſiſtentiam illam cognitam.

PROP. IX. THEOR. VII.

Poſitis jam demonſtratis, dico quòd, ſi tangentes angulorum ſectoris circularis & ſectoris hyperbolici ſumantur velocitatibus proportionales, exiſtente radio juſtæ magnitudinis: erit tempus omne aſcendendi ad locum ſummum ut ſector circuli, & tempus omne deſcendendi à loco ſummo ut ſector hyperbolæ.

Rectæ AC, quâ vis gravitatis exponitur, perpendicularis & æqualis ducatur AD. Centro D, ſemidiametro AD, deſcribatur tum circuli quadrans AtE; tum hyperbola rectangula AVZ axem habens AX, verticem principalem A, & aſymptoton DC. Ducantur Dp, DP, & erit ſector circularis AtD ut tempus omne aſcendendi ad locum ſummum; & ſector hyperbolicus ATD ut tempus omne deſcendendi à loco ſummo: ſi modò ſectorum tangentes Ap, AP ſint ut velocitates.

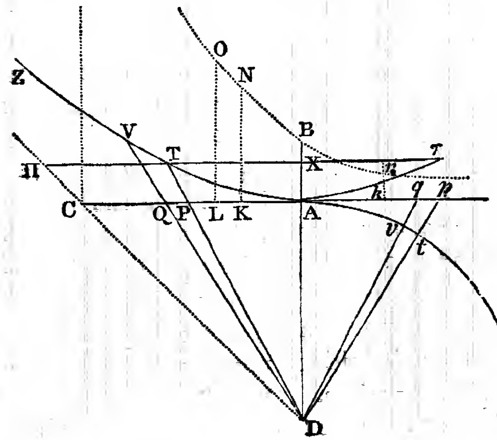
Caſ. 1. Agatur enim Dvq abſcindens ſectoris ADt & trianguli ADp momenta, ſeu particulas quàm minimas ſimul deſcriptas, tDv & Dpq. Cùm particulæ illæ, ob angulum communem D, ſunt in duplicatâ ratione laterum, erit particula tDv ut $\frac{q\mathrm{D}p \times t\mathrm{D}\ \text{quad.}}{p\mathrm{D}\ \text{quad.}}$, id eſt, ob datam tD, ut $\frac{q\mathrm{D}p}{p\mathrm{D}\ \text{quad.}}$. Sed pD *quad.* eſt AD *quad.* + Ap *quad.* id eſt, AD *quad.* + AD × Ak (f), ſeu AD × Ck; & qDp eſt $\frac{1}{2}$AD × pq. Ergo ſectoris particula tDv eſt ut $\frac{pq}{Ck}$; id eſt, ut velocitatis decrementum quàm minimum pq directè, & vis illa Ck, quæ velocitatem diminuit, inverſè; atque ideo ut particula temporis decremento velocitatis reſpondens (g). Et, componendo, fit ſumma particularum

(f) Sive AC quad. + AC × Ak; id eſt (Elem. II. 3.) AC × Ck, ſive propter AC, AD inter ſe æquales, AD × Ck.

(g) Nam fluxio velocitatis, erit ut vis illa quæ velocitatem mutat, & fluxio temporis conjunctim. Quare fluxio temporis erit ut fluxio velocitatis directè et vis illa quæ velocitatem mutat, contrariè.

ticularum omnium tDv in ſectore ADt, ut ſumma particularum temporis ſingulis velocitatis decreſcentis Ap particulis amiſſis pq reſpondentium, uſque dum velocitas illa in nihilum diminuta evanuerit; hoc eſt, ſector totus ADt eſt ut tempus totum aſcendendi ad locum ſummum. Q. E. D.

Caſ. 2. Agatur DQV abſcindens tum ſectoris DAV, tum trianguli DAQ particulas quàm minimas TDV & PDQ; & erunt hæ particulæ ad invicem ut DTq ad DPq, id eſt (ſi TX & AP parallelæ ſint) ut DXq ad DAq vel TXq ad APq, & diviſim ut DXq−TXq ad DAq−APq. Sed, ex naturâ hyperbolæ, DXq−TXq eſt ADq, & per hypotheſin APq eſt AD × AK. Ergo particulæ ſunt ad invicem ut ADq ad ADq − AD × AK; id eſt, ut AD ad AD − AK, ſeu AC ad CK: ideoque ſectoris particula TDV eſt $\frac{\mathrm{PDQ} \times \mathrm{AC}}{\mathrm{CK}}$ (h); atque ideo ob datas AC & AD, ut $\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{CK}}$, id eſt, ut incrementum velocitatis directè, utque vis generans incrementum inverſè; atque ideo ut particula temporis incremento reſpondens (i). Et componendo fit ſumma particularum temporis, quibus omnes velocitatitis AP particulæ PQ generantur, ut ſumma particularum ſectoris ATD, id eſt, tempus totum ut ſector totus. Q. E. D.



Corol. 1. Hinc ſi AB æquetur quartæ parti ipſius AC, ſpatium, quod corpus tempore quovis cadendo deſcribit, erit ad ſpatium, quod corpus velocitate maximâ AC, eodem tempore uniformiter progrediendo deſcribere poteſt, ut area ABNK, quâ ſpatium ca-

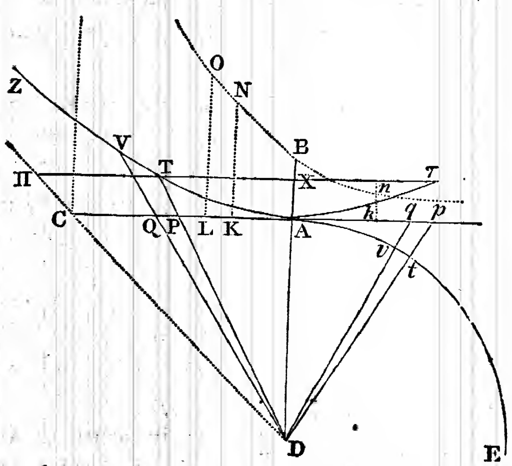
contrariè.

(h) Sive $\frac{\frac{1}{2}\mathrm{AD} \times \mathrm{PQ} \times \mathrm{AC}}{\mathrm{CK}}$.

(i) Vide Not. g.

dendo

dendo deſcriptum exponitur, ad aream ATD, quâ tempus exponitur. Nam cùm ſit AC ad AP ut AP ad AK, erit (per Corol. 1. Lem. 2. hujus) LK ad PQ ut 2AK ad AP, hoc eſt, ut 2AP ad AC, & inde LK ad $\frac{1}{2}$PQ ut AP ad $\frac{1}{4}$AC, vel AB; eſt & KN ad AC, vel AD, ut AB ad CK; itaque ex æquo LKNO ad DPQ ut AP ad CK. Sed erat DPQ ad DTV ut CK ad AC. Ergo rurſus ex æquo LKNO eſt ad DTV ut AP ad AC; hoc eſt, ut velocitas corporis cadentis ad velocitatem maximam, quam corpus cadendo poteſt acquirere. Cùm igitur arearum ABNK & ATD momenta, LKNO & DTV, ſunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes ſimul genitæ ut ſpatia ſimul deſcripta, ideoque areæ totæ ab initio genitæ ABNK & ATD ut ſpatia tota ab initio deſcenſûs deſcripta. Q. E. D.



Corol. 2. Idem conſequitur etiam de ſpatio, quod in aſcenſu deſcribitur. Nimirum quòd ſpatium illud omne ſit ad ſpatium, uniformi cum velocitate AC eodem tempore deſcriptum, ut eſt area AB*nk* ad ſectorem AD*t*.

Corol. 3. Velocitas corporis tempore ATD cadentis eſt ad velocitatem, quam eodem tempore in ſpatio non reſiſtente acquireret, ut triangulum APD ad ſectorem hyperbolicum ATD. Nam velocitas in medio non reſiſtente foret ut tempus ATD, & in medio reſiſtente eſt ut AP, id eſt, ut triangulum APD. Et velocitates illæ initio deſcenſûs æquantur inter ſe, perinde ut areæ illæ ATD, APD.

Corol. 4. Eodem argumento velocitas in aſcenſu eſt ad velocitatem, quâ corpus eodem tempore in ſpatio non reſiſtente omnem ſuum aſcendendi motum amittere poſſet, ut triangulum A*p*D ad ſectorem circularem A*t*D; ſive ut recta A*p* ad arcum A*t*.

Corol.

Corol. 5. Eſt igitur tempus, quo corpus in medio reſiſtente cadendo velocitatem AP acquirit, ad tempus, quo velocitatem maximam AC in ſpatio non reſiſtente cadendo acquirere poſſet, ut ſector ADT ad triangulum ADC: & tempus, quo velocitatem A*p* in medio reſiſtente aſcendendo poſſit amittere, ad tempus quo velocitatem eandem in ſpatio non reſiſtente aſcendendo poſſet amittere, ut arcus A*t* ad ejus tangentem A*p*.

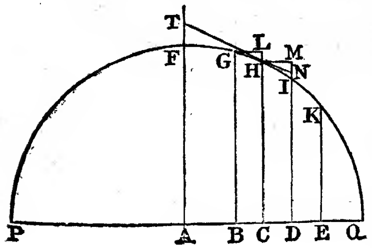
Corol. 6. Hinc ex dato tempore datur ſpatium aſcenſu vel deſcenſu deſcriptum. Nam corporis in infinitum deſcendentis datur velocitas maxima (per Corol. 2 & 3. Theor. VI. Lib. 2.) indeque datur tempus quo corpus velocitatem illam in ſpatio non reſiſtente cadendo poſſet acquirere. Et ſumendo ſectorem ADT, vel AD*t*, ad triangulum ADC in ratione temporis dati ad tempus modò inventum; dabitur tum velocitas AP vel A*p*, tum area ABNK vel AB*nk*, quæ eſt ad ſectorem ADT vel AD*t* ut ſpatium quæſitum ad ſpatium, quod tempore dato, cum velocitate illâ maximâ jam antè inventâ, uniformiter deſcribi poteſt.

Corol. 7. Et regrediendo, ex dato aſcenſûs vel deſcenſûs ſpatio AB*nk* vel ABNK, dabitur tempus AD*t* vel ADT.

PROP. X. PROB. III.

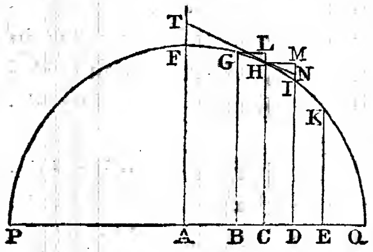
Tendat uniformis vis gravitatis directè ad planum horizontis, ſitque reſiſtentia ut medii denſitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum medii denſitas in locis ſingulis, quæ faciat ut corpus in datâ quâvis lineâ curvâ moveatur; tum corporis velocitas & medii reſiſtentia in locis ſingulis.

Sit PQ planum illud plano ſchematis perpendiculare; PFHQ linea curva plano huic occurrens in punctis P & Q; G, H, I, K loca quatuor corporis, in hâc Curvâ, ab F ad Q pergentis; & GB, HC, ID, KE Ordinatæ quatuor parallelæ ab his punctis ad horizontem demiſſæ, & lineæ horizontali PQ ad puncta B, C, D, E inſiſtentes; & ſint BC, CD, DE diſtantiæ Ordinatarum inter ſe æquales. A punc-



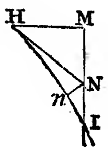
tis

tis G & H ducantur rectæ, GL, HN, Curvam tangentes in G & H, & ordinatis, CH, DI, ſurſum productis occurrentes in L & N; & compleatur parallelogrammum HCDM. Et tempora, quibus corpus deſcribit arcus GH, HI, erunt in ſubduplicatâ ratione altitudinum, LH, NI, quas corpus temporibus illis deſcribere poſſet, à tangentibus cadendo; & velocitates erunt ut longitudines de-



ſcriptæ, GH, HI, directè, & tempora inverſè. Exponantur tempora per T & t, & velocitates per $\frac{GH}{T}$ & $\frac{HI}{t}$; & decrementum velocitatis, tempore t factum, exponetur per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur à reſiſtentiâ corpus retardante, & gravitate corpus accelerante. Gravitas, in corpore cadente & ſpatium NI cadendo deſcribente, generat velocitatem, quâ duplum illud ſpatium eodem tempore deſcribi potuiſſet, ut *Galilæus* demonſtravit; id eſt, velocitatem $\frac{2NI}{t}$: at in corpore arcum HI deſcribente, auget arcum illum ſolâ longitudine HI − HN, ſeu $\frac{MI \times NI}{HI}$ (k); ideoque generat tantùm velocitatem $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Addatur hæc velocitas ad decrementum prædictum, & habebitur decrementum velocitatis ex reſiſtentiâ ſolâ oriundum, nempe $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Proindeque cùm gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem

2NI



(k) Centro H, radio HN, ſcribatur arcus circularis Nn, qui Curvæ HI in n occurrat. Evaneſcente arcu HI, erunt HN, Hn ultimò æquales. Unde HI − HN = In. Angulus autem InN, cùm rectus ultimò fiat, recto IMH erit ultimò æqualis. Angulusque MIH figuris duabus MIH, nIN eſt communis. Quare evaneſcente arcu HI, figuræ illæ ultimò fiunt triangula, inter ſe ſimilia, contrariè poſita. Quare lineis NI, In, eadem quæ illis HI, IM erit ratio ultima. Rectangula igitur MI × NI, HI × In ultimò inter ſe æqualia. Unde In, ſive HI − HN, $= \frac{MI \times NI}{HI}$ ultimò.

(l) Vide Lib. I. Sect. XIII. Scholium, Not. c.

(m) Nempe GH $= o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRo^2}{\sqrt{1+QQ}}$.

Quare $\frac{t \times GH}{T} = \frac{Ro + \frac{3}{2}So^2}{R}\sqrt{1+QQ} - \frac{Ro^2 + \frac{3}{2}So^3}{\sqrt{1+QQ}}Q$.

Sed

$\frac{2NI}{t}$; reſiſtentia erit ad gravitatem ut $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ ad $\frac{2NI}{t}$, ſive ut $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$ ad 2NI.

Jam pro abſciſſis CB, CD, CE ſcribatur $-o$, o, $2o$. Pro ordinatâ CH ſcribatur P, & pro MI ſcribatur ſeries quælibet $Qo + Roo + So^3 +$ &c. Et ſeriei termini omnes poſt primum, nempe $Roo + So^3 +$ &c. erunt NI (l), & ordinatæ DI, EK, & BG erunt $P - Qo - Roo - So^3 -$ &c. $P - 2Qo - 4Roo - 8So^3 -$ &c. & $P + Qo - Roo + So^3 -$ &c. reſpectivè. Et quadrando differentias ordinatarum, BG − CH, & CH − DI, & ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipſarum BC, CD, habebuntur arcuum GH, HI quadrata; $oo + QQoo - 2QRo^3 +$ &c. & $oo + QQoo + 2QRo^3 +$ &c. Quorum radices $o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$, & $o\sqrt{1+QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ ſunt arcus GH & HI. Præterea, ſi ab ordinatâ CH ſubducatur ſemiſumma ordinatarum BG ac DI, & ab ordinatâ DI ſubducatur ſemiſumma ordinatarum CH & EK, manebunt arcuum GI & HK ſagittæ, Roo, & $Roo + 3So^3$. Et hæ ſunt lineolis LH & NI proportionales, ideoque in duplicatâ ratione temporum infinitè parvorum T & t: & inde ratio $\frac{t}{T}$ eſt $\sqrt{\frac{R+3So}{R}}$, ſeu $\frac{R + \frac{3}{2}So}{R}$; & $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$, ſubſtituendo ipſorum $\frac{t}{T}$, GH, HI, MI & NI valores jam inventos, evadit $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$ (m). Et cùm 2NI ſit $2Roo$, reſiſtentia jam erit ad gravitatem ut $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$ ad $2Roo$, id eſt, ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$.

Velocitas autem ea eſt, quâcum corpus de loco quovis H, ſecundum tangentem HN egrediens, in parabolâ, diametrum HC &

Sed HI $= o\sqrt{1+QQ} + \frac{QRo^2}{\sqrt{1+QQ}} = \frac{Ro\sqrt{1+QQ}}{R} + \frac{Ro^2}{\sqrt{1+QQ}}Q$.

Quare $\frac{t \times GH}{T} - HI = \frac{\frac{3}{2}So^2}{R}\sqrt{1+QQ} - \frac{2Ro^2 + {}^3So^3}{\sqrt{1+QQ}}Q$.

Rurſum evaneſcente o, MI $= Qo$ ultimò, & NI $= Ro^2$ ultimò.

Quare $2MI \times NI = 2Ro^3Q$ ultimò.

Et $\frac{2MI \times NI}{HI} = \frac{2Ro^3}{o\sqrt{1+QQ} + \frac{QRo^2}{\sqrt{1+QQ}}}Q = \frac{2Ro^2}{\sqrt{1+QQ}}Q$ ultimò.

Quare $\frac{t \times GA}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI} = \frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ} - \frac{3So^3Q}{2\sqrt{1+QQ}} = \frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$ ultimò.

latus

latus rectum $\frac{HNq}{NI}$ ſeu $\frac{1+QQ}{R}$ (n) habente, deinceps in vacuo moveri poteſt.

Et reſiſtentia eſt ut medii denſitas & quadratum velocitatis conjunctim; & propterea medii denſitas eſt ut reſiſtentia directè & quadratum velocitatis inverſè, id eſt, ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directè, & $\frac{1+QQ}{R}$ inverſè, hoc eſt, ut $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$. Q. E. I.

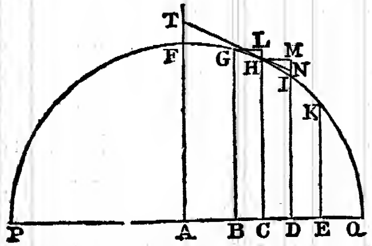
Corol. 1. Si tangens HN producatur utrinque donec occurrat ordinatæ cuilibet AF in T: erit $\frac{HT}{AC}$ æqualis $\sqrt{1+QQ}$ (o), ideoque in ſuperioribus pro $\sqrt{1+QQ}$ ſcribi poteſt. Quâ ratione reſiſtentia erit ad gravitatem ut $3S \times HT$ ad $4RR \times AC$, velocitas erit ut $\frac{HT}{AC\sqrt{R}}$, & medii denſitas erit ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$.

Corol. 2. Et hinc, ſi curva linea PFHQ definiatur per relationem inter baſem, ſeu abſciſſam, AC, & ordinatim applicatam CH, ut moris eſt; & valor ordinatim applicatæ reſolvatur in ſeriem convergentem: Problema per primos ſeriei terminos expeditè ſolvetur, ut in Exemplis ſequentibus.

Exempl. 1. Sit linea PFHQ ſemicirculus ſuper diametro PQ deſcriptus, & requiratur medii denſitas, quæ faciat, ut projectile in hâc lineâ moveatur.

Biſecetur diameter PQ in A; dic AQ, n; AC, a; CH, e; & CD, o: & erit DIq ſeu $AQq - ADq = nn - aa - 2ao - oo$, ſeu $ee - 2ao - oo$, & radice per methodum noſtram (p) extractâ, fiet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aaoo}{2e^3} - \frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^5} -$ &c. Hîc ſcribatur nn pro $ee+aa$, & evadet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5} -$ &c.

Hujuſmodi ſeries diſtinguo in terminos ſucceſſivos in hunc modum. Terminum primum appello, in quo quantitas infinitè parva o non extat; ſecundum, in quo quantitas illa eſt unius dimenſionis; tertium, in quo extat duarum; quartum, in quo trium eſt; & ſic in infinitum. Et primus terminus, qui hîc eſt e, denotabit ſemper longitudinem ordinatæ, CH, inſiſtentis ad initium indefinitæ quantitatis o. Secundus terminus, qui hîc eſt $\frac{ao}{e}$, denotabit differentiam inter CH & DN, id eſt, lineolam MN, quæ abſcinditur complendo parallelogrammum HCDM, atque ideo poſitionem tangentis HN ſemper determinat; ut in hoc caſu capiendo MN ad HM ut eſt $\frac{ao}{e}$ ad o, ſeu a ad e. Terminus tertius, qui hîc eſt $\frac{nnoo}{2e^3}$, deſignabit lineolam IN, quæ jacet inter tangentem & Curvam; ideoque determinat angulum contactûs IHN, ſeu curvaturam quam curva linea habet in H. Si lineola illa IN finitæ eſt magnitudinis, deſignabitur per terminum tertium unà cum ſequentibus in infinitum. At ſi lineola illa minuatur in infinitum, termini ſequentes evadent infinitè minores tertio, ideoque negligi poſſunt. Terminus quartus determinat variationem curvaturæ, quintus variationem variationis, & ſic deinceps. Unde obiter patet uſus non contemnendus harum ſerierum in ſolutione Problematum, quæ pendent à Tangentibus & Curvaturâ Curvarum (q).



Conferatur jam ſeries $e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5} -$ &c. cum ſerie $P - Qo - Roo - So^3 -$ &c. & perinde pro P, Q, R & S, ſcribatur e, $\frac{a}{e}$, $\frac{nn}{2e^3}$, & $\frac{ann}{2e^5}$, & pro $\sqrt{1+QQ}$ ſcribatur $\sqrt{1+\frac{aa}{ee}}$, ſeu $\frac{n}{e}$; & prodibit medii denſitas ut $\frac{a}{ne}$, hoc eſt (ob datam n) ut $\frac{a}{e}$, ſeu $\frac{AC}{CH}$, id eſt, ut tangentis longitudo illa HT (r), quæ ad ſemidiametrum AF ipſi PQ normaliter inſiſtentem, terminatur: & reſiſtentia erit ad gravitatem ut

(n) Nempe $HN^2 = HM^2 + MN^2$. Sed $HM^2 = oo$: et evaneſcente CD, vel o, $MN = Qo$ ultimò, et $MN^2 = QQoo$. Quare $HN^2 = oo \times \overline{1+QQ}$. Rurſum $NI = Roo$ ultimò. Quare $\frac{HN^2}{NI} = \frac{oo \times \overline{1+QQ}}{Roo} = \frac{1+QQ}{R}$.

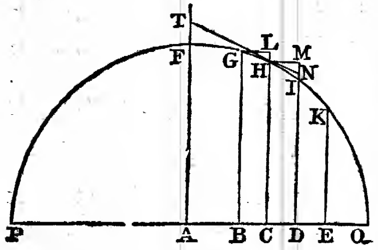
(o) Propter duas rectas DN, AT, cum tertiâ CH parallelas, erit HT ad AC ut HN ad CD. Unde $HT \times CD = AC \times HN$. Sive $HT \times o = AC \times o \times \sqrt{1+QQ}$. Unde $\frac{HT \times o}{AC \times o}$, ſive $\frac{HT}{AC}$, $= \sqrt{1+QQ}$.

(p) Vide Analyſ. per Æquat. Infin. Cap. III. § 5. & Geometr. Analyt. Cap. I. § 8.

(q) Confer Lib. I. Sect. 13. Scholium, & Scholium ad finem Libri De Quadraturâ Curvarum.

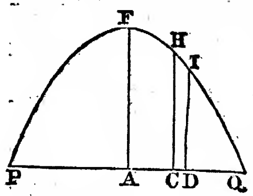
(r) Nimirum juncta AH efficeret triangula duo AHC, AHT inter ſe ſimilia, propter angulos ad C et H rectos, anguloſque CHA, HAT inter ſe æquales. Quare $AC : CH = TH : HA$. Arithmeticè igitur $\frac{AC}{CH} = \frac{TH}{HA}$. Unde, propter datam HA, erit quantitas $\frac{AC}{CH}$ ut recta TH.

$3a$ ad $2n$, id eſt, ut 3AC ad circuli diametrum PQ: velocitas autem erit ut $\sqrt{}$CH. Quare ſi corpus juſtâ cum velocitate ſecundum lineam ipſi PQ parallelam exeat de loco F, & medii denſitas in ſingulis locis, H, ſit ut longitudo tangentis HT, & reſiſtentia etiam in loco aliquo H ſit ad vim gravitatis ut 3AC ad PQ, corpus illud deſcribet circuli quadrantem FHQ. Q. E. I.



At ſi corpus idem de loco P, ſecundum lineam ipſi PQ perpendicularem egrederetur, & in arcu ſemicirculi PFQ moveri inciperet, ſumenda eſſet AC, ſeu a, ad contrarias partes centri A; & propterea ſignum ejus mutandum eſſet, & ſcribendum $-a$ pro $+a$. Quo pacto prodiret medii denſitas ut $-\frac{a}{e}$. Negativam autem denſitatem, hoc eſt, quæ motus corporum accelerat, natura non admittit: & propterea naturaliter fieri non poteſt, ut corpus, aſcendendo à P, deſcribat circuli quadrantem PF. Ad hunc effectum deberet corpus à medio impellente accelerari, non à reſiſtente impediri (s).

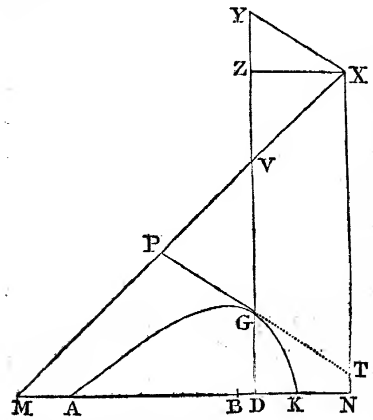
Exempl. 2. Sit linea PFQ Parabola, axem habens AF horizonti PQ perpendicularem, & requiratur medii denſitas, quæ faciat ut projectile in ipſâ moveatur.



Ex naturâ Parabolæ, rectangulum PDQ, æquale eſt rectangulo ſub ordinatâ DI & rectâ aliquâ datâ: hoc eſt, ſi dicantur recta illa b; PC, a; PQ, c; CH, e; & CD, o; rectangulum $a+o$ in $c-a-o$, ſeu $ac-aa-2ao+co-oo$, æquale eſt rectangulo b in DI, ideoque DI æquale $\frac{ac-aa}{b}+\frac{c-2a}{b}o-\frac{oo}{b}$. Jam ſcribendus eſſet hujus ſeriei ſecundus terminus $\frac{c-2a}{b}o$ pro Qo, tertius item terminus $\frac{oo}{b}$ pro Roo. Cùm verò plures non ſint termini, debebit quarti coefficiens S evaneſcere; & propterea quantitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, cui medii denſitas proportionalis eſt, nihil erit. Nullâ igitur medii denſitate movebitur projectile in Parabolâ, uti olim demonſtravit *Galilæus*. Q. E. I.

(s) Et vix magis naturaliter fieri poſſit, meo ſaltem judicio, ut corpus, è loco F projectum, per circuli quadrantem FQ deferatur. Cùm ad talem corporis motum eâ opus eſſet materiæ, per quam iter ei faciendum eſſet, denſitate, quæ in loco ſummo F nulla eſſet, in loco Q infinita.

Exempl. 3. Sit linea AGK Hyperbola, aſymptoton habens NX plano horizontali AK perpendicularem; & quæratur medii denſitas, quæ faciat ut projectile moveatur in hâc lineâ.

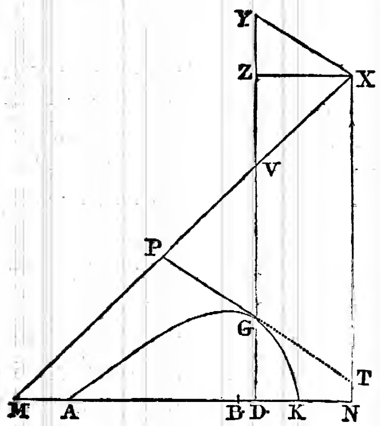


Sit MX aſymptotos altera, ordinatim applicatæ DG productæ occurrens in V; & ex naturâ hyperbolæ, rectangulum XV in VG dabitur. Datur autem ratio DN ad VX, & propterea datur etiam rectangulum DN in VG. Sit illud bb: & completo parallelogrammo DNXZ; dicatur BN, a; BD, o; NX, c; & ratio data VZ ad ZX, vel DN, ponatur eſſe $\frac{m}{n}$. Et erit DN æqualis $a-o$, VG æqualis $\frac{bb}{a-o}$, VZ æqualis $\frac{m}{n}\overline{a-o}$, & GD, ſeu NX$-VZ-$VG, æqualis $c-\frac{m}{n}a+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{a-o}$. Reſolvatur terminus $\frac{bb}{a-o}$ in ſeriem convergentem, $\frac{bb}{a}+\frac{bb}{aa}o+\frac{bb}{a^3}oo+\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. & fiet GD æqualis $c-\frac{m}{n}a-\frac{bb}{a}+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o-\frac{bb}{a^3}o^2-\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. Hujus ſeriei terminus ſecundus $\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o$ uſurpandus eſt pro Qo, tertius cum ſigno mutato $\frac{bb}{a^3}o^2$ pro Ro^2, & quartus cum ſigno etiam mutato $\frac{bb}{a^4}o^3$ pro So^3, eorumque coefficientes $\frac{m}{n}-\frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$ & $\frac{bb}{a^4}$ ſcribendæ ſunt in regulâ ſuperiore pro Q, R & S. Quo facto prodit medii denſitas ut

$$\frac{\frac{bb}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}\sqrt{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}}\ \text{ſeu}\ \frac{1}{\sqrt{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}};$$

id eſt, ſi in VZ ſumatur VY æqualis VG, ut $\frac{1}{XY}$. Namque aa & $\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}$ ſunt ipſarum

ipſarum XZ & ZY quadrata (t). Reſiſtentia autem invenitur in ratione ad gravitatem quam habet $3XY$ ad $2YG$ (u); & velocitas ea eſt, quâcum corpus in Parabola pergeret verticem G, diametrum DG, & latus rectum $\frac{XY \text{ quad.}}{VG}$ habente (x). Ponatur itaque, quòd medii denſitates in locis ſingulis G ſint reciprocè ut diſtantiæ XY, quòdque reſiſtentia in loco aliquo G ſit ad gravitatem ut $3XY$ ad $2YG$; & corpus de loco A, juſtâ cum velocitate emiſſum, deſcribet hyperbolam illam AGK. Q. E. I.



Exempl. 4. Ponatur indefinitè, quòd linea AGK hyperbola ſit, centro X, aſymptotis MX, NX, eâ lege deſcripta, ut, conſtructo rectangulo XZDN, cujus latus ZD ſecet hyperbolam in G & aſymptoton

(t) Nempe evaneſcente o, vel BD, DN vel $ZX = a$ ultimò. Quare $XZ^2 = aa$ ultimò. Rurſum cùm ſit $VG = \frac{bb}{a-o}$, et $VZ = \frac{ma - mo}{n}$, erit $VG = \frac{bb}{a}$, et $VZ = \frac{ma}{n}$ ultimò. Unde $ZY = VG - VZ = \frac{bb}{a} - \frac{ma}{n}$ ultimò. Quare $ZY^2 = \frac{mm}{nn}aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{a^2}$ ultimò.

Cæterùm denſitatem materiæ, per quam iter corpori faciendum eſſet, quod curſu ſuo hyperbolam AGK ſcriberet, eam cum quantitate $\frac{1}{XY}$ proportione convenire, elegantius longè ad hunc modum concludetur. Recta TG producta cum aſymptotâ XV in P concurrat. Erunt TG, GP inter ſe æquales. (Hamilton. Conic. Lib. I. Prop. XXXVI.) Ac proinde, cùm parallelæ ſint VG, XT, erunt PV, VX inter ſe æquales. Sed VG, VY inter ſe æquales. (Id enim factum eſt.) Duæ igitur PV, VG, duabus XV, VY ſingulatim ſunt æquales. Angulusque XVY angulo PVG æqualis. (El. I. 15.) Quare XY, PG (El. I. 4.) ac proinde XY, GT erunt inter ſe æquales. Denſitas igitur, quæ ex Corollario 1°. quantitatis $\frac{S \times BN}{R \times GT}$ rationem ſervat, ea hujus etiam $\frac{S \times BN}{R \times XY}$ rationem ſervabit. Sed $S = \frac{bb}{a^4}$, et $BN = a$. Unde $S \times BN = \frac{bb}{a^3}$. Sed $R = \frac{bb}{a^3}$. Quare $\frac{S \times BN}{R} = 1$, et $\frac{S \times BN}{R \times XY} = \frac{1}{XY}$. Denſitas igitur quantitatis $\frac{1}{XY}$ rationem ſervabit.

(u) Nimirum evaneſcente rectâ BD, ut illæ BN, DN ultimò æquales fiant, renixus materiæ erit ad vim gravitatis (per Cor. 1.) ut $3S \times GT$ ad $4RR \times BN$; hoc eſt, cùm æquales ſint GT, XY (Not. t) ut $3S \times XY$ ad $4RR \times BN$; ſive ut $\frac{3bb}{a^4} \times XY$ ad $\frac{4b^4}{a^6} \times a$, hoc eſt ut $3aXY$, ſive $3BN \times XY$ ad $4b^2$. Sed $b^2 = DN \times VG$. Quare $4b^2 = DN \times 4VG = DN \times 2YG$. Quare renixus materiæ erit ad vim gravitatis ut $3BN \times XY$ ad $DN \times 2YG$, ultimò ſcilicet rectâ BD evaneſcente. Evaneſcente autem rectâ BD, factiſque BN, DN ultimò æqualibus, $3BN \times XY$ erit ultimò ad $DN \times 2YG$ ut $3XY$ ad $2YG$. Renixus

ſymptoton ejus in V, fuerit VG reciprocè ut ipſius ZX vel DN dignitas aliqua DN^n, cujus index eſt numerus n: & quæratur medii denſitas, quâ projectile progrediatur in hâc Curvâ.

Pro BN, BD, NX ſcribantur A, O, C reſpectivè, ſitque VZ ad XZ vel DN ut d ad e, & VG æqualis $\frac{bb}{DN^n}$, & erit DN æqualis $A - O$, $VG = \frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$, $VZ = \frac{d}{e}\overline{A-O}$, & GD, ſeu $NX - VZ - VG$, æqualis $C - \frac{d}{e}A + \frac{d}{e}O - \frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$. Reſolvatur terminus ille $\frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$ in ſeriem infinitam, $\frac{bb}{A^n} + \frac{nbb}{A^{n+1}}O + \frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2 + \frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. (y) ac fiet GD æqualis $C - \frac{d}{e}A - \frac{bb}{A^n} + \frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O - \frac{+nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2 - \frac{+n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. Hujus ſeriei terminus ſecundus $\frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O$ uſurpandus eſt pro QO, tertius $\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2$ pro RO^2, quartus $\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ pro SO^3. Et inde medii denſitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, in loco quovis G, fit

$$\frac{n+2}{3\sqrt{A^2 + \frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eA^n}A + \frac{nnb^4}{A^{2n}}}}$$

(z), ideoque ſi in VZ capiatur VY æqualis $n \times VG$, denſitas illa eſt reciprocè

nixus igitur materiæ erit ad vim gravitatis, in loco utique G, ut $3XY$ ad $2YG$.

(x) Velocitas enim corporis, è puncto G hyperbolæ egredientis, ea erit, quâcum ſecundum ductum parabolæ diametro DG, latere recto cujus ſymbolum eſſet $\frac{1+QQ}{R}$, corpus idem per inane ferri poſſit. At verò per Corollarium primum $1 + QQ = \frac{GT^2}{BN^2} = \frac{GT^2}{a^2}$. (Ultimo ſcilicet evaneſcente BD, ut illæ BN, DN æquales habeantur.) Et R, è naturâ hyperbolæ, $= \frac{bb}{a^3}$. Unde $\frac{1+QQ}{R} = \frac{GT^2 \times a}{bb} = \frac{GT^2 \times BN}{DN \times VG}$, ultimò ſcilicet rectâ BD evaneſcente. Ita verò BN, DN ultimò æquales fiunt, et illud $\frac{GT^2 \times BN}{DN \times VG}$ huic $\frac{GT^2}{VG}$ ſit ultimò æquale. Quare $\frac{1+QQ}{R}$, ſive latus rectum parabolæ de quâ agitur, rectæ $\frac{GT^2}{VG}$, ſive propter æquales GT, XY (Not. t) rectæ $\frac{XY^2}{VG}$ æqualis erit.

(y) Quod ita facillimè efficietur ſi quantitate $\frac{1}{\overline{A-O}|^n}$, ſive $\overline{A-O}|^{-n}$, ope Theorematis binomialis, in ſeriem infinitam $A^{-n} + nA^{-n-1}O + \frac{nn+n}{2}A^{-n-2}O^2 + \frac{n^3+3n^2+2n}{6}A^{-n-3}O^3 +$, reſolutâ, ſeriei illius membra in quantitatem bb ſingulatim multiplicentur.

(z) Nempe propter $S = \frac{n^3+3n^2+2n}{6A^{n+3}}bb$, et $R = \frac{nn+n}{2A^{n+2}}bb$, erit $\frac{S}{R} = \frac{n+2}{3A}$. Quare denſitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, erit $\frac{n+2}{3A\sqrt{1+QQ}}$. Et propter $Q = \frac{d}{e} - \frac{nbb}{A^{n+1}}$ erit $QQ = \frac{dd}{ee} - \frac{2ndbb}{eA^{n+1}} + \frac{n^2b^4}{A^{2n+2}}$.

Et

reciprocè ut XY. Sunt enim A^2 & $\frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eA^n}A + \frac{nnb^4}{A^{2n}}$ ipsarum XZ & ZY quadrata (aa). Resistentia autem in eodem loco G fit ad gravitatem ut 3S in $\frac{XY}{A}$ ad 4RR, id est, ut XY ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ VG (bb). Et velocitas ibidem ea ipsa est, quâcum corpus projectum in Parabolâ pergeret, verticem G, diametrum GD, & latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ seu $\frac{2XY\ quad.}{nn+n\ in\ VG}$ habente (cc). Q. E. I.

Scholium.

Et $1+QQ = 1 + \frac{dd}{ee} - \frac{2ndbb}{eA^{n+1}} + \frac{n^2b^4}{A^{2n+2}}$. Et $A\sqrt{1+QQ} = \sqrt{AA + \frac{dd}{ee}AA - \frac{2ndbb}{eA^n}A + \frac{n^2b^4}{A^{2n}}}$.

Unde densitas $\frac{n+2}{3A\sqrt{1+QQ}} = \frac{n+2}{3\sqrt{AA + \frac{dd}{ee}AA - \frac{2ndbb}{eA^n}A + \frac{n^2b^4}{A^{2n}}}}$.

(aa) Nempe $ZX = DN = A - O$. Hinc evanescente BD vel O, $ZX = A$ ultimò, et $ZX^2 = AA$ ultimò. Rursum $VY = nVG = \frac{nbb}{\overline{DN}|^n} = \frac{nbb}{\overline{A-O}|^n} = \frac{nbb}{A^n}$ ultimò. Et $VZ = \frac{d}{e}DN = \frac{d}{e}A$ ultimò.

Quare $ZY = VY - YZ = \frac{nbb}{A^n} - \frac{d}{e}A$ ultimò. Unde $ZY^2 = \frac{dd}{ee}AA - \frac{2ndbb}{eA^n}A + \frac{n^2b^4}{A^{2n}}$.

Hinc $\sqrt{AA + \frac{dd}{ee}AA - \frac{2ndbb}{A^n}A + \frac{n^2b^4}{A^{2n}}} = \sqrt{ZX^2 + ZY^2} = XY$. Unde densitas $= \frac{n+2}{3XY}$. Ac proinde, propter numeros $n+2$ et 3 datos, densitas rationem quantitatis XY contrariam servat.

(bb) $XY = \sqrt{AA + \frac{dd}{ee}AA - \frac{2ndbb}{eA^n}A + \frac{n^2b^4}{A^{2n}}}$ (per Not. aa) $= A\sqrt{1+QQ}$ (per Not. z). Ergo $XY = A\sqrt{1+QQ}$. Et per Cor. 1. $A\sqrt{1+QQ} = GT$. Quare rectæ GT, XY inter se æquales.

Rursum renixus materiæ erit ad vim gravitatis, in loco G, ut $\frac{3S \times GT}{A}$ ad 4RR (per Cor. 1.) Erit igitur renixus ille ad vim gravitatis ut $\frac{3S \times XY}{A}$ ad 4RR, hoc est ut, $\frac{n^3+3n^2+2n}{2A^{n+4}}bbXY$ ad $\frac{\overline{nn+n}|^2}{A^{2n+4}}b^4$.

Sive ut $\overline{n^3+3n^2+2n}.A^n.XY$ ad $2.\overline{nn+n}|\,bb$; vel dividendo quantitate $\overline{nn+n}|^2$, ut $\frac{n+2}{nn+n}A^n.XY$ ad $2bb$; vel, propter $A = BN$ &, $bb = VG \times DN^n$, ut $\frac{n+2}{nn+n} \times BN^n.XY$ ad $2VG \times DN^n$. Evanescente autem rectâ BD, factisque BN^n, DN^n ultimò inter se æqualibus, erit $\frac{n+2}{nn+n}BN^nXY$ ad $2VG \times DN^n$ ultimò ut $\frac{n+2}{nn+n}XY$ ad 2VG, hoc est ut XY ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ VG. Renixus igitur materiæ ad vim gravitatis, in loco hyperbolæ G, erit ut XY ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ VG.

(cc) 1+

Scholium.

Eâdem ratione quâ prodiit densitas medii ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$ in Corollario primo, si resistentia ponatur ut velocitatis, V, dignitas quælibet V^n, prodibit densitas medii ut $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \overline{\frac{AC}{HT}}|^{n-1}$ (dd). Et propterea si Curva inveniri potest eâ lege, ut data fuerit ratio $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\overline{\frac{HT}{AC}}|^{n-1}$,

(cc) $1+QQ = \frac{XY^2}{A^2}$ (Not. bb.) Sed $R = \frac{nn+n}{2A^{n+2}}bb$. Ergo $\frac{1+QQ}{R} = \frac{2XY^2.A^n}{\overline{nn+n}.bb} = \frac{2XY^2.BN^n}{\overline{nn+n}\,VG.BN^n} = \frac{2XY^2}{\overline{nn+n}\,VG}$.

(dd) Nempe Formula, per quam vis renitentis materiæ ad vim gravitatis rationem Newtonus repræsentari docuit, ea quàm maximè generalis est: ac quæcunque fuerit lex, quâ vim illam renixûs velocitatibus attemperari ponas, ratio vis ejus ad vim gravitatis semper ea erit, quæ quantitatis $3S\sqrt{1+QQ}$ ad quantitatem 4RR: quantitatibus utique illis, S, Q, R, pro varia lege renixûs variis.

Velocitas quoque quâcum corpus per Curvam FHQ latum (vid. fig. p. 289) à loco H discedit, pro omni lege renixûs, ea erit quâcum ex eodem loco H secundum rectam HN emitti oporteret, ut secundum ductum Parabolæ, diametro HC, latere recto cujus illud $\frac{1+QQ}{R}$ symbolum esset, per inane ferri posset.

Denique, quæcunque fuerit lex renixûs, manet æquatio illa, Corollario primo constituta, $\frac{HT}{AC} = \sqrt{1+QQ}$.

Quæcunque igitur fuerit renixûs lex, velocitas quantitatis $\frac{1+QQ}{R}$ rationem subduplicatam servabit, secundum doctrinam Galilæi. Erit igitur velocitas ut $\overline{\frac{1+QQ}{R}}|^{\frac{1}{2}}$. Ponamus igitur renixum esse ut densitas materiæ et potestas velocitatis à numero n denominata conjunctim, hoc est literâ r renixum significante, literâ D densitatem, literâ V velocitatem, ponamus r esse ut $D \times V^n$; itaque erit D ut $\frac{r}{V^n}$. At verò cùm r sit ad vim gravitatis æquabilem ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad 4RR, si pro vi illâ æquabili gravitatis ponatur 1, erit $r = \frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR} = \frac{3S}{4RR} \times \frac{HT}{AC}$. Rursum velocitas sive V, cùm sit ut $\overline{\frac{1+QQ}{R}}|^{\frac{1}{2}}$, hoc est ut $\frac{HT}{R^{\frac{1}{2}} \times AC}$, erit V^n ut $\frac{HT^n}{R^{\frac{n}{2}} \times AC^n}$. Ergo $\frac{r}{V^n} = \frac{3S}{4RR} \times \frac{HT}{AC} \times \frac{R^{\frac{n}{2}} \times AC^n}{HT^n} = \frac{3S}{4.R^{\frac{4-n}{2}}} \times \frac{AC^{n-1}}{HT^{n-1}}$. Hujus igitur quantitatis rationem, illa D, sive densitas materiæ, constanter servabit. Propter numeros autem 3, 4, datos, hujus etiam, $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \frac{AC^{n-1}}{HT^{n-1}}$, eadem ratio erit.

vel

vel $\frac{S^2}{R^{4-n}}$ ad $\overline{1+QQ}|^{n-1}$: corpus movebitur in hâc Curvâ in uniformi medio, cum reſiſtentiâ quæ ſit ut velocitatis dignitas v^n. Sed redeamus ad Curvas ſimpliciores.

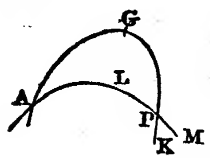
Quoniam motus non fit in Parabolâ niſi in medio non reſiſtente, in Hyperbolis verò hîc deſcriptis fit per reſiſtentiam perpetuam; perſpicuum eſt, quòd linea, quam projectile in medio uniformiter reſiſtente deſcribit, propiùs accedit ad hyperbolas haſce (ee) quàm ad parabolam. Eſt utique linea illa hyperbolici generis, ſed quæ circa verticem magis diſtat ab aſymptotis; in partibus à vertice remotioribus propiùs ad ipſas accedit, quàm pro ratione hyperbolarum quas hîc deſcripſi (ff). Tanta verò non eſt inter has & illam differentia, quin illius loco poſſint hæ, in rebus practicis, non incommodè adhiberi. Et utiliores forſan futuræ ſunt hæ, quàm hyperbola magis accurata & ſimul magis compoſita. Ipſæ verò in uſum ſic deducentur.

Compleatur parallelogrammum XYGT, & recta GT tanget hyperbolam in G, ideoque denſitas medii in G eſt reciprocè ut tangens GT, & velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GTq}{GV}}$, reſiſtentia autem ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in GV.

Proinde ſi corpus de loco A ſecundum rectam AH projectum deſcribat hyperbolam AGK, & AH producta occurrat aſymptoto NX in H, actaque AI eidem parallela occurrat alteri aſymptoto MX in I: erit medii denſitas in A reciprocè ut AH, & corporis velocitas ut $\sqrt{\frac{AHq}{AI}}$, ac reſiſtentia ibidem ad gravitatem ut AH ad

2nn

(ee) Cum nullâ tamen earum omni ex parte conveniet. Cùm corporis per quamlibet earum motus eam poſtulaverit materiæ circumfuſæ denſitatem, cui immutabili eſſe non liceat, ſiquidem rectæ mutabilis XY rationem contrariam neceſſe eſt ea conſtanter ſervet. *(Le Sœur & Jacquier ad locum.)*

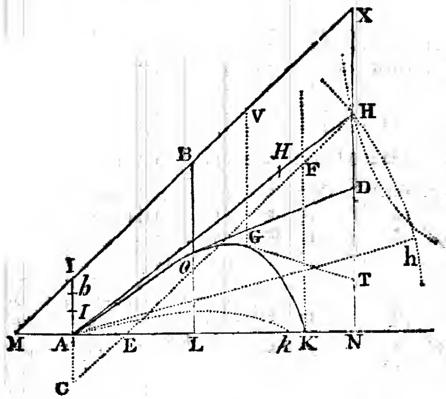


(ff) Puta corpori, è loco A, ſecundum tangentem AH, eâ cum velocitate projecto, quâcum projiciendum eſſet corpus aliud, quod, per materiam variè in variis locis, lege quâ oporteret, condenſatam, per hyperbolam AGK (vid. fig. text. p. 297) incederet, hâc inquam velocitate, è loco A, ſecundum tangentem AH, projecto corpori per materiam, uniformi quâdam denſitate præditam, puta iter faciendum eſſe. Jam ſi denſitas illa uniformis ea ſit, quæ, corpore per hyperbolam AGK incedente, maximam inter minimamque materiæ circumfuſæ denſitatem media eſſet, denſitas materiæ circa locum A, quæ motum corporis per hyperbolam illam præſtaret, uniformi illâ denſitate minor eſſet, ob tangentem AH mediâ, ſi ita dicam, tangente majorem. Renixus igitur materiæ uniformis, per quam corpus iter facere poſuimus, in loco A, renixu illo qui motum per hyperbolam AGK præſtaret, validior. Impetus igitur corporis è loco A projecti in

$\frac{2nn+2n}{n+2}$ in AI. Unde prodeunt ſequentes regulæ.

Reg. 1. Si ſervetur tum medii denſitas in A, tum velocitas quâcum corpus projicitur, & mutetur angulus NAH; manebunt longitudines AH, AI, HX (gg). Ideoque ſi longitudines illæ in aliquo caſu inveniantur, hyperbola deinceps ex dato quovis angulo NAH expeditè determinari poteſt.

Reg. 2. Si ſervetur tum angulus NAH, tum medii denſitas in A, & mutetur velocitas quâcum corpus projicitur; ſervabitur longitudo AH, & mutabitur AI in duplicatâ ratione velocitatis reciprocè.



Reg. 3. Si tam angulus NAH, quàm corporis velocitas in A, gravitaſque acceleratrix ſervetur, & proportio reſiſtentiæ in A ad gravitatem motricem augeatur in ratione quâcunque; augebitur proportio AH ad AI in eâdem ratione, manente parabolæ prædictæ latere recto, eique proportionali longitudine $\frac{AHq}{AI}$: & propterea minuetur AH in eâdem ratione, & AI minuetur in ratione illâ duplicatâ (hh). Augetur verò proportio reſiſtentiæ ad

in materiâ uniformi citiùs langueſcet, et corpus per Curvam quandam, ALM, feretur hyperbolâ AGK parte ſaltem aſcendente interiorem, ut in figurâ hîc appoſitâ.

Curva igitur interior, circa verticem depreſſior, ampliore ſinu brachia pandens, aſymptotas, quas proprias utique habebit, infimâ parte, propiùs acceſſura eſt, quàm hyperbola illa ſuas.

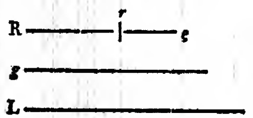
(gg) Nam data denſitate dabitur AH. Datâque velocitate dabitur recta $\frac{AH^2}{AI}$. Quæ ſi dicatur a, erit quadratum ex AH rectangulo AI $\times a$ æquale. Quadratum autem ex datâ AH dabitur. Dabitur igitur rectangulum AI $\times a$. Recta autem a data. Quare et AI. Rectarum autem HX, AI mutua ratio data. Nam ſi producatur HA occurſum uſque aſymptotæ XM, è naturâ hyperbolæ KGA, pars illa omnis tangentis HA, quæ duabus aſymptotis XN, XM intercepta eſt, ad partem illam quæ à puncto contactûs, A, ad aſymptotam XM pertingit, rationem habet quam numerus $n+1$ ad 1. Quare et HX ad AI eandem numeri $n+1$ ad 1 rationem habebit. Rectæ igitur HX ad rectam AI ratio data. Datâ igitur illâ AI, dabitur quoque HX. (Dat. 2.) Tres igitur AH, AI, HX magnitudine ſingulatim datæ. Q. E. D.

(hh) Exponatur recta g datæ cujuſvis longitudinis. Sit Rr alia recta eâ lege mutabilis, ut recta Rr ad datam g rationem ſemper habeat, quam vis motrix renixûs in loco A ad vim motricem gravitatis. Datoque angulo NAH, datâque etiam corporis, è loco A projecti, velocitate; ſint AH, AI rectarum

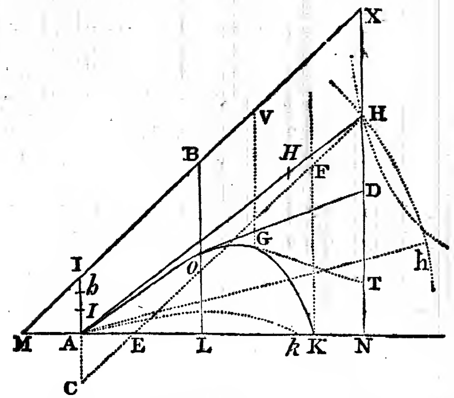
ad pondus, ubi vel gravitas ſpecifica ſub æquali magnitudine fit minor, vel medii denſitas major, vel reſiſtentia, ex magnitudine diminutâ, diminuitur in minore ratione quàm pondus.

Reg. 4. Quoniam denſitas medii prope verticem hyperbolæ major

rectarum AH, AI magnitudines, quas proportio illa vis renixûs ad vim motricem gravitatis, quæ eadem fit quæ rectæ Rr ad rectam *g*, poſtulaverit. Vi autem renixûs ratione gravitatis motricis ita auctâ, ut Rr in Rρ increverit, rectæ AH, AI magnitudines alias, A*H*, A*I*, ſint adeptæ. Dicit Newtonus, ſi augeatur vis renixûs ratione gravitatis, rectam AH imminui; hoc eſt ſi Rρ major ſit quàm Rr, eſſe A*H* minorem quàm AH. Dicit etiam AI eâdem ratione minui, quâ quadratum ex AH minuitur; hoc eſt, exiſtente Rρ majore quàm Rr dicit A*I* minorem eſſe quàm AI, et tali quidem ratione minorem, ut ſit A*I* ad AI ut quadratum ex A*H* ad quadratum ex AH. Dicit denique AH eâdem ratione minui quâ Rr augetur; hoc eſt, dicit A*H* eſſe ad AH ut Rr ad Rρ. Nos autem ea, quæ Newtonus affirmavit, oſtendimus hoc modo.



Dato angulo NAH, propter rectam AN poſitione datam punctumque A datum, recta AH poſitione data erit. (Dat. 29.) Datâque velocitate illâ quâcum corpus è loco A emiſſum eſt, Parabola, cujus ductum corpus ex eodem loco A, ſecundum rectam poſitione datam AH cum datâ illâ velocitate projectum, per inane ſequeretur, hæc inquam Parabola poſitione dabitur. Quare latus ejus rectum ad verticem A magnitudine dabitur. Huic æqualis ſit recta L. Recta igitur L magnitudine data. Sed quadrata ex A*H*, AH rectangulis $\frac{nn+n}{2}$ A*I* × L, $\frac{nn+n}{2}$ AI × L ſingulatim ſunt æqualia. (Vid. Exempl. 4. Not. [cc].) Quadratum igitur ex A*H* ad quadratum ex AH eam habet rationem quam rectangulum A*I* × L ad rectangulum AI × L, ſive eam quam A*I* ad AI. Jam verò cùm Rρ major ſit quàm Rr, major eſt Rρ quàm ut habeat ad rectam *g* rationem eam quam Rr ad *g*. Sed Rρ eſt ad *g* ut A*H* ad $\frac{2nn+2n}{2+n}$ A*I*; et Rr eſt ad *g* ut AH ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ AI (Exempl. 4. Not. [bb].) Major itaque eſt A*H* quàm ut habeat ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ A*I* rationem eam quam AH ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ AI. Habet autem $\frac{2nn+2n}{n+2}$ A*I* ad ipſam A*I* rationem eam quam $\frac{2nn+2n}{n+2}$ AI ad ipſam AI. Ex æquo igitur major erit A*H* quàm ut habeat ad A*I* rationem eam quam AH ad AI. Permutando A*H* major quàm ut habeat ad AH rationem eam quam A*I* ad AI. Sed A*I* ad AI rationem habet quam quadratum ex A*H* ad quadratum ex AH. (Id enim ſuprà oſtenſum.) Major igitur A*H* quàm ut habeat ad AH rationem eam quam quadratum ex A*H* ad quadratum ex AH. Verùm ut A*H* ad AH ita erit quadratum ex A*H* ad rectangulum A*H* × AH. Quadratum igitur ex A*H* majus eſt quàm ut habeat ad rectangulum A*H* × AH rationem eam quam idem quadratum ex A*H* ad quadratum ex AH. Rectangulum igitur A*H* × AH quadrato ex AH minus erit. (El. v. 10.) Atque idcirco recta A*H* rectâ AH minor. Ex eo igitur quòd Rρ majorem poſueramus quàm Rr, probavimus A*H* minorem eſſe quàm AH. Creſcente igitur Rr, id eſt creſcente vi renixûs ratione gravitatis motricis corporis projecti, AH minuetur. Quod primò demonſtrandum erat.



Dicit præterea Newtonus, rectam AI eâdem ratione minui, quâ quadratum ex AH minuitur. Id verò ex proportionis convenientiâ illâ, quam quadratis ex A*H*, AH cum rectis A*I*, AI intercedere ſuprà oſtendimus, ſatis patet.

Dicit

major eſt quàm in loco A; ut habeatur denſitas mediocris, debet ratio minimæ tangentium GT ad tangentem AH inveniri, & denſitas in A augeri in ratione paulo majore quàm ſemiſummæ harum tangentium ad minimam tangentium GT ([ii]).

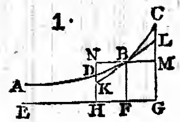
Reg.

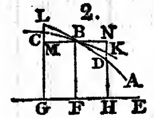
Dicit etiam Newtonus illam AH eâdem ratione minui, quâ vis renixûs in loco A ratione ponderis augetur. Hoc eſt A*H* eſſe ad AH ut Rr ad Rρ. Id verò ſic oſtendimus. Capiatur A*b* duarum A*I*, AI proportione media. Erit igitur quadratum ex A*I* ad quadratum ex A*b* ut A*I* ad AI. Sed A*I* eſt ad AI ut quadratum ex A*H* ad quadratum ex AH. (Id enim ſuprà oſtenſum.) Quadratum igitur ex A*H* eſt ad quadratum ex AH, ſicut quadratum ex A*I* ad quadratum ex A*b*. (El. v. 11.) Ac proinde A*H* erit ad AH ut A*I* ad A*b*; ſive ut A*b* ad AI. Eſt autem Rr ad *g* ut AH ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ AI; ſive ut AH × A*I* ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ × AI × A*I*. Rurſum *g* eſt ad Rρ ut $\frac{2nn+2n}{n+2}$ AI × A*I* ad A*H* × AI. Ex æquo igitur Rr : Rρ = AH × A*I* ad A*H* × AI. Quare illa Rr ad Rρ rationem habet è rationibus rectæ A*I* ad AI rectæque AH ad A*H* compoſitam, vel, cùm AH ſit ad A*H* ut AI ad A*b*, compoſitam è rationibus rectæ A*I* ad AI rectæque AI ad A*b*. Verùm ex eiſdem compoſita eſt ratio rectæ A*I* ad A*b*. Erit igitur Rr ad Rρ ut A*I* ad A*b*, hoc eſt ut A*H* ad AH. Q. E. D.

([ii]) LEMMA VIII. H.

In omnibus Curvis Ordinatarum fluxiones ſecundæ vel poſitivæ erunt, vel negativæ, prout Curvæ baſes ſuas convexæ, vel concavæ, reſpiciant.

Sit Curva quævis ABC, cujus baſis EF, Ordinata FB. Fluente quovis modo baſi EF, dico Ordinatæ FB fluxionem ſecundam vel poſitivam eſſe, vel negativam, prout Curva ABC baſin EF convexa, vel concava, in loco B reſpiciat. Ducatur enim per B recta KL, quæ Curvam in B contingat, ordinatiſque duabus HD, GC, à contrariis partibus ordinatæ BF poſitis, in punctis K, L occurrat. Ducatur etiam per punctum B recta NM cum baſi EF parallela, quæ Ordinatis eiſdem in punctis N, M occurrat. Jam evaneſcentibus rectis FH, FG, Ordinatarum utique GC, HD à mediâ FB diſtantiis, rectæ ML, NK fluxionum Ordinatæ FB, rectæ verò LC, KD fluxionum ejuſdem ſecundarum rationes ultimò aſciſcunt. At verò ſi Curva ABC baſin EF convexa reſpiciat (ut in fig. 1.) tum ſi ordinata BF creſcendo fluat, ut in ipſam GC creſcat, poſitivâ exiſtente ML, erit LC etiam poſitiva. Poſitivam namque habeo plagam eam, verſus quam Ordinatæ à baſi eductæ tendant: contrariam, negativam. Sin decreſcendo fluat ordinata FB, ut in ipſam HD mutetur, tum negativa ſit fluxio prima NK, manet tamen fluxio ſecunda KD poſitiva. Poſitivæ igitur in hoc caſu ſunt Ordinatarum fluxiones ſecundæ, ſive illæ creſcendo, ſive decreſcendo fluant. E contrario, ſi Curva ABC baſin ſuam concava reſpiciat (fig. 2.) tum ſi creſcendo fluat ordinata FB, ut in ipſam GC creſcat, poſitivâ exiſtente fluxione primâ ML, eſt LC negativa. Sin decreſcendo fluat ordinata FB, ut in ipſam HD mutetur, negativa jam fiet fluxio ejus prima NK, et manebit fluxio ſecunda KD negativa. Negativæ igitur in hoc caſu ſunt Ordinatarum fluxiones ſecundæ, ſive illæ creſcendo, ſive decreſcendo, fluant. Ordinatarum igitur fluxiones ſecundæ vel poſitivæ erunt, vel negativæ, prout Curvæ baſes ſuas convexæ, vel concavæ, reſpiciant.





Cor. Curvæ baſes ſuas vel convexæ, vel concavæ, reſpicient, prout Ordinatarum fluxiones ſecundæ poſitivæ, vel negativæ, fuerint.

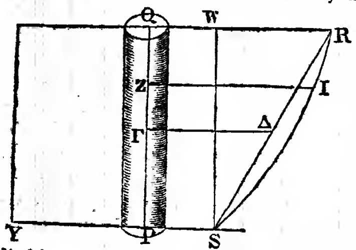
Ex hiſce, ni fallor, facilis erit demonſtratio ejus quod à Newtono affirmatum eſt, denſitatem materiæ mediocrem, quæ motum corporis per hyperbolam AGK præſtare poſſit, paulo eſſe majorem, quàm quæ habeat ad denſitatem propriam materiæ circa locum A, unde corpus projectum fuit, rationem eam quam tangentium AH, GT ſumma dimidiata ad GT tangentem minimam.

Intelligatur cylindrus rectus cavus, cujus axis, PQ, æqualis ſit arcui hyperbolico AG. Puta hunc cylindrum materiâ quâdam plenum variè condenſatâ; eâ quidem lege, ut ſi in axe PQ capiatur

Reg. 5. Si dantur longitudines AH, AI, & defcribenda fit figura AGK: produc HN ad X, ut fit HX ad AI ut $n+1$ ad 1: centroque X, & afymptotis MX, NX, per punctum A defcribatur hyperbola, eâ lege, ut fit AI ad quamvis VG ut XV^n ad XI^n.

Reg.

piatur pars PZ arcui cuivis hyperbolæ, AO, æqualis, tum cylindrus plano per Z fecetur ad axem recto, quod circulum efficiat cum bafe cylindri parallelum; denfitas materiæ ejus omnis in cylindro, quæ fuperficiem hujus circuli contiguam habeat, eadem fit quæ materiæ circa locum O hyperbolæ. Ita fcilicet denfitas mediocris materiæ, quæ in cylindro totâ PQ continetur, eadem erit quæ materiæ arcui hyperbolico AG (*fig. p.* 298.) circumfufæ, per quam corpus, arcum illum percurrendo, iter facit. Axem cylindri PQ ad perpendiculum infiftant rectæ QR, PS; quarum illa QR tangenti AH, hæc PS tangenti GT fit æqualis. Ducatur recta OD, quæ hyperbolam AGK in O contingat, et afymptotæ ejus XN in D occurrat. Per puncta R, S, duci intelligatur Curva quædam RIS; cujus ea fit natura, ut acceptâ PZ in axe cylindri arcui cuilibet hyperbolæ, AO, æquali, eductâque à puncto Z ad perpendiculum rectâ ZI Curvam ufque, rectangulum ZI $\times$ OD rectangulo QR $\times$ PS æquale fit. Ducatur per S recta SW cum rectâ PQ parallela, quæ rectæ QR in W occurrat. Cùm æqualia fint rectangula illa ZI $\times$ OD, QR $\times$ PS, idcirco erit ZI ad PS ut QR, vel AH, ad OD. Sed ut AH ad OD, ita eft denfitas materiæ in loco O hyperbolæ ad denfitatem in loco A. (Exempl. 4.) Denfitates autem, circa loca A, O hyperbolæ, eædem funt quæ circa loca P, Z, cylindri. Quapropter ZI erit ad PS ut denfitas materiæ in cylindro circa punctum Z ad denfitatem circa punctum P. Et in omni fitu puncti Z idem obtinebit. Unde fequetur, quantitatem materiæ omnis in cylindro PQ ad quantitatem materiæ, quam uniformi denfitate præditam æquale fpatium cylindraceum contineret, fi denfitas illa uniformis ea effet, quæ materiæ circa locum P cylindri vel A hyperbolæ: fequetur inquam, quantitatem materiæ omnis in cylindro ad hujus alterius quantitatem rationem habere eam, quam fpatium RQPSIR ad rectangulum QS; vel fi ad rectam PQ applicetur rectangulum QY fpatio illi RQPSIR æquale, eam quam recta YP ad rectam PS vel GT. Oftendendum igitur rectam YP tangentium AH, GT fummâ dimidiatâ paulo effe majorem.

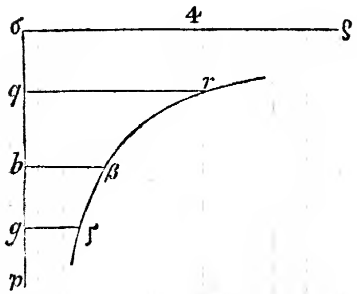


Jungatur SR. Media dividatur recta PQ in puncto Γ; agaturque ΓΔ cum QR, PS parallelæ, quæ rectæ SR in Δ occurrat. A puncto O hyperbolæ ducatur OB in afymptotam XM, cum alterâ afymptotâ XN parallela. Cùm è naturâ hyperbolæ quantitas NL^n $\times$ BO datæ cuidam fit æqualis; fi rectam NL litera y defignet, rectam BO litera x, erit $y^n \times x$ datæ cuidam æqualis. Unde $ny^{n-1}\dot{y} : \dot{x} = y^n : x$ (Geometr. Flux. Prop. VIII. Cor. 3.) Ac proinde $\dot{y} : \dot{x} = \frac{y}{n} : x = y : nx$. Et $\dot{y}\dot{y} : \dot{x}\dot{x} = y^2 : n^2x^2$. Et $\dot{y}\dot{y} : \dot{y}\dot{y} + \dot{x}\dot{x} = y^2 : y^2 + n^2x^2$. Et $\dot{y} : \sqrt{\dot{y}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}} = y : \sqrt{y^2+n^2x^2}$. Sed $\sqrt{\dot{y}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}} = \dot{\text{AO}}$. Quare $\dot{y} : \dot{\text{AO}} = y : \sqrt{y^2+n^2x^2}$. Sed $\dot{y} : \dot{\text{AO}} = \text{NL}$ vel $y : \text{OD}$. Quare $y : \text{OD} = y : \sqrt{y^2+n^2x^2}$. Hinc $\text{OD} = \sqrt{y^2+n^2x^2}$. Unde fi rectangulum datum QR $\times$ PS dicatur B^2, erit $\frac{B^2}{\text{OD}} = \frac{B^2}{\sqrt{y^2+n^2x^2}}$. Sed è natura Curvæ RIS, $\frac{B^2}{\text{OD}} = \text{ZI}$. Quare $\text{ZI} = \frac{B^2}{\sqrt{y^2+n^2x^2}}$.

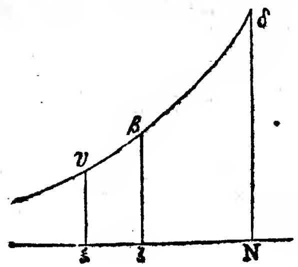
Rurfum, cùm fit $\dot{y}\dot{y} : \dot{x}\dot{x} = y^2 : n^2x^2$, erit $\dot{y}\dot{y} = \frac{y^2}{n^2x^2}\dot{x}\dot{x}$. Quare $\dot{y}\dot{y}+\dot{x}\dot{x} = \dot{x}\dot{x} \times \overline{1+\frac{y^2}{n^2x^2}} = \dot{x}\dot{x} \times \frac{n^2x^2+y^2}{n^2x^2}$. Et $\dot{\text{PZ}}\ (= \dot{\text{AO}}) = \sqrt{\dot{y}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}} = \frac{\dot{x}}{nx}\sqrt{y^2+n^2x^2}$. Hinc ZI $\times$ $\dot{\text{PZ}}$, five fluxio areæ SPZI, $= \frac{B^2\dot{x}}{nx}$.

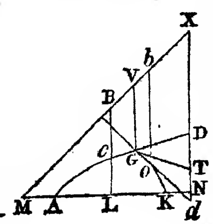
Expofitâ igitur rectâ quâvis infinitâ σp, fi in eâ capiatur σq, quæ habeat ad PS rationem eam quam 1 ad n: eductifque à punctis σ, q ad perpendiculum $\sigma \varsigma$, qr, quarum illa $\sigma\varsigma$ infinita fit, altera qr rectæ QR æqualis; fi centro σ, afymptotis illis $\sigma\varsigma$, σp, fcribatur hyperbola conica, quæ per punctum r tranfeat; fumptifque σg, σb illis VO, OB (*fig. p.* 298) æqualibus, fi à punctis g, b, educantur ad perpendiculum $g\text{ſ}$, $b\beta$, hyperbolam ufque; erit area hyperbolica ſ$gb\beta$ areæ SPZI æqualis, et harum fluxiones erunt

Reg. 6. Quo major eft numerus n, eo magis accuratæ funt hæ hyperbolæ in afcenfu corporis ab A, & minùs accuratæ in ejus defcenfu ad K; & contrà (kk). Hyperbola conica mediocrem rationem



erunt inter fe æquales. Nam cùm σq fit ad PS ut 1 ad n, propter æquales qr, QR, erit $\sigma q \times qr$ ad PS $\times$ QR, five ad B^2, ut 1 ad n. Unde $\sigma q \times qr = \frac{B^2}{n}$, & Ordinata hyperbolæ $b\beta = \frac{B^2}{n.\sigma b} = \frac{B^2}{nx}$: nempe cùm σb æqualis fit illi OB (id enim pofuimus) quam litera x fignificat. Quare $\beta b \times \dot{\sigma b}$, five $\beta b \times \dot{x}$, fluxio areæ hyperbolicæ ſ$gb\beta$, quantitati $\frac{B^2\dot{x}}{nx}$ æqualis, cui etiam ZI $\times$ $\dot{\text{PZ}}$, fluxio areæ SPZI, oftenfa eft æqualis. Hinc fi ordinatam hyperbolæ, βb, litera v generaliter fignificet, erit ZI $\times$ $\dot{\text{PZ}} = v\dot{x}$. Vel fi arcus AO, eique æqualis recta PZ ponatur æquabiliter fluere, et pro datâ $\dot{\text{PZ}}$, more Newtoniano, fcribatur 1; erit $\text{ZI} = v\dot{x}$. Rectanguli $v\dot{x}$ latera, v, $\dot{x}$, contrariè fluunt. Nam cùm Curva AOG (*fig. p.* 298) bafin fuam MX convexa refpiciat, ordinatæ x fluxio fecunda pofitiva erit. (Per Lemm. H. VIII.) Crefcente igitur x fluxio ejus, $\dot{x}$, crefcet. At verò eâdem x, feu σb, crefcente, v, five $b\beta$, è naturâ hyperbolæ conicæ decrefcet. Decrefcit igitur v dum illa $\dot{x}$ crefcat. Rectanguli igitur fluentis $v\dot{x}$ latera contrariè fluunt. Quare rectanguli illius fluxio, quæ eft fluxio rectæ ZI, rectangulorum $v\ddot{x}$, $\dot{v}\dot{x}$ differentia erit. Quare $\dot{\text{ZI}} = v\ddot{x} - \dot{v}\dot{x}$. Et $\dot{\text{ZI}} + \dot{v}\dot{x} = v\ddot{x}$. Rurfum crefcente x fluxio ejus fecunda minuitur ufque; fiquidem illâ x infinitè crefcente, fluxio ejus datæ arcûs AO infinitè crefcentis fluxioni fit ultimò æqualis; ac proinde fluxio ejus fecunda nihilo fit ultimò æqualis. Crefcente autem x illa v minuitur ufque, ut fuprà oftendimus. Rectanguli igitur fluentis $v\ddot{x}$ latera, v, $\ddot{x}$ eodem modo fluunt; et decrefcendo utrumque fi crefcente arcu AO, vel rectâ PZ, ipfa x crefcat; ut tam $\dot{\ddot{x}}$ quàm $\dot{v}$ negativa fit, et ipfius rectanguli $v\ddot{x}$ fluxio negativa; $-v\dot{\ddot{x}} - \dot{v}\ddot{x}$. Rurfum cùm hyperbola conica $r\beta$ſ, atque altera illa AGK bafes fuas σp, XM, convexæ refpiciant; erunt $\ddot{v}$, $\ddot{x}$ pofitivæ (per Lemm. H. VIII). Duæ igitur $\dot{v}$, $\dot{x}$ eodem modo fluunt, et rectanguli $\dot{v}\dot{x}$ fluxio erit $\dot{x}\ddot{v} + \dot{v}\ddot{x}$. Hinc cùm fit $\dot{\text{ZI}} + \dot{v}\dot{x} = v\ddot{x}$, erit etiam $\ddot{\text{ZI}} + \dot{x}\ddot{v} + \dot{v}\ddot{x} = -v\dot{\ddot{x}} - \dot{v}\ddot{x}$. Unde tranfponendo $\ddot{\text{ZI}} = -v\dot{\ddot{x}} - \dot{x}\ddot{v} - 2\dot{v}\ddot{x}$. Rectæ igitur ZI fluxio fecunda negativa erit. Curva igitur SIR, cujus eft illa ZI ordinata, hæc bafin fuam PQ concava refpiciet. (Lemm. H. VIII. Cor.) Trapezium igitur SPQR areâ SPQRIS, five rectangulo QY, minus erit. Sed propter trapezii latera QR, PS inter fe parallela, angulofque ad Q et P rectos, trapezium SPQR rectangulo PQ $\times$ ΓΔ æquale erit. Quare rectangulum PQ $\times$ ΓΔ rectangulo QY, five PQ $\times$ PY minus erit. Rectangulum igitur PQ $\times$ PY rectangulo PQ $\times$ ΓΔ majus. Recta igitur PY rectâ ΓΔ major. Sed ΓΔ, propter latera trapezii QR, PS inter fe parallela, duarum QR, PS, five duarum AH, GT eft femiffis. Recta igitur PY, quæ ad PS vel GT rationem habet eam, quam denfitas mediocris materiæ arcui hyperbolico AG circumfufæ ad propriam materiæ circa locum A denfitatem, hæc major eft quàm tangentium AH, GT fumma dimidiata. Q. E. D.

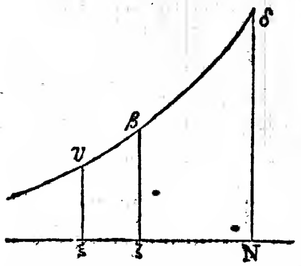


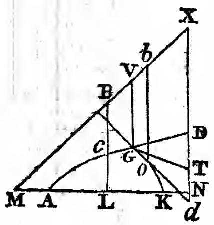


(kk) PER punctum quodvis, O, in arcu afcenfûs AG, ducatur recta OD, quæ hyperbolam AGK in O contingat, et afymptotæ XN in D occurrat; aliaque BOL, cum afymptotâ ND parallela, quæ alteri afymptotæ XM in B occurrat, hyperbolæ bafi MN in L. Datis XV, VG, XB, fi augeatur numerus n, minuetur ufque recta OB, atque tali quidem lege,

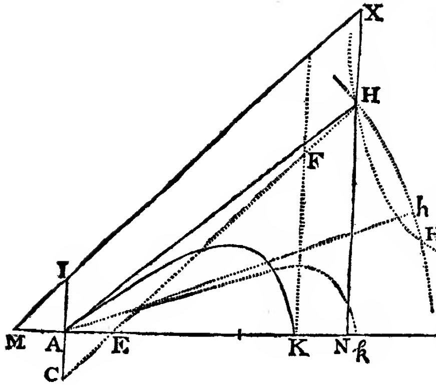
tionem tenet ([ll]), estque cæteris simplicior. Igitur si hyperbola sit hujus generis, & punctum K, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis AN per punctum A transeuntem, quæratur: occurrat producta AN asymptotis MX, NX in M & N, & sumatur NK ipsi AM æqualis.

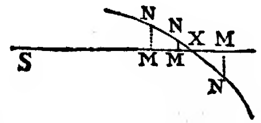
Reg. 7. Et hinc liquet methodus expedita determinandi hanc hyperbolam ex phænomenis. Projiciantur corpora duo similia & æqualia, eâdem velocitate, in angulis diversis HAK, hAk, incidantque in planum horizontis in K & k; & notetur proportio AK ad Ak. Sit ea d ad e. Tum erecto cujusvis longitudinis perpendiculo AI, assume utcunque longitudinem AH vel Ah, & inde collige graphicè longitudines AK, Ak, per Reg. 6. Si ratio AK ad Ak sit eadem cum ratione d & e, longitudo AH rectè assumpta fuit. Sin minus, cape in rectâ infinitâ SM longitudinem SM æqualem assumptæ AH, & erige perpendiculum MN æquale rationum differentiæ $\frac{AK}{kA} - \frac{d}{e}$ ductæ in rectam quamvis datam. Simili methodo ex assumptis pluribus longitudinibus AH invenienda sunt plura puncta N, & per omnia agenda curva linea regularis NNXN, secans





lege, ut magis minuatur OB quàm pro ratione crescentis numeri n; id est, ut magis minuatur OB quàm ut rationem numeri n contrariam servet. Quod sic ostendimus. Sit Curva logarithmica $ub\delta$ asymptotâ rectâ ξN. Hujus ordinatæ ξv, $\zeta\beta$ rectis illis, XV, XB æquales sint. Capiatur ξN, quæ habeat ad $\xi\zeta$ rationem eam quam numerus n ad unitatem; et à puncto N educatur ordinata Nδ logarithmicam usque. Et è naturâ logarithmicæ erit ξv ad Nδ ut ξv^n ad $\zeta\beta^n$, vel ut XV^n ad XB^n. Sed è naturâ hyperbolæ AGK, $XV^n : XB^n = OB : VG$. Quare ξv, vel XV ad Nδ ut OB ad VG. Rectangulum igitur $N\delta \times OB$ rectangulo $XV \times VG$ æquale erit. Et qualiscunque fuerit numerus n rectangulorum æqualitas manebit. Rectangulum autem $XV \times VG$ datum; nempe cùm rectæ XV, VG magnitudine singulatim datæ sint. Rectangulum igitur $N\delta \times OB$ datum: unde si augeatur quâvis ratione recta Nδ, pari ratione illa OB minuetur. At verò crescente numero n, illa Nδ augebitur quidem, et magis quàm pro ratione numeri n. Nam cùm logarithmica asymptotam suam ξN convexa respiciat, auctâ rectâ ξN, ordinata Nδ magis augebitur quàm pro ratione illius ξN, quæ eâdem ratione, quâ numerus n, crescit; modo numerus n numero illo non sit minor, qui ad unitatem rationem habeat quam subtangens logarithmicæ ad $\xi\zeta$. Magis igitur augetur Nδ quàm pro ratione numeri n, saltem quando numerus n ultra datum limitem increverit. Quare illa OB magis quàm pro hâc ratione minuetur. Crescente igitur numero n, recta nOB usque minuetur. Quare et quadratum ex illâ rectâ, hoc est $n^2.OB^2$ eo magis minuetur, quo numerus n magis creverit. Recta igitur $OD = \sqrt{y^2 + n^2x^2}$ (Not. [il]) $= \sqrt{NL^2 + n^2OB^2}$, manente NL, utpote quæ ad datam XB datam





secans rectam SMMM in X. Assumatur demum AH æqualis abscissæ SX, & inde denuò inveniatur longitudo AK; & longitudines, quæ sint ad assumptam longitudinem AI, & hanc ultimam AH, ut longitudo AK per experimentum cognita ad ultimò inventam longitudinem AK, erunt veræ illæ longitudines AI & AH, quas invenire oportuit. Hisce verò datis dabitur & resistentia medii in loco A, quippe quæ sit ad vim gravitatis ut AH ad 2AI ([mm]). Augenda est autem densitas medii per Reg. 4. & re-

datam rationem habet; hâc NL inquam manente, illa $OD = \sqrt{NL^2 + n\,OB^2}$ usque minor fiet. E contrario si, per punctum quodvis o in arcu descensûs GK, ad contrarias utique partes puncti G, ducatur recta od quæ hyperbolam in o contingat, et asymptotæ ejus XN in d occurrat, aliaque bol cum asymptotâ XN parallela, quæ alteri asymptotæ XM in b, basi Curvæ in l occurrat: simili prorsus modo ope curvæ logarithmicæ ostendi potest, manente abscissâ Xb, rectam bo, si augeatur numerus n, majorem usque fieri. Quare et $n.ob$ major fiet, et quadratum $n^2.ob^2$ majus. Aucto igitur numero n, recta $od = \sqrt{y^2 + n^2ob^2} = \sqrt{Nl^2 + n^2.ob^2}$ major fiet.

Aucto igitur numero n, modò eo quem diximus initio non sit minor, Tangentes per arcum ascensûs AG minores fiunt, per arcum descensûs GK majores. Quare tangens minima GT, per punctum G ducta, quod arcus illos discriminat, illa quidem certâ longitudine manebit. Tangentes autem per arcum ascensûs AG, dum perpetim decrescendo, minimæ GT æqualitatem singulatim accedant, mutuam quoque æqualitatem magis affectant. E diverso tangentes arcus descensûs GK, dùm, perpetim increscendo à modo minimæ tangentis GT magis abscedunt, mutuam quoque æqualitatem magis exuunt. Densitates igitur, quæ contrariam tangentium rationem gerunt, eæ, aucto numero n, per arcum ascensûs AG magis fiunt uniformes; per arcum descensûs GK, minùs. Quo major igitur fuerit numerus n, eo arcus AG, per quem corpus ascensum facit, Curvæ illius figuram magis referet, cujus ductum corpus ascendendo sequeretur, cui per materiam uniformi densitate præditam progrediendum esset; cùm è contrario arcus descensûs GK à figurâ Curvæ, quam corpus, per materiam uniformem iter faciens, descendendo scriberet, quo major fuerit numerus n eo magis abhorrebit.

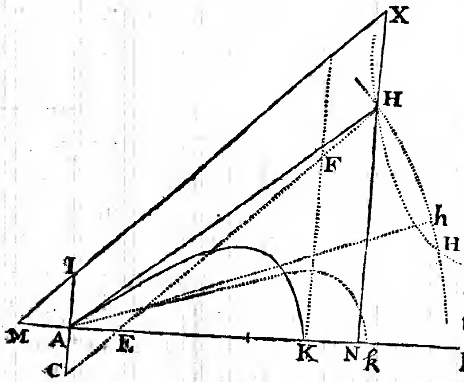
([ll]) Utpote quæ arcus contrarios, ascensûs et descensûs, similes omninò habeat; tangentes ad utramque partem minimæ, æqualibus à vertice distantiis, à mensurâ minimæ æqualiter abscedentes, ac proinde inter se æquales.

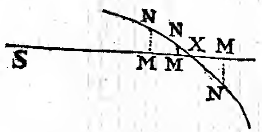
([mm]) Pro AH ad 2AI, lege 3AH ad 4AI. (Vide Exempl. 3, Not. [u], vel Exempl. 4, Not. [bb]) ubi generaliter ostenditur vim renixûs, quæ motum corporis per quamlibet harum hyperbolarum præstare possit, esse ad vim gravitatis ut AH ad $\frac{2nn + 2n}{n + 2}$ AI. Hoc est, si n sit unitas ut AH ad $\frac{4}{3}$ AI. Sive ut 3AH ad 4AI. Eandem hujus loci emendationem attulerunt Patres Doctissimi Le Sœur & Jacquier, & in commentariis suis Anglicis Emersonus.

sistentia

ſiſtentia modo inventa, ſi in eâdem ratione augeatur, fiet accuratior.

Reg. 8. Inventis longitudinibus AH, HX; ſi jam deſideretur poſitio rectæ AH, ſecundum quam projectile, datâ illâ cum velocitate emiſſum, incidit in punctum quodvis K: ad puncta A & K erigantur rectæ AC, KF horizonti perpendiculares, quarum AC deorſum tendat, & æquetur ipſi AI ſeu $\frac{1}{2}$HX. Aſymptotis AK, KF deſcribatur hyperbola, cujus conjugata tranſeat per punctum C (nn), centroque A & intervallo AH deſcribatur circulus ſecans hyperbolam illam in puncto H; & projectile ſecundum rectam AH emiſſum incidet in punctum K. Q.E.I. Nam punctum H, ob datam longitudinem AH, locatur alicubi in circulo deſcripto. Agatur CH occurrens ipſis AK & KF, illi in E, huic in F; & ob parallelas CH, MX, & æquales AC, AI, erit AE æqualis AM, & propterea etiam æqualis KN. Sed CE eſt ad AE ut FH ad KN, & propterea CE & FH æquantur. Incidit ergo punctum H in hyperbolam (oo) aſymptotis AK, KF deſcriptam, cujus conjugata tranſit per punctum C, atque ideo reperitur in communi

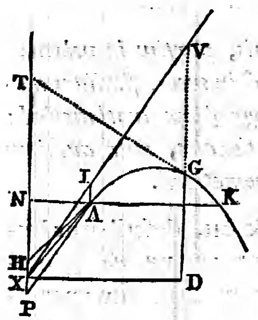




(nn) Aſymptotis NK, KF ſcribatur hyperbola, cujus *oppoſita* tranſeat per punctum C.
(oo) Aſymptotis NK, KF ſcriptam, cujus *oppoſita* tranſit per punctum C.
(pp) Per punctum X agatur XD cum plano horizontis parallela, quæ rectæ VG, ſi opus ſit, productæ, in D occurrat. Et propter angulum VXD datum, angulumque VDX rectum, triangulum VDX ſpecie datum eſt. Ratio igitur VX ad XD data. Ac proinde ratio illius VX^n ad XD^n data. Sit recta P parameter parabolæ KAX ad verticem X. Ut ſit $VG \times P^{n-1} = VX^n$. Sit b recta tali longitudine, ut ſit b^{n-1} ad P^{n-1} ut XD^n ad VX^n. Erit igitur $VG \times b^{n-1}$ ad $VG \times P^{n-1}$ ut XD^n ad VX^n. Unde cùm $VG \times P^{n-1}$ illi VX^n æquale ſit, erunt etiam $VG \times b^{n-1}$, XD^n inter ſe æqualia. Vel ſi recta XD deſignetur literâ x, erit $VG \times b^{n-1} = x^n$. Vel $VG = \frac{x^n}{b^{n-1}}$. Data ratio rectæ XD ad rectam DV ea ſit, quam e habet ad d. Unde $DV = \frac{d}{e}x$. Et $DG = \frac{d}{e}x - \frac{x^n}{b^{n-1}}$. Ordinatæ igitur, intervalli

muni interſectione hyperbolæ hujus & circuli deſcripti. Q.E.D. Notandum eſt autem, quòd hæc operatio perinde ſe habet, ſive recta AKN horizonti parallela ſit, ſive ad horizontem in angulo quovis inclinata: quòdque ex duabus interſectionibus H, H duo prodeunt anguli NAH, NAH; & quòd in praxi mechanicâ ſufficit circulum ſemel deſcribere, deinde regulam interminatam CH ita applicare ad punctum C, ut ejus pars FH, circulo & rectæ FK interjecta, æqualis ſit ejus parti CE inter punctum C & rectam AK ſitæ.

Quæ de Hyperbolis dicta ſunt facilè applicantur ad Parabolas. Nam ſi XAGK parabolam deſignet quam recta XV tangat in vertice X, ſintque ordinatim applicatæ IA, VG ut quælibet abſciſſarum XI, XV dignitates XI^n, XV^n; agantur XT, GT, AH, quarum XT parallela ſit VG, & GT, AH parabolam tangant in G & A: & corpus de loco quovis A, ſecundum rectam AH productam, juſtâ cum velocitate projectum, deſcribet hanc Parabolam; ſi modò denſitas medii, in locis ſingulis G, ſit reciprocè ut tangens GT. Velocitas autem in G ea erit quâcum projectile pergeret, in ſpatio non reſiſtente, in parabolâ conicâ verticem G, diametrum VG deorſum productam, & latus rectum $\frac{2GT^q}{nn-n \times VG}$ habente. Et reſiſtentia in G erit ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{2nn-2n}{n-2}$ VG (pp). Unde ſi NAK lineam horizontalem deſignet,



intervallo o abſciſſæ DY ab ordinatâ DG remotæ, hoc erit ſymbolum generale $\frac{d}{e}\,\overline{x+o} - \frac{\overline{x+o}|^n}{b^{n-1}}$; ſive, quantitate illâ $\overline{x+o}|^n$ in ſeriem infinitam reſolutâ, $\frac{d}{e}x + \frac{x^n}{b^{n-1}} + \frac{d}{e}o - \frac{nx^{n-1}o}{b^{n-1}} - \frac{nn-n}{2b^{n-1}}x^{n-2}o^2 - \frac{n^3-3n^2+2n}{6b^{n-2}}x^{n-3}o^3 -$,

Unde veniet $Q = \frac{d}{e} - \frac{n}{b^{n-1}}x^{n-1}$. $R = \frac{nn-n}{2b^{n-1}}x^{n-2}$ $S = \frac{n^3-3n^2+2n}{6b^{n-1}}x^{n-3}$.

Quare $\frac{S}{R} = \frac{n-2}{3x} = \frac{n-2}{3DX}$. Denſitas igitur, cùm per Corollarium 1^m ea ſit ut $\frac{S \times DX}{R \times GT}$, erit ut $\frac{n-2}{3GT}$, ſive ut GT contrariè.

Rurſum

net, & manente tum densitate medii in A, tum velocitate quâcum corpus projicitur, mutetur utcunque angulus NAH; manebunt longitudines AH, AI, HX (qq), & inde datur parabolæ vertex X, & positio rectæ XI (rr), & sumendo VG ad IA ut XV^n ad XI^n, dantur omnia Parabolæ puncta G, per quæ projectile transibit.

SECTIO III.

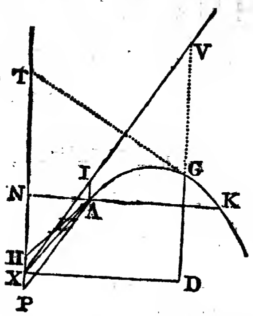
De motu corporum quibus resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ.

PROP. XI. THEOR. VIII.

Si corpori resistitur partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicatâ, & idem solâ vi insitâ in medio similari movetur: sumantur autem tempora in progressione arithmeticâ; quantitates velocitatibus reciprocè proportionales, datâ quâdam quantitate auctæ, erunt in progressione geometricâ.

Centro C, asymptotis rectangulis CAD*d* & CH, describatur hyperbola BE*e*, & asymptoto CH parallelæ sint AB, DE, *de*. In asymptoto CD dentur puncta A, G: et si tempus exponatur per aream

Rursum vis renixûs, cùm per idem Corollarium ea sit ad vim gravitatis motricem ut $3s \times$ GT ad 4RR $\times$ DX, idcirco ad vim motricem gravitatis erit ut $\frac{n^3-3n^2+2n}{2b^{n-1}}x^{n-3}$GT ad $\frac{\overline{nn-n}|^2}{b^{2n-2}}x^{2n-3}$, sive ut n^3-3n^2+2n.GT ad $\frac{2.\overline{nn-n}|^2 x^n}{b^{n-1}}$, sive ut $\frac{n-2}{2nn-2n}$ GT ad $\frac{x^n}{b^{n-1}}$: hoc est, cùm sit $\frac{x^n}{b^{n-1}}$ = VG, ut $\frac{n-2}{2nn-2n}$ GT ad VG, vel ut GT ad $\frac{2nn-2n}{n-2}$ VG.

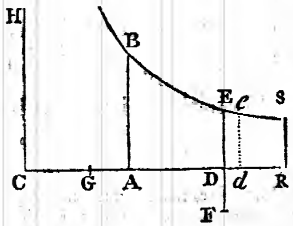


Rursum latus rectum parabolæ conicæ, quam corpus motu suo per inane scriberet, si è loco G, secundum rectam GT, eâ cum velocitate projectum fuerit, quam corpus per Curvam KOX latum in loco illo G habet, hujus inquam parabolæ latus rectum, cùm per idem Corollarium æquale sit rectæ hoc symbolo significatæ, $\frac{GT^2}{DX \times R}$; idcirco huic rectæ æquale erit, $\frac{2b^{n-1}}{\overline{nn-n}.x^n}GT^2$; quæ vel hoc etiam symbolo significabitur, $\frac{2GT^2}{\overline{nn-n}.VG}$; nempe cùm illud b^{n-1} huic $\frac{x^n}{VG}$ æquale sit.

(qq) DATA scilicet materiæ densitate, datâque etiam velocitate quâcum corpus è puncto A emissum est, rectas AH, AI magnitudine dari, id iisdem planè argumentis probare licet, quibus idem in hyperbolis ostendimus. (Vide Not. ss.) At verò rectam HX magnitudine quoque dari, id nunc ostendimus.

ream hyperbolicam ABED uniformiter crescentem; dico, quòd velocitas exponi potest per longitudinem DF, cujus reciproca GD, unà cum datâ CG, componat longitudinem, CD, in progressione geometricâ crescentem.

Sit enim areola DE*ed* datum temporis incrementum quàm minimum, & erit D*d* reciprocè ut DE, ideoque directè ut CD. Ipsius autem $\frac{1}{GD}$ decrementum, quod (per hujus Lem. II.) est $\frac{Dd}{GD_q}$, erit ut $\frac{CD}{GD_q}$, seu $\frac{CG+GD}{GD_q}$; id est, ut $\frac{1}{GD}+\frac{CG}{GD_q}$. Igitur tempore ABED per additionem datarum particularum, ED*de*, uniformiter crescente, decrescit $\frac{1}{GD}$ in eâdem ratione cum velocitate. Nam decrementum velocitatis est ut resistentia, hoc est (per hypothesin) ut summa duarum quantitatum, quarum una est ut velocitas, altera ut quadratum velocitatis; & ipsius $\frac{1}{GD}$ decrementum est ut summa quantitatum $\frac{1}{GD}$ & $\frac{CG}{GD_q}$, quarum prior est ipsa $\frac{1}{GD}$, & posterior, $\frac{CG}{GD_q}$, est ut $\frac{1}{GD_q}$: proinde $\frac{1}{GD}$, ob analogum decrementum, est ut velocitas (a). Et si quantitas GD, ipsi



ostendimus hoc modo. Agatur per A recta AP cum tangente AH parallela, quæ parabolæ diametro, NX, in P occurrat. Cùm data sit recta AI magnitudine dabitur huic æqualis XP. (Æquales autem erunt AI, XP propter figuram AIXP parallelogrammam.) Ratio autem rectæ PX ad XH è parabolæ naturâ data. Nempe cùm ea sit quæ unitatis est ad numerum $n-1$. Recta igitur XH magnitudine data (Dat. 2.) Q. E. D.

(rr) NIMIRUM ex dato quovis angulo NAH, dabitur positione recta AH. Unde ex datâ ejus longitudine datoque puncto A, punctum H dabitur. (Dat. 27.) Recta igitur HX, per datum punctum H in planum horizontis ad perpendiculum deducta, positione data. (Dat. 30.) Quare ex datâ etiam ejus longitudine datoque puncto H punctum X datum. (Dat. 27.) At vero recta AI magnitudine & positione data, punctumque A datum. Datum igitur punctum I. (Dat. 27.) Datis autem punctis X, I, recta XI positione data. (Dat. 26.) Q. E. D.

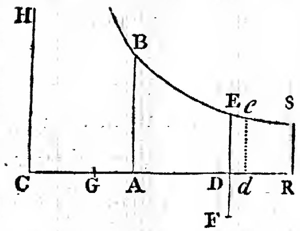
(a) Hæc est, ni fallor, argumentatio Newtoni.

In hyperbolæ cujusdam BE, positione datæ, asymptotâ CA, dato puncto quolibet G infra centrum hyperbolæ; si area hyperbolica, ABDE, quæ asymptotæ CA parte quâvis AD, rectisque AB, DE, cum alterâ asymptotâ parallelis, interclusa est, motu rectæ DE, manente illâ AB, æquabiliter increscat, sitque DF recta, quæ cum rectâ GD, inter punctum datum G rectamque mobilem DE interceptâ, rectangulum claudat datæ magnitudinis: fluxio decrescentis rectæ DF erit ut ipsa DF parte quâdam aucta, quæ quadrati ex DF semper rationem geret.

At verò si corpus per materiam, vi renixûs, qualis posita est, præditam, solâ vi insitâ impulsum progrediatur; tempore æquabiliter aucto, velocitas corporis eâ lege minuetur, ut fluxio ejus sit semper ut velocitas ipsa parte quâdam aucta, quæ ipsius velocitatis rationem duplicatam geret.

Recta igitur DF corporis velocitatem, simili planè lege decrescentem, optimè repræsentabit, modò aptè sumptum fuerit punctum G: vel etiam puncto G pro arbitrio assumpto, si talis sumatur DF quæ

 ipsi $\frac{1}{GD}$ reciprocè proportionalis, quantitate datâ CG augeatur; summa CD, tempore ABED uniformiter crescente, crescet in progressione geometricâ. Q. E. D.

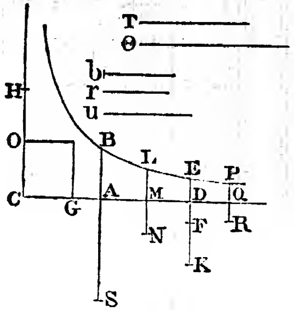


Corol. 1. Igitur si, datis punctis A, G, exponatur tempus per aream hyperbolicam ABED, exponi potest velocitas per ipsius GD reciprocam $\frac{1}{GD}$.

Corol. 2. Sumendo autem GA ad GD ut velocitatis reciproca sub initio, quæ rectangulo GD × DF justam reddat magnitudinem.

Rectam autem DF quo diximus modo fluere, id Newtonus hisce ferè argumentis probat.

Symbolo A^2, significetur spatium illud datum, cui rectangulum GD × DF ponitur æquale. Jam propter rectangulum GD × DF datum, cujus tamen latera, GD, DF, contrariè fluunt, erit (per Geom. Flux. Prop. VIII. Cor. 3.) $\dot{DF} : \dot{GD} = DF : GD$. Rectarum verò GD, CD, propter earum differentiam CG datam, fluxiones inter se æquales erunt. (Geom. Flux. Prop. V.) Quare $\dot{DF} : \dot{CD} = DF : GD$. Sed propter æquabilem areæ ABED fluxum, fluxio rectæ CD, è naturâ hyperbolæ, ipsius CD rationem geret; vel, quod idem est, recta CD fluxionis suæ. Si igitur capiatur DK, quæ sit semper ad CD, ut fluxio rectæ DF ad fluxionem rectæ CD, semper erit DK ut fluxio rectæ DF; et $DK : CD = DF : GD$. Sed cùm punctum G sit infra centrum hyperbolæ, id enim omninò ponendum est, CD major erit quàm GD. Quare et DK major quam DF. (El. V. 14.) Et cùm DK sit ad CD ut DF ad GD, permutando et convertendo erit DK ad KF, ut CD ad CG. Dividendo $DF : FK = GD : CG$. Permutando $DF : GD = FK : CG$. Quare DF^2 erit ad DF × GD, sive ad datum spatium A^2, ut FK ad datam rectam CG. Recta igitur FK, cùm sit ad datam CG ut quadratum ex DF ad spatium datum, quadrati utique ex DF rationem constanter servabit. Et fluxio rectæ DF, cùm ea sit ut DK, hoc est ut DF + FK, vel ut DF parte FK aucta, erit ut DF parte quâdam aucta, quæ quadrati ex DF rationem semper geret. Q. E. D.



Hyperbolâ autem BE cum asymptotis suis CA, CH positione datis, rectâque etiam AB, quæ cum asymptotâ CH parallela est, positione datâ; situs puncti G, qui efficiat ut rectæ DF, datum cum illis GD spatium continentes, velocitatum inter se rationes induant, dum areæ ABED temporum rationibus respondeant, is hâc ratione definiendus erit.

Sumantur ABLM, ABED, quæ temporum duorum T, Θ, rationem gerant; sumptâque rectâ MN hyperbolæ ordinatæ ML æquali, inveniatur alia DF quæ ad illam MN rationem habeat, quam velocitas corporis sub finem temporis Θ ad velocitatem ejus sub finem temporis minoris T. Inveniatur in rectâ DC punctum G, ut sit GD ad GM ut MN ad DF. Punctum G infra centrum erit hyperbolæ. Areâ enim ABLM æquabiliter crescente, ordinata ML ratione Geometricâ decrescet. Quare fluxio rectæ ML ipsius ML rationem semper geret. Et si velocitas corporis eâ lege decresceret, ut fluxio ejus ipsius semper rationem servaret, hyperbolæ ordinata DE ad ordinatam ML, vel ejus æqualem rectam MN, rationem haberet, quam velocitas sub finem temporis Θ ad velocitatem sub finem temporis T. Namque area hyperbolica LMDE logarithmus est rationis quam ML habet ad DE. Et tempus Θ − T logarithmus esset rationis, quam velocitas sub finem temporis T ad velocitatis sub finem temporis Θ haberet, si geometricâ ratione velocitas decresceret. Sed area LMDE temporis Θ − T rationem servat. Unde, propter mutuam logarithmorum competentiam, ratio velocitatis ad velocitatem eadem quæ rectæ ML ad rectam DE esset. Sed velocitas, cùm

initio, ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujusvis ABED, invenietur punctum G. Eo autem invento, velocitas ex dato quovis alio tempore inveniri potest.

PROP. XII. THEOR. IX.

Iisdem positis, dico, quòd si spatia descripta sumantur in progressione arithmeticâ, velocitates, datâ quâdam quantitate auctæ, erunt in progressione Geometricâ.

In asymptoto CD detur punctum R, & erecto perpendiculo RS, quod occurrat hyperbolæ in S, exponatur descriptum spatium per

cùm eâ lege decrescat, ut fluxio ejus semper sit ut velocitas ipsâ parte quâdam aucta, quæ ipsius rationem duplicatam gerat, velociùs utique decrescit, quàm ut fluxio ejus ipsius rationem servet. Ac propterea, dato quovis tempore, minor fiet, quàm si geometricâ ratione decrementum subiisset. Minor igitur, quàm illa DE, erit recta quæ ad ML, vel ejus æqualem MN, rationem habebit quam velocitas sub finem temporis Θ ad velocitatem sub finem temporis T. Quare DF minor erit quàm DE. Quare MN major erit, quàm ut habeat ad DF rationem eam, quam MN, vel ML, ad DE. (El. V. 8.) Sed $MN : DF = GD : GM$. (Id enim factum est) Et $ML : DE = CD : CM$, propter hyperbolam. Quare GD major erit, quàm ut habeat ad GM rationem eam, quam CD ad CM. Convertendo, minor erit GD quàm quæ habeat ad DM rationem eam quam CD ad DM. Quare GD minor erit quàm CD. (El. V. 10.) Quare punctum G infra C centrum hyperbolæ. Et cùm GD sit ad GM ut MN ad DF, rectangula GD × DF, GM × MN erunt inter se æqualia. Et tempore Θ utcunque aucto, si capiatur area ABQP, quæ ad aream ABED rationem habeat, quam tempus illud majus ad tempus Θ, velocitas sub finem temporis illius majoris erit ad velocitatem sub finem temporis Θ ut recta QR, quæ cum GQ rectangulum contineat dato GM × MN æquale, ad rectam DF.

Sed leviore negotio efficere liceat, ut rectæ DF velocitatum rationes præ se ferant, si punctum G pro arbitrio sumatur. Sumatur enim. Sint r, u rectæ eâ lege mutabiles, ut illæ r renixûs, illæ u velocitatis semper rationes gerant. Sit b recta datæ magnitudinis. Et talis ponatur lex renixûs, ut sit semper $r = u + \frac{uu}{b}$. In asymptotâ CH capiatur CO datæ b æqualis, et compleatur rectangulum OG. Capiatur GA ejus longitudinis, ut cum datâ illâ rectæ u longitudine, qualem utique initio motûs illa habuit, rectangulum contineat dato OG æquale. Tum si capiatur DF ejus semper longitudinis, quæ efficiat rectangulum DF × DG eidem OG æquale, illa DF ita fluet, ut velocitatis semper rationem servet, modò area ABED temporis rationem tueatur. Area enim ABDE æquabiliter fluente erit $\dot{DF} = DF + \frac{DF^2}{A^2}\,CG$ (per ea quæ suprà ostensa sunt). Vel si pro symbolo A^2 rectangulum OG substituatur, $\dot{DF} = DF + \frac{DF^2}{OC} = DF + \frac{DF^2}{B}$. Sed $\dot{u} = u + \frac{uu}{B}$. Quare si initio fluxûs illæ DF, u æquales fuerint, æquales tunc erunt earum fluxiones, et rectæ ipsæ, decrementis æqualibus imminutæ, æquales usque manebunt. Sunt autem, initio fluxûs, illæ DF, u æquales. Tempore enim Θ paulatim imminuto, area ABED pari ratione paulatim minuatur, usque dum tempore Θ ad nihilum redacto, area ABED in nihilum simul abeat, ordinatâ DE cum illâ AB ultimò congruente. Recta verò DF, increscendo utique dum GD decrescat, ut rectangulo DF × GD sua constet magnitudo, rectæ AS magnitudinem ultimò adepta sit. Rectangulum igitur AS × GA dato OG æquale. Talis autem accepta est recta GA, quæ cum rectâ u, qualis utique initio motûs illa fuit, rectangulum contineat illi OG æquale. Quare AS, quæ est longitudo rectæ DF, quam nascente areâ ABED primam illa habuit, eadem longitudo erit rectæ u, quam primam illa, nascente tempore Θ, habuit. Sunt igitur illæ DF, u initio fluxûs inter se æquales. Quare æquales semper erunt, dummodo area ABED tueatur temporis rationem. Et tempore æquabiliter aucto, cùm area ABED æquabiliter simul crescat, recta GD, quæ ipsius DF contrariam semper rationem gerit, datâ CG aucta, geometricâ ratione crescet.

areæ

aream hyperbolicam RSED *(vid. fig. p. 308)*; & velocitas erit ut longitudo GD, quæ, cum datâ CG, componit longitudinem CD in progreſſione geometricâ decreſcentem, interea dum ſpatium RSED augetur in arithmeticâ.

Etenim ob datum ſpatii incrementum EDde, lineola Dd, quæ decrementum eſt ipſius GD, erit reciprocè ut ED, ideoque directè ut CD, hoc eſt, ut ſumma ejuſdem GD & longitudinis datæ CG. Sed velocitatis decrementum, tempore ſibi reciprocè proportionali, quo data ſpatii particula DdeE deſcribitur, eſt ut reſiſtentia & tempus conjunctim; id eſt, directè ut ſumma duarum quantitatum, quarum unà eſt ut velocitas, altera ut velocitatis quadratum, & inverſè ut velocitas; ideoque directè ut ſumma duarum quantitatum, quarum una datur, altera eſt ut velocitas. Decrementum igitur tam velocitatis quàm lineæ GD, eſt ut quantitas data & quantitas decreſcens conjunctim; & propter analoga decrementa, analogæ ſemper erunt quantitates decreſcentes; nimirum velocitas & linea GD [b]. Q. E. D.

Corol. 1. Si velocitas exponatur per longitudinem GD, ſpatium deſcriptum erit ut area hyperbolica DESR.

Corol. 2. Et ſi utcunque aſſumatur punctum R, invenietur punctum G, capiendo GR ad GD, ut eſt velocitas ſub initio ad velocitatem poſt ſpatium quodvis RSED deſcriptum. Invento autem puncto G, datur ſpatium ex datâ velocitate, & contrà.

Corol. 3. Unde cùm (per Prop. XI.) detur velocitas ex dato tempore

(b) Nimirum in hyperbolæ cujuſvis, BE, poſitione datæ, aſymptotâ CA dato puncto G infra centrum *(vid. fig. p. 308)*, ſi area hyperbolica RSED, quæ aſymptotæ CA parte quâvis RD, rectiſque RS, DE, cum alterâ aſymptotâ parallelis, intercluſa eſt, motu rectæ DE verſus aſymptotam CH, manente illâ RS, æquabiliter increſcat; rectæ decreſcentis GD fluxio erit ſemper ut GD datâ CG aucta. Nam propter æquabilem areæ SRDE fluxum, recta CD è naturâ hyperbolæ ratione geometricâ decreſcet. Quare fluxio rectæ CD ipſius CD rationem ſemper ſervabit. Unde ponere liceat $\dot{\overline{CD}} = CD$. (Geometr. Flux. Def. 5.) Sed rectarum GD, CD fluxiones, ob datam fluentium differentiam, CG, ſemper inter ſe æquales erunt. (Geometr. Flux. Prop. V.) Quare $\dot{\overline{GD}} = \dot{CD} = CD = CG + GD$.

Verùm ſi corpus per materiam, vi renixûs, qualis poſita eſt, præditam, ſolâ vi inſitâ impulſum progrediatur, tum ſi arithmeticè ſumantur itineris confecti ſpatia, velocitas corporis eâ quidem lege minuetur, ut fluxio ejus ſit ſemper ut velocitas ipſa datâ quâdam aucta. Sint enim R, V, S, T, rectæ eâ lege mutabiles, ut illæ R renixûs, illæ V velocitatis, illæ S itineris confecti, illæ T temporis quo conficitur iter S, rationem tueantur. Sit B recta datæ magnitudinis. Atque talis ponatur lex renixûs, ut ſit ſemper $R = V + \frac{VV}{B}$. Sive $BR = BV + VV$. Jam cùm $\dot{V}$ ſit ſemper ut $R \times \dot{T}$, et $\dot{T}$ ſit ſemper ut $\frac{\dot{S}}{V}$, erit $\dot{V}$ ut $\frac{R \times \dot{S}}{V}$, ſive datâ $\dot{S}$, quod poſuimus, ut $\frac{R}{V}$. Unde ponere licet $\dot{\overline{V}} = \frac{BR}{V}$. (Geometr. Flux. Def. 5.) Quare $\dot{\overline{V}} = B + V$.

R—— V—— B—
Y— S—— T——.

Recta igitur GD corporis velocitatem, ſimili planè lege decreſcentem, optimè repræſentabit, ſi dato punctorum G, R altero, alterum aptè ſumatur.

Dato autem puncto G *(fig. p. 308)*, talis ſumenda eſt GR, quæ ad rectæ V, qualem utique initio motûs illa habuit, longitudinem rationem habeat quam CG ad B. Vel dato R, talis ſumenda eſt CG quæ ad GR rationem habeat quam data B ad longitudinem rectæ V, qualem utique initio motûs illa habuit. Ita ſemper GD velocitatis rationem ſervabit, modò area SRDE itineris confecti rationem ſervet. Puta enim ſpatium itineris S tempore quodam T confectum; eodemque tempore aream SRDE generatam, et velocitatem quæ initio fuerit V in minorem Y abiiſſe. Dico GR eſſe ad GD ut V ad Y. Cùm enim, datâ $\dot{S}$, $\dot{\overline{V}}$ ſit ut B + V, ſpatio S æquabiliter aucto, recta B + V ratione geometricâ decreſcet. Quare iter confectum S logarithmus erit rationis quam B + V habet ad B + Y. At verò area hyperbolica SRDE rationis quam CR habet ad CD, è naturâ hyperbolæ, erit logarithmus; et area illa hyperbolica ſimili ſemper ratione cum itinere confecto creſcit. Ob mutuam igitur logarithmorum competentiam, eadem erit ratio rectæ B + V ad B + Y quæ rectæ CR ad CD, ſive quæ CG + GR ad CG + GD. Et permutando B + V : CG + GR = B + Y : CG + GD. Eſt autem B : CG = V : GR. (Id enim factum eſt.) Erit igitur B + V : CG + GR = B : CG. (El. V. 12.) Et cùm ſit etiam B + V : CG + GR = B + Y : CG + GD, erit B : CG = B + Y : CG + GD. (El. V. 11.) Quare permutando B : B + Y = CG : CG + GD. Invertendo et dividendo Y : B = GD : CG. Permutando B : CG = Y : GD. Sed B : CG = V : GR. Quare V : GR = Y : GD. Permutando V : Y = GR : GD. Q. E. D.

pore

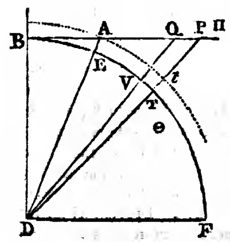
licet

pore, & per hanc propoſitionem detur ſpatium ex datâ velocitate; dabitur ſpatium ex dato tempore: & contrà.

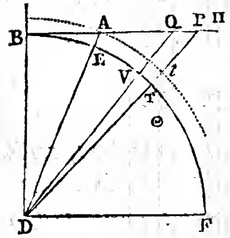
PROP. XIII. THEOR. X.

Poſito quòd corpus, ab uniformi gravitate deorſum attractum, rectà aſcendit vel deſcendit; & quòd eidem reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicatâ: dico quòd, ſi circuli & hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates ſint ut ſegmenta quædam parallelarum à dato puncto ducta; tempora erunt ut arearum ſectores, rectis à centro ad ſegmentorum terminos ductis abſciſſi: & contrà.

Caſ. 1. Ponamus primò quòd corpus aſcendit; centroque D & ſemidiametro quovis DB deſcribatur circuli quadrans BETF, & per ſemidiametri DB terminum B agatur infinita BAP, ſemidiametro DF parallela. In eâ detur punctum A, & capiatur ſegmentum AP velocitati proportionale. Et cùm reſiſtentiæ pars altera ſit ut velocitas, & pars altera ut velocitatis quadratum; ſit reſiſtentia tota ut AP *quad.* + 2BAP. Jungan-



tur



tur DA, DP, circulum ſecantes in E ac T, & exponatur gravitas per DA *quad.* ita ut ſit gravitas ad reſiſtentiam in P ut DAq ad APq + 2BAP (c): & tempus aſcenſûs totius erit ut circuli ſector EDT.

Agatur enim DVQ, abſcindens & velocitatis AP momentum PQ, & ſectoris DET momentum DTV dato temporis momento reſpondens; & velocitatis decrementum illud PQ erit ut ſumma virium gravitatis DAq & reſiſtentiæ APq + 2BAP, id eſt (per Prop. XII. Lib. II. Elem.) ut DPq *quad.* Proinde area DPQ, ipſi PQ proportionalis, eſt ut DP *quad.* & area DTV, quæ eſt ad aream DPQ ut DTq ad DPq, eſt ut datum DTq (d). Decreſcit igitur area EDT uniformiter ad modum temporis futuri, per ſubductionem datarum particularum DTV, & propterea tempori aſcenſûs totius proportionalis eſt. Q. E. D.

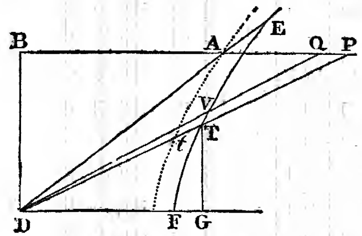
Caſ.

(c) Hujus lineationis ratio ita, ni fallor, apertiùs exponatur. Recta AP poſitione data, manente puncto A, eâ lege fluat, ut mutabilem corporis cujuſdam velocitatem referat, quod per materiam vi renixûs, qualis poſita eſt, præditam, urgente vi uniformi gravitatis, rectâ cadat vel aſcendat. Sit R alia recta, quæ eâ lege fluat, ut renixûs materiæ ſemper rationem ſervet. Detur magnitudine recta β. Atque talis ponatur lex renixûs, ut ſit ſemper $\beta R = \beta \times AP + AP^2$. In PA productâ capiatur AB ſemiſſi rectæ β æqualis. Unde ſemper erit $2AB \times R = 2BAP + AP^2$. Et rectâ AP ad modum velocitatis fluente, ſpatium $2BAP + AP^2$ ita fluet, ut renixûs ſemper rationem ſervet. Datam puta rationem quam vis renixûs ad vim conſtantem gravitatis habeat, quando corpus dato quodam velocitatis gradu feratur. Atque detur etiam rectæ mutabilis AP magnitudo, AΠ, quæ datam illam velocitatem referat. Ita dabitur ſpatium, quod ad datam tunc ſpatii fluentis $2BAP + AP^2$ magnitudinem, $2BA\Pi + A\Pi^2$, rationem illam datam habeat quam vis gravitatis ad vim renixûs. Sit C recta cujus quadratum huic ſpatio æquale eſt. Et cùm vis renixûs ſpatii mutabilis $2BAP + AP^2$ rationem ſemper ſervet, vis conſtans gravitatis erit ſemper ad vim renixûs, ut quadratum è rectâ C datum ad mutabile $2BAP + AP^2$. Recta autem C vel major erit quàm AB, vel minor, vel ei æqualis. Si major ſit, deducatur à puncto A in rectam BD, ad perpendiculum à puncto B eductam, recta AD illi C æqualis. Centro D intervallo DB ſcribatur circulus. Sint Π, P duo quævis loca puncti mobilis P. Junctæ DΠ, DP circulo in Θ, T occurrant. Tempus aſcendendi à loco illo, ubi corporis velocitas ea eſt quam recta AΠ refert, locum uſque quem corpus, extinctâ ſenſim velocitate, ſummum attigerit, ad tempus aſcendendi à loco alio, ubi velocitas eſt ea quam recta AP refert, locum uſque ſummum, erit ut ſector ΘDE ad ſectorem TDE. Vel ſermone Newtoniano, ſector TDE erit ut tempus, quo velocitas AP aſcendendo extinguitur.

(d) Hoc eſt, fluxio trianguli DPA, quæ fluxionis rectæ AP rationem ſervat, ea ad quadratum ex DP datam rationem geret. Sed fluxio trianguli DPA eſt ad fluxionem ſectoris DTE ut quadratum ex DP ad quadratum ex DT. Permutando $\dot{\overline{DTE}} : DT^2 = \dot{\overline{DPA}} : DP^2$. Quare cùm $\dot{\overline{DPA}}$ ſive fluxio trianguli DPA, ad quadratum ex DP datam rationem habeat, fluxio ſectoris DTE ad quadratum ex DT datam quoque rationem geret. Sed recta DT, cùm rectæ BD æqualis eſt, magnitudine datur. Nam AD poſitione data. (Dat. 31.) Et BD poſitione data. (Dat. 29.) Quare punctum D datum. (Dat. 25.) Et B datum; quia extremum eſt rectæ AB, magnitudine et poſitione datæ, cujus alterum extremum A datur. (Dat. 27.) Recta igitur BD, & illi æqualis DT, magnitudine data eſt. (Dat. 26.) Quare quadratum ex DT magnitudine datum, et fluxio ſectoris

circularis

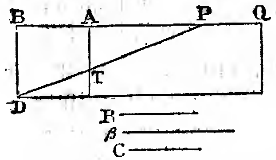
Caſ. 2. Si velocitas in aſcenſu corporis exponatur per longitudinem AP ut priùs, & reſiſtentia ponatur eſſe ut APq + 2BAP, & ſi vis gravitatis minor ſit quàm quæ per DAq exponi poſſit; capiatur BD ejus longitudinis, ut ſit ABq − BDq gravitati proportionale (e); ſitque DF ipſi DB perpendicularis & æqualis, & per verticem F deſcribatur hyperbola FTVE, cujus ſemidiametri conjugatæ ſint DB & DF, quæque ſecet DA in E, & DP, DQ in T & V; & erit tempus aſcenſûs totius ut hyperbolæ ſector TDE.



Nam velocitatis decrementum PQ, in datâ temporis particulâ factum, eſt ut ſumma reſiſtentiæ APq + 2BAP & gravitatis ABq − BDq, id eſt, ut BPq − BDq. Eſt autem area DTV ad aream DPQ ut DTq ad DPq; ideoque, ſi ad DF demittatur perpendiculum TG, ut GTq, ſeu GDq − DFq, ad BDq, utque GDq ad BPq; & diviſim ut

circularis DTE magnitudine data. Sector igitur DTE, cujus fluxio conſtans, æquabiliter fluit.

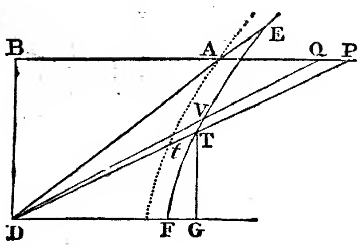
(e) Jam verò C non ſit major quàm AB. Vel minor igitur erit, vel ei æqualis. Sit æqualis primò; cujus caſûs demonſtrationem Newtonus, ad alia properans, neglexit. A puncto B ad perpendiculum eductâ BD, capiatur BD ipſi AB æqualis. Per A educatur ad perpendiculum recta AT, cui juncta DP in T occurrat. Dico tempus, quo conſumitur aſcendendo velocitas AP, eſſe ut triangulum DTA*; ſive ut recta TA. Cùm enim vis conſtans gravitatis ſit ſemper ad vim renixûs ut C^2 ad $2BAP + AP^2$; idcirco, poſitis C, AB æqualibus, ſumma virium gravitatis renixûſque erit ut $BA^2 + 2BAP + AP^2$, hoc eſt (per El. II. 4.) ut BP^2. Velocitatis autem fluxio, tempore æquabiliter aucto, ſummæ virium gravitatis renixûſque rationem ſervabit. Quare fluxio rectæ AP erit ſemper ut quadratum ex BP. Vel ſi ad datam BD applicetur rectangulum QD quadrato ex BP æquale, rectæ AP fluxio ad rectam BQ rationem datam geret. Sed cùm recta DP, polo D mobilis, rectas AP, AT poſitione datas ſecet, erit $\dot{\overline{AP}} : \dot{\overline{AT}} = DP \times PA : DT \times TA$. (Introduct. Quad. Curv. § 8.) Sed propter parallelas AT, BD, erit $PA : PB = TA : BD$. Quare $DP \times PA : DP \times PB = DT \times TA : DT \times BD$. Permutando $DP \times PA : DT \times TA = DP \times PB : DT \times BD$. Quare $\dot{\overline{AP}} : \dot{\overline{AT}} = DP \times PB : DT \times BD$. Sed propter rectas AT, DB parallelas, erit $DP : PB = DT : BA$, vel BD. Rectangula igitur $DP \times PB$, $DT \times BD$ inter ſe ſimilia erunt, et quadratorum è lateribus PB, BD inter ſe rationem gerent. Hoc eſt $DP \times PB : DT \times BD = PB^2 : BD^2 = QB : BD$. Quare $\dot{\overline{AP}} : \dot{\overline{AT}} = QB : BD$. Permutando $\dot{\overline{AP}} : QB = \dot{\overline{AT}} : BD$. Sed ratio illius $\dot{\overline{AP}}$ ad QB data eſt. Quare et illius $\dot{\overline{AT}}$ ad datam BD data. Quapropter $\dot{\overline{AT}}$ data erit magnitudine. Et recta AT, cujus conſtans eſt fluxio, nimirum ſi tempus æquabiliter augeatur, æquabiliter ad modum temporis ipſa fluet. Q. E. D.



At verò ſi C minor ſit quàm AB, capiatur BD ejus longitudinis, ut quadratum ex BD illud ſit, quo quadratum ex AB exſuperat quadratum ex C. Ita fiet $AB^2 - BD^2 = C^2$; et vis gravitatis ſemper erit ad vim renixûs ut $AB^2 - BD^2$ ad $AP^2 + 2BAP$.

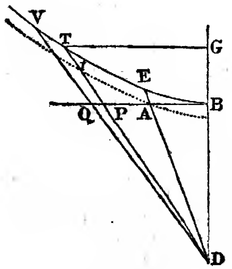
* *In oppoſitâ figurâ artifex rectam* DA *cælare neglexit. Ut in figurâ caſus ſuperioris, p. 312, rectam* DΘΠ.

DFq



DFq ad BPq−BDq. Quare cùm area DPQ ſit ut PQ, id eſt, ut BPq−BDq; erit area DTV ut datum DFq. Decreſcit igitur area EDT uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus, per ſubductionem particularum totidem datarum DTV, & propterea tempori proportionalis eſt. Q. E. D.

Caſ. 3. Sit AP velocitas in deſcenſu corporis, & APq+2BAP reſiſtentia, & BDq − ABq vis gravitatis (f), exiſtente angulo DBA recto. Et ſi centro D, vertice principali B, deſcribatur hyperbola rectangula BETV ſecans productas DA, DP & DQ in E, T & V; erit hyperbolæ hujus ſector DET ut tempus totum deſcenſûs.



Nam velocitatis incrementum PQ, eique proportionalis area DPQ, eſt ut exceſſus gravitatis ſupra reſiſtentiam, id eſt, ut BDq−ABq−2BAP−APq, ſeu BDq−BPq. Et area DTV eſt ad aream DPQ ut DTq ad DPq, ideoque ut GTq, ſeu GDq−BDq, ad BPq, utque GDq ad BDq, & diviſim ut BDq ad BDq−BPq. Quare cùm area DPQ ut ſit BDq−BPq, erit area DTV ut datum BDq. Creſcit igitur area EDT uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus, per additionem totidem datarum particularum DTV, & propterea tempori deſcenſûs proportionalis eſt. Q. E. D.

Corol. Si centro C, ſemidiametro DA, per verticem A ducatur arcus A*t* ſimilis arcui ET, & ſimiliter ſubtendens angulum ADT: velocitas AP erit ad velocitatem, quam corpus tempore EDT, in ſpatio non reſiſtente, aſcendendo amittere vel deſcendendo acquirere poſſet, ut area trianguli DAP ad aream ſectoris DA*t*; ideoque ex dato tempore datur. Nam velocitas, in medio non reſiſtente, tempori, atque ideo ſectori huic proportionalis eſt; in medio reſiſtente eſt ut triangulum; & in medio utroque, ubi quàm minima eſt, accedit ad rationem æqualitatis, pro more ſectoris & trianguli.

(f) Si corpus recta cadat, rectâ c ut priùs inventâ, in rectâ BD à puncto B ad perpendiculum eductâ capiatur BD, cujus quadratum quadratis ex AB et ex c ſimul ſumptis æquale ſit.

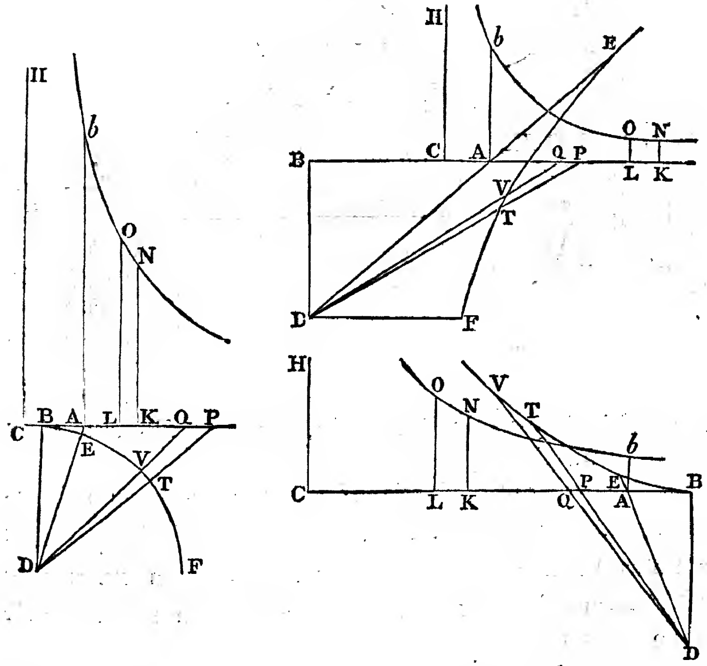
Scholium.

Demonſtrari etiam poſſet caſus in aſcenſu corporis, ubi vis gravitatis minor eſt quàm quæ exponi poſſit per DAq ſeu ABq+BDq, & major quàm quæ exponi poſſit per ABq−BDq, & exponi debet per ABq (g). Sed propero ad alia.

PROP. XIV. THEOR. XI.

Iiſdem poſitis, dico quòd ſpatium aſcenſu vel deſcenſu deſcriptum, eſt ut differentia areæ per quam tempus exponitur, & areæ cujuſdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progreſſione Arithmeticâ, ſi vires ex reſiſtentiâ & gravitate compoſitæ ſumantur in progreſſione Geometricâ.

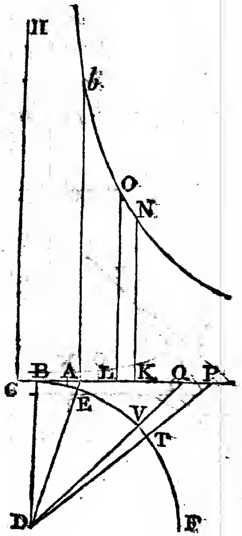
Capiatur AC (in fig. tribus ultimis) gravitati, & AK reſiſtentiæ

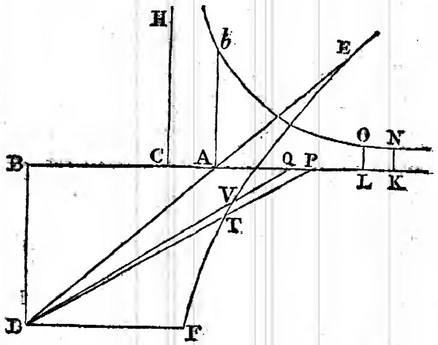


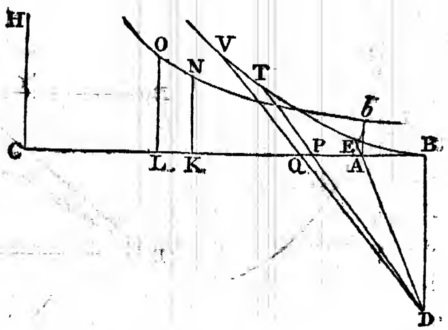
proportionalis. Capiantur autem ad eaſdem partes puncti A, ſi corpus

(g) Vide Not. *.

corpus descendit; aliter ad contrarias. Erigatur Ab, quæ sit ad DB ut DBq ad 4BAC: & descriptâ ad asymptotos rectangulas, CK, CH hyperbolâ bN, erectâque KN ad CK perpendiculari, area AbNK augebitur vel diminuetur in progressione Arithmeticâ, dum vires CK in progressione Geometricâ sumuntur. Dico igitur quòd distantia corporis ab ejus altitudine maximâ sit ut excessus areæ AbNK supra aream DET.







Nam cùm AK sit ut resistentia, id est, ut APq + 2BAP; assumatur data quævis quantitas Z, & ponatur AK æqualis $\frac{APq+2BAP}{Z}$; & (per hujus Lemma II.) erit ipsius AK momentum KL æquale $\frac{2APQ+2BA\times PQ}{Z}$ seu $\frac{2BPQ}{Z}$, & areæ AbNK momentum KLON æquale $\frac{2BPQ\times LO}{Z}$ seu $\frac{BPQ\times BD\ cub.}{2Z\times CK\times AB}$.

Cas. I. Jam si corpus ascendit, sitque gravitas ut ABq + BDq, existente BET Circulo (in figurâ primâ) linea AC, quæ gravitati proportionalis

I proportionalis

proportionalis est, erit $\frac{ABq+BDq}{Z}$; & DPq, seu APq + 2BAP + ABq + BDq, erit AK × Z + AC × C, seu CK × Z; ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DTq vel DBq ad CK × Z.

Cas. 2. Sin corpus ascendit, & gravitas sit ut ABq − BDq, linea AC (in figurâ secundâ) erit $\frac{ABq-BDq}{Z}$; & DTq erit ad DPq ut DFq, seu DBq, ad BPq − BDq, seu APq + 2BAP + ABq − BDq; id est, ad AK × Z + AC × Z, seu CK × Z. Ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DBq ad CK × Z.

Cas. 3 Et eodem argumento, si corpus descendit, & propterea gravitas sit ut BDq − ABq, & linea AC (in figurâ tertiâ) æquetur $\frac{BDq-ABq}{Z}$, erit area DTV ad aream DPQ ut DBq ad CK × Z: ut suprà.

Cùm igitur areæ illæ semper sint in hâc ratione; si pro areâ DTV, quâ momentum temporis sibimet ipsi semper æquale exponitur, scribatur determinatum quodvis rectangulum, puta BD × m, erit area DPQ, id est, $\frac{1}{2}$BD × PQ, ad BD × m ut CK × Z ad BDq. Atque inde fit PQ × BD *cub.* æquale 2BD × m × CK × Z; & areæ AbNK momentum, KLON, superiùs inventum, fit $\frac{BP\times BD\times m}{BA}$. Auferatur areæ DET momentum DTV, seu BD × m, & restabit $\frac{AP\times BD\times m}{AB}$. Est igitur differentia momentorum, id est, momentum differentiæ arearum, æqualis $\frac{AP\times BD\times m}{AB}$; & propterea, ob datum $\frac{BD\times m}{AB}$, ut velocitas AP, id est, ut momentum spatii quod corpus ascendendo vel descendendo describit. Ideoque differentia arearum & spatium illud, proportionalibus momentis crescentia vel decrescentia & simul incipientia vel simul evanescentia, sunt proportionalia. Q. E. D.

Corol. Si longitudo, quæ oritur applicando aream DET ad lineam BD, dicatur M; & longitudo alia V sumatur in eâ ratione ad longitudinem M, quam habet linea DA ad lineam DE: spatium, quod corpus ascensu vel descensu toto in medio resistente describit, erit ad spatium, quod corpus in medio non resistente, è quiete cadendo, eodem tempore describere potest, ut arearum prædictarum differentia ad $\frac{BD\times V^2}{AB}$: ideoque ex dato tempore datur. Nam spatium in medio non resistente est in duplicatâ ratione temporis, sive ut V^2; &, ob datas BD & AB, ut $\frac{BD\times V^2}{AB}$. Hæc area æqualis

æqualis

qualis eſt areæ $\frac{DAq \times BD \times M^2}{DEq \times AB}$, & ipſius M momentum eſt m; & propterea hujus areæ momentum eſt $\frac{DAq \times BD \times 2M \times m}{DEq \times AB}$. Hoc autem momentum eſt ad momentum differentiæ arearum prædictarum DET & A*b*NK, *viz.* ad $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$, ut $\frac{DAq \times BD \times M}{DEq}$ ad $\frac{1}{2} BD \times AP$, ſive ut $\frac{DAq}{DEq}$ in DET ad DAP; ideoque, ubi areæ DET & DAP quàm minimæ ſunt, in ratione æqualitatis. Area igitur $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & differentia arearum DET & A*b*NK, quando omnes hæ areæ quàm minimæ ſunt, æqualia habent momenta; ideoque ſunt æquales. Unde cùm velocitates, & propterea etiam ſpatia, in medio utroque in principio deſcenſûs vel fine aſcenſûs ſimul deſcripta accedant ad æqualitatem; ideoque tunc ſint ad invicem ut area $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & arearum DET & A*b*NK differentia; & præterea cùm ſpatium in medio non reſiſtente ſit perpetuò ut $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & ſpatium in medio reſiſtente ſit perpetuò ut arearum DET & A*b*NK differentia: neceſſe eſt, ut ſpatia in medio utroque, in æqualibus quibuſcunque temporibus deſcripta, ſint ad invicem ut area illa $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & arearum DET & A*b*NK differentia. Q. E. D.

Scholium.

Reſiſtentia corporum ſphæricorum in fluidis oritur partim ex tenacitate, partim ex frictione, & partim ex denſitate Medii. Et reſiſtentiæ partem illam, quæ oritur ex denſitate fluidi diximus eſſe in duplicatâ ratione velocitatis; pars altera, quæ oritur ex tenacitate fluidi, eſt uniformis, ſive ut momentum temporis: ideoque jam pergere liceret ad motum corporum, quibus reſiſtitur partim vi uniformi, ſeu in ratione momentorum temporis, & partim in ratione duplicatâ velocitatis. Sed ſufficit aditum patefeciſſe ad hanc ſpeculationem in Propoſitionibus VIII & IX. quæ præcedunt, & eorum Corollariis. In iiſdem utique pro corporis aſcendentis reſiſtentiâ uniformi, quæ ex ejus gravitate oritur, ſubſtitui poteſt reſiſtentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii, quando corpus ſolâ vi inſitâ movetur; & corpore rectâ aſcendente addere licet hanc uniformem reſiſtentiam vi gravitatis; eandemque

(1) Nimirum TQ eſt ad PD ut TS ad PE, propter tres rectas, PT, DQ, ES, inter ſe parallelas. Evaneſcente

que ſubducere, quando corpus rectâ deſcendit. Pergere etiam liceret ad motum corporum, quibus reſiſtitur partim uniformiter, partim in ratione velocitatis, & partim in ratione duplicatâ velocitatis. Et viam aperui in Propoſitionibus præcedentibus XIII & XIV. in quibus etiam reſiſtentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii pro vi gravitatis ſubſtitui poteſt, vel cum eâdem, ut priùs, componi. Sed propero ad alia.

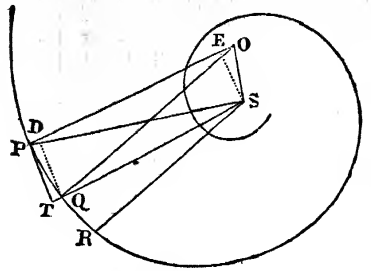
SECTIO IV.

De corporum circulari motu in mediis reſiſtentibus.

LEMMA III.

Sit PQR *Spiralis, quæ ſecet radios omnes* SP, SQ, SR, *&c. in æqualibus angulis. Agatur recta* PT, *quæ tangat eandem in puncto quovis* P, *ſecetque radium* SQ *in* T; *& ad Spiralem erectis perpendiculis* PO, QO *concurrentibus in* O, *jungatur* SO. *Dico, quòd ſi puncta* P *&* Q *accedant ad invicem & coeant, angulus* PSO *evadet rectus, & ultima ratio rectanguli* TQ × 2PS *ad* PQ *quad. erit ratio æqualitatis.*

Etenim de angulis rectis OPQ, OQR ſubducantur anguli æquales SPQ, SQR, & manebunt anguli æquales OPS, OQS. Ergo circulus, qui tranſit per puncta O, S, P, tranſibit etiam per punctum Q. Coeant puncta P & Q, & hic circulus, in loco coitûs PQ, tanget Spiralem, ideoque perpendiculariter ſecabit rectam OP. Fiet igitur OP diameter circuli hujus, & angulus OSP in ſemicirculo rectus. Q. E. D.



Ad OP demittantur perpendicula QD, SE, & linearum rationes ultimæ erunt hujuſmodi: TQ ad PD ut TS, vel PS, ad PE, ſeu 2PO ad 2PS; item PD ad PQ ut PQ ad 2PO (1); & ex æquo perturbatè TQ ad PQ ut PQ ad 2PS. Unde fit PQ*q* æquale TQ × 2PS. Q. E. D.

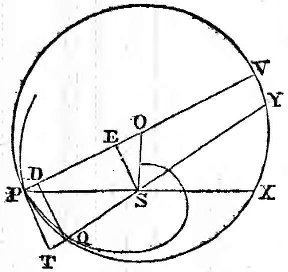
P R O P.

Evaneſcente autem angulo PST, recta TS fit rectæ PS ultimò æqualis. Erit igitur TQ ad PD ultimò

PROP. XV. THEOR. XII.

Si medii denſitas in locis ſingulis ſit reciprocè ut diſtantia locorum à centro immobili, ſitque vis centripeta in duplicatâ ratione denſitatis: dico quòd corpus gyrari poteſt in Spirali, quæ radios omnes à centro illo ductos interſecat in angulo dato.

Ponantur quæ in ſuperiore Lemmate, & producatur SQ ad V (*fig. p.* 322.) ut ſit SV æqualis SP. Tempore quovis, in medio reſiſtente, deſcribat



timò ut PS ad PE. Sed propter angulum OSP rectum, anguloſque ad E rectos, erit PS ad PE, ut PO ad PS (El. VI. 8.) hoc eſt, ut 2PO ad 2PS. Ergo TQ erit ad PD ultimò ut 2PO ad 2PS.

Recta PO circulo, qui radio OP circum centrum O ſcriptus fuerit, iterum in V occurrat. Propter angulum ad D rectum (talis enim factus eſt), quadratum ex DQ rectangulo VD × DP æquale eſt; ultimò ſcilicet, arcu ſpirarum PQ infinitè imminuto, ut punctum Q ſit ad circulum illum cujus radius OP, quique ſpiras in puncto P oſculatur. Evaneſcendo arcus PQ rectaque DQ fiunt ultimò inter ſe æquales. Quare quadrata evaneſcentia ex PQ, DQ, ultimò æqualibus, fiunt ultimò inter ſe æqualia. Quadratum igitur ex PQ et rectangulum VD × DP æqualium rationem ultimò inter ſe aſciſcunt. Sed propter rectam VD ipſi VP ultimò æqualem, rectangula quoque evaneſcentia VD × DP, VP × PD ultimò inter ſe æqualia erunt. Quadratum igitur ex PQ et rectangulum VP × PD fiunt ultimò inter ſe æqualia. Unde PD erit ultimò ad PQ ut PQ ad VP, vel 2PO. Cùm igitur ſit TQ ad PD ultimò ut 2PO ad 2PS, et PD ad arcum PQ ultimò, ut PQ ad 2PO; ex æquo perturbatè, inquit Newtonus, erit TQ ad PQ ultimò, ut PQ ultimo ad 2PS; ac propterea quadratum ex PQ et rectangulum TQ × 2PS erunt ultimò inter ſe æqualia.

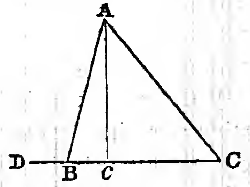
In re minimè difficili rationum concluſiones accuratiùs deduximus, ne quis facili errore deceptus, quales ferè incautos ex Cavalerii diſciplinâ homines miſerè ludificari ſolent, eò utique quòd rectus ultimò ſit angulus, quem recta OQ arcuſque PQ intercludunt, et quòd arcus ille quàm minimus pro rectâ haberi poſſit, concludendum ſtatim exiſtimaret, PD eſſe ultimò ad PQ ut PQ ad PO; propter ultimam ſcilicet quam ſomniaverit triangulorum OQP *, QDP evaneſcentium ſimilitudinem. Unde id ſequeretur, quadrati ex PQ ad rectangulum TQ × 2PS rationem ultimam, quam Newtonus æqualitatem ipſam ſtatuit, eam binarii potius ad unitatem eſſe. Reverâ ſi figuræ illæ evaneſcentes OPQ, PQD certas aliquas triangulorum rectilinearium ſpecies ultimò affectarent: hoc eſt, ſi ad triangulorum quorumvis rectilinearium, quæ ſpecie data eſſent, figuras evaneſcendo infinitè accederent; è rationibus quæ triangulorum illorum lateribus rectis intercederent, evaneſcentium PD, PQ rationes ultimæ certiſſimè æſtimandæ eſſent. Atqui ea profecto evaneſcentium OPQ, QPD eſt conditio, ut cum nullâ planè figurâ triangulari, à lineis rectis factâ, eæ comparari poſſint. Siquidem illa QPD ita evaneſcit, ut angulum DQP ultimò omni acuto, qui lineis rectis concludatur, minorem habeat: ita verò illa OPQ ut duos in angulis ſuis habeat rectos; tertium, acuto omni, quem lineæ rectæ intercludunt, minorem. Cùm igitur trianguli naturæ, à lineis rectis facti, id maximè contrarium ſit, ut duos angulos rectos habeat, tertium vel acutiſſimo minorem; evaneſcentium OPQ, PQD nulla planè conſenda eſt figura ultima triangularis. Figurarum autem quæ nullæ ſunt, haud ulla ut opinor ſimilitudo erit. Ex ſimilitudinibus verò quæ nullæ ſunt, mutuas rerum rationes definiendas quis non ſtultè ſperaverit.

In ſummâ illud monitos velim imperitiores; in acie, quod aiunt, novaculæ conſiſti, ſiquando areâ aliquâ triangulari evaneſcente, argumentum aliquod de ultimâ laterum vel angulorum ejus mutabilium ratione ex eo petitur, quòd pro trianguli rectilinearis lateribus, vel angulis, ultimò haberi poſſint: nimirum ſi area tali modo evaneſcat, ut uno ex angulis ſuis in nihilum abeunte, ſpeciem ſuam triangulam ultimò prorſus exuat. Et neſcio an ex alio fonte errores plures gravioreſque promanârint. Ut ſiquis poſito triangulo ABC, cujus manente latere AB cum angulo ABC, reliqua duo latera, evaneſcente angulo BAC, cum angulo tertio fluant; propter ultimam rectarum AB, AC æqualitatem

* *Junge rectam* OQ *quam cælare artifex neglexit.*

ſcribat corpus arcum quàm minimum PQ, & tempore duplo arcum quàm minimum PR; & decrementa horum arcuum ex reſiſtentiâ oriunda, ſive defectus ab arcubus, qui in medio non reſiſtente iiſdem temporibus deſcriberentur, erunt ad invicem ut quadrata temporum in quibus generantur: eſt itaque decrementum arcûs PQ pars quarta decrementi arcûs PR ([a]*). Unde etiam,

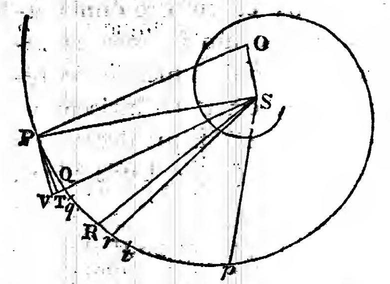
æqualitatem, triangulum evaneſcens ultimò iſoſceles pronuntiet: tum ex eo quòd triangulum ultimò iſoſceles futurum ſit, angulos ad baſin ABC, ACB ultimò æquales ſtatuat. Haud enim angulo ABC ſed externo ABD, congruentibus utique rectis AC, AB, ſit ille ACB ultimò æqualis. Error autem inde venerit, quòd triangulum ABC habitum ſit iſoſceles, tunc cùm omnem planè trianguli ſpeciem exueret. Qui triangulum illud evaneſcens ultimo iſoſceles contendere velit, proferat oportet triangulum iſoſceles, cujus anguli ad baſin duobus rectis æquales ſint. Quod ſi nemo facere poſſit, abjudicanda certè areæ evaneſcenti ABC trianguli iſoſcelis conditio. Neque cum Larvis pugno. Novimus primarios quoſdam in Philoſophiâ viros ſimili errore captos. Quid dicam primarios? Certè nec coryphæus ille omnium noſtrum Newtonus ſemper ab eo immunis erat. (Vide Locum ipſum in Editione Primâ.)



Cæterùm id verum eſſe quod Newtonus pronunciavit, quadrati ex PQ rectangulique TQ × 2PS rationem ultimam æqualitatem eſſe, vel hâc ratione approbare liceat. (*Vid. fig. p.* 320.) Rectæ PS, QS circulo cujus radius OP, in punctis X, Y iterum occurrant. Quadratum ex PT rectangulo YT × TQ ultimò æquale erit. (El. III. 36.) Evaneſcente autem angulo PSQ, recta TY congruet ultimò cum PX, et fiet illi ultimò æqualis. Unde rectangula YT × TQ, XP × TQ ultimò æqualia fient. Sed et arcus PQ rectæ PT ultimò æqualis erit. Quadratum igitur ex PQ rectangulo PX × TQ ultimò æquale. Sed cùm O centrum ſit circuli XYP, et angulus OSP rectus, recta OS illam PX mediam dividet. (El. III. 3.) Quare PX = 2PS. Et PX × TQ = 2PS × TQ. Quadratum igitur ex PQ & rectangulum 2PS × TQ ultimò erunt inter ſe æqualia. Q. E. D.

Atque hanc demonſtrationem Newtonianâ firmiorem judico. Nempe cùm hæc noſtra haud alias loquitur quantitatum rationes ultimas, præter eas quæ verè ſunt rationes; ſive tales quæ magnitudinibus datis verè intercedant. Newtoni probatio ultimâ quâdam nititur rationum convenientiâ, quæ rationes reverâ ultimò nullæ ſunt. Nam rationes eæ evaneſcentis PD ad evaneſcentem PQ, PQ item evaneſcentis ad datam 2PO, quas Newtonus ultimò eaſdem ſtatuit, eæ nullæ potiùs ultimò habendæ ſunt. Siquidem PQ minor ſit ultimò quam ut datam aliquam rationem ad datam 2PO gerat. Minor itidem ultimò evaneſcens PD, quàm quæ datam rationem gerat, ad illam PQ unà evaneſcentem. Nec aliter ſe habet ultimò illa PD, vel PQ, ratione illius PQ, vel PV, ac ſi manente PD vel PQ, altera PQ vel PV, ſenſim creſcendo, infinitam quandam longitudinem adepta eſſet. Infiniti autem cum finito nullam comparationem, cum Euclide nullam inter ea rationem agnoſco. Neque tamen vitioſa adeo eſt argumentatio Newtoni, quin levi emendatione ſanari poſſit, et firmiſſima evadat quâ parte vel maximè laborat. Nam ex eo quòd tres rectæ PT, DQ, ES ſint inter ſe parallelæ, certiſſimè concluditur eſſe TQ ad PD ut TS ad PE. Quin et illud etiam veriſſimè dictum eſt, rectam TS illi PS fieri ultimò æqualem. Unde et illud ei concedi neceſſe eſt, eſſe TQ ad PD ultimò ut PS ad PE. Jam verò PS eſſe ad PE ut 2PO ad 2PS ex triangulorum OSP, PES inter ipſa ſimilitudine neceſſario ſequitur. Unde illud etiam pro certiſſimo tenendum, TQ eſſe ad PD ultimò ut 2PO ad 2PS. Hinc autem illud Newtono efficiendum erat, ſi demonſtrationem ſuam quàm maximè ex arte concinnare ſategiſſet, rectangula TQ × 2PS, PD × 2PO eſſe ultimò inter ſe æqualia. Jam verò quadratum ex PQ rectangulo PD × 2PO eſſe ultimò æquale, invictiſſimis rationibus ex ipſius circuli naturâ comprobatum eſt. Cùm igitur rectangula TQ × 2PS, PD × 2PO oſtenſa ſint ultimò inter ſe æqualia, atque horum illud PD × 2PO quadrato ex PQ oſtenſum ſit ultimò æquale; fieri nequit, quin quadratum ex PQ & rectangulum TQ × 2PS ipſam inter ſe æqualium rationem ultimò induant. Nec in tali argumentationis contextu inventurum quempiam ſpero, quod commodè improbari poterit.

([a]*) Lib. I. Lemma X.



ſi areæ PSQ æqualis capiatur area QSr, erit decrementum arcûs PQ æquale dimidio lineolæ Rr (b); ideoque vis reſiſtentiæ & vis centripeta ſunt ad invicem, ut lineolæ $\frac{1}{2}$Rr & TQ quas ſimul generant. Quoniam vis centripeta, quâ corpus urgetur in P, eſt reciprocè ut SPq, & (per Lem. x. Lib. I.) lineola TQ, quæ vi illâ generatur, eſt in ratione compoſitâ ex ratione hujus vis & ratione duplicatâ temporis quo arcus PQ deſcribitur (nam reſiſtentiam, in hoc caſu, ut infinitè minorem quàm vis centripeta negligo (c)) erit TQ × SPq, id eſt (per Lemma noviſſimum) $\frac{1}{2}$PQq × SP, in ratione duplicatâ temporis; ideoque tempus eſt ut PQ × $\sqrt{SP}$; & corporis velocitas, quâ arcus PQ illo tempore deſcribitur, ut $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$, ſeu $\frac{1}{\sqrt{SP}}$; hoc eſt, in ſubduplicatâ ratione ipſius SP reciprocè. Et ſimili argumento,

(b) Sint q, t loca, quæ corpus, ſi per inane latum ſpirarum ductum ſequeretur, iiſdem temporibus attigiſſet, quibus materiæ circumfuſæ offenſu impeditum arcus PQ, PR confecerit, modò pari cum velocitate à loco P exiiſſet. Ita erunt Qq, Rt ſpatia, quibus arcus PQ, PR per materiæ renixum breviores facti fuerint, quàm pro ratione motûs in ſpatiis vacuis. Arcus autem evaneſcentes Pq, qt rationem inter ſe ultimam æqualium habituri ſunt. Sed et PQ, Qr evaneſcentes æqualium inter ſe rationem ultimò aſciſcunt. Quare Qq = qt − Qr ultimò. Additoque Qq, 2Qq = Qt − Qr = rt ultimò. Hoc eſt, ille rt ad illum Qq rationem ultimam, quæ binarius ad unitatem habet. Sed Qq ad Rt rationem ultimam quam unitas ad quaternarium. Igitur ex æquo rt ad Rt rationem ultimam, quam binarius ad quaternarium habet. Quare rt ultimò ſemiſſis erit illius Rt; ac proinde illi Rr, rt ultimò inter ſe æquales. Unde ille Qq qui oſtenſus eſt ſemiſſis illius rt, idem et illius Rr ſemiſſis erit. *(Emerſonus ad locum.)*

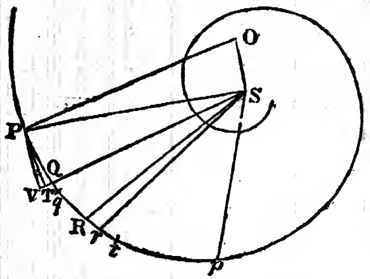
(c) —*nam reſiſtentiam, in hoc caſu, ut infinite minorem quàm vis centripeta negligo.*] Vellem hæc abeſſent. Sive enim parva ſive magna fuerit vis renixûs ratione vis centralis, recta tamen TQ, ſive declinatio corporis à tangente centrum verſus, à ſolâ vi centrali provenerit; ac proinde rationem quæ componitur è ratione vis illius cum duplicatâ temporis, quo arcus PQ conficitur, eam, naſcendo utique primam, illa TQ ſemper propriam habebit. Cave enim credas illam TQ, primùm utique naſcentem, non à nudâ vi centripetâ, ut in ſpatiis vacuis, ſed à majore efficaciâ vis centripetæ præ vi renixûs genitam, differentiæ virium illarum rationem cum duplicatâ temporis, quo arcus PQ conficitur, compoſitam naſcendo ſervare. Næ ille multùm à vero aberraverit, cui id in mentem venerit rem eo modo agi. Nimirum cùm renixus omnis motui ſit contrarius, corpus dum per arcum PQ incedat, nullum planè renixum ſentiet, niſi qui ſecundum arcum illum agat. Materia, à corpore progrediente à P verſus Q in arcu PQ propulſa, viciſſim repellere conatur corpus in arcu illo à Q verſus P. Conatus autem ille repellendi in duos eſt reſolvendus (per Leg. Mot. II.) duobus illis, è quibus compoſitus eſt corporis per arcum PQ motus, contrarios: quorum cùm alter ſecundum tangentem TP directus ſit, alter ſecundum radium SP, hic vi centripetæ opponitur atque ejus efficaciam minuit. Duo autem conatum repellendi ſecundum arcum QP componunt; nec aliud juncti præſtant, niſi ut arcum illum, dato tempore confectum, breviorem reddant quàm pro ratione motûs per inane. Arcus igitur Qq, quo PQ abeſt ab illo Pq qui eodem tempore in ſpatiis vacuis conficiendus eſſet, illud omne refert, quod vis renixûs effecerit, dum corpus per arcum PQ iter

mento, velocitas quâ arcus QR deſcribitur, eſt in ſubduplicatâ ratione ipſius SQ reciprocè. Sunt autem arcus illi, PQ & QR, ut velocitates deſcriptrices ad invicem; id eſt, in ſubduplicatâ ratione SQ ad SP, ſive ut SQ ad $\sqrt{SP \times SQ}$; & ob æquales angulos SPQ, SQr, & æquales areas PSQ, QSr, eſt arcus PQ ad arcum Qr ut SQ ad SP. Sumantur proportionalium conſequentium differentiæ, & fiet arcus PQ ad arcum Rr ut SQ ad SP − $\sqrt{SP \times SQ}$, ſeu $\frac{1}{2}$VQ. Nam punctis P & Q coeuntibus, ratio ultima SP − $\sqrt{SP \times SQ}$ ad $\frac{1}{2}$VQ eſt æqualitatis. Quoniam decrementum arcûs PQ, ex reſiſtentiâ oriundum, ſive hujus duplum Rr, eſt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim; erit reſiſtentia ut $\frac{Rr}{PQq \times SP}$. Erat autem PQ ad Rr, ut SQ ad $\frac{1}{2}$VQ: & inde $\frac{Rr}{PQq \times SP}$ fit ut $\frac{\frac{1}{2}VQ}{PQ \times SP \times SQ}$, ſive ut $\frac{\frac{1}{2}OS}{OP \times SPq}$. Namque punctis P & Q coeuntibus, SP & SQ coincidunt, & angulus PVQ fit rectus; & ob ſimilia triangula PVQ, PSO (d), fit PQ ad $\frac{1}{2}$VQ ut OP ad $\frac{1}{2}$OS. Eſt igitur $\frac{OS}{OP \times SPq}$ ut reſiſtentia,

iter faceret. Neque alia erit vis renixûs ſecundum radium SP efficacia, quâ vi centripetæ officiat, præter illam, quæ cum alterâ ejus ſecundum tangentem efficaciâ compoſita effectum totum Qq præſtat. Minuit igitur vis renixûs declinationem corporis à tangente dato tempore: ſed imminutionem illam effectus compoſitus, Qq, in ſe totam habet. Et quanta quanta fuerit vis renixûs ratione vis centripetæ, nihilominus illa TQ à nudâ vi centripetâ provenerit, haud ſecus ac ſi in ſpatiis vacuis motus perageretur. Nam ſi effectum vis renixûs, ad declinationem corporis à tangente imminuendam, iterum in rectâ TQ ſeorſim conſiderare velis, cujus aliàs in effectu compoſito Qq rationem habuiſti, profectò efficaciam vis renixûs vi centripetæ contrariam imprudens duplicem poſueris, quæ ſimplex omninò ponenda erat. Nec aliter Newtonum intellexiſſe, utut aliter ſcripſiſſe videatur, ex Corollariis, quæ huic Propoſitioni comitantur, ſatis patet. Quorum ne ullum quidem generaliter obtineret, ſi ipſius Propoſitionis rationes in eo ponendæ eſſent, quòd vis renixûs ratione vis centripetæ perexigua eſſet. Immo, vocabulis illis *in hoc caſu* illud ipſum credo ſignificare voluit, partem illam vis renixûs, quæ, ſecundum radium agendo, corpus à centro repellat, ad minuendam illam TQ nihil planè valere. Quam tamen rectiùs dixiſſet ad partes non denuò vocandam, cùm aliàs ejus ratio habita eſſet, quàm præ parvitate ſuâ negligendam; cui vel dimidiæ vi centripetæ æquali eſſe liceat, ſicut Corollario quarto Newtonus ipſe conſtituit.

Sed rem ſatis difficilem, ſi potero, enodatiùs explicabo. Cogita junctam Sq in tangentem PT produci. Quæ pars productæ Sq à Curvâ & tangente intercepta fuerit, ea ſcilicet declinatio erit corporis à recto tramite, quam tempore, quo arcus PQ conficitur in ſpatio impedito, vis centripeta effeciſſet in ſpatiis liberis. Pars illa productæ Sq rectâ TQ ſemper quidem major erit. Atqui evaneſcente arcu PQ, arcus Pq unà evaneſcit; tali quidem lege, ut licet ſemper major ſit quàm PQ, eorum tamen differentia Qq velociùs multo quàm pro ratione arcûs PQ minuatur. Arcu igitur PQ infinitè imminuto et ad nihilum tandem redacto, Qq ſimul in nihilum abierit; arcus PQ, Pq fient ultimò æquales; recta Sq congruet ultimò cum SQ; & pars illa productæ Sq, quæ à Curvâ et tangente intercepta erit, ipſi TQ fiet ultimò æqualis. Arcu igitur PQ infinitè imminuto, recta TQ et declinatio corporis à recto tramite quam mera vis centripeta in ſpatiis vacuis, eodem tempore quo generata fuerit TQ, effeciſſet; hæ rationem ſive evaneſcendo ultimam, ſive naſcendo primam, ipſam æqualitatem habent. Haud aliâ igitur quantitate naſci poterit recta TQ ac ſi à merâ vi centripetâ proveniſſet. Id verò non quaſi parva ſit vis renixûs ratione vis centralis; ſed quia talis ſit, quæ mutationem aliquam vis inſitæ in corpore moto non niſi lentè admodum et gradatim pariat.

(d) Nimirum ſi centro S, radio SP, ſcriptus ſit arcus circularis, per punctum V tranſibit, propter



resistentia, id est, in ratione densitatis medii in P & ratione duplicatâ velocitatis conjunctim. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio $\frac{1}{SP}$, & manebit medii densitas in P ut $\frac{OS}{OP \times SP}$ (e). Detur Spiralis (f), & ob datam rationem OS ad OP, densitas medii in P erit ut $\frac{1}{SP}$. In medio igitur cujus densitas est reciprocè ut distantia à centro SP, corpus gyrari potest in hâc Spirali. Q. E. D.

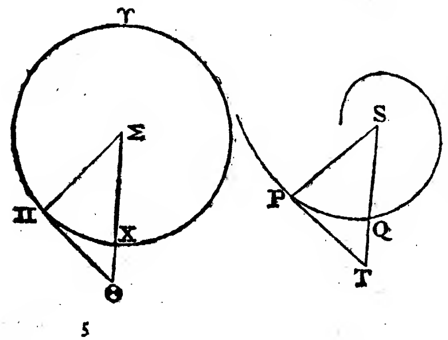
Corol. 1. Velocitas in loco quovis P ea semper est, quâcum corpus, in medio non resistente, eâdem vi centripetâ gyrari potest in Circulo, ad eandem à centro distantiam SP (g).

Corol. 2. Medii densitas, si datur distantia SP, est ut $\frac{OS}{OP}$, sin distantia illa non datur, ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Et inde Spiralis ad quamlibet Medii

ter æquales SP, SV. Et propter angulum ad V rectum, angulumque PQV, è Spirarum naturâ, datum; figura PQV, quæ arcu spirarum PQ, circulari PV, rectâque VQ est conclusa, arcubus illis PQ, PV, evanescentibus, trianguli cujusdam rectilinearis rectanguli speciem ultimò induet. Dico ipsi POS figuram PQV fieri ultimò similem. Nam cùm rectus sit angulus OPQ, angulus SPQ illius OPS complementum erit. Verùm ejusdem OPS ille SOP complimentum. Angulus igitur SOP angulo SPQ æqualis. Sed eidem SPQ ille PQV è Spirarum naturâ æqualis. Anguli igitur SOP, PQV inter se æquales. Triangula igitur ROS, PQV, quæ angulos ad S, V rectos, acutosque ad O, Q æquales habent, ea omninò inter se similia erunt.

(e) Litera D significetur recta quædam, eâ lege mutabilis ut densitatis semper rationem gerat. Erit igitur $\frac{D}{SP}$ ut renixus, id est, ut $\frac{OS}{OP \times SP^2}$. Quare D, sive densitas, ut $\frac{OS}{OP \times SP}$.

(f) Hoc est, detur angulus ad spiram SPQ.



(g) Puta vires quasdam centrum Σ, in inani constitutum, respicere; tales quæ viribus centrum S, in spatio impedito constitutum, respicientibus, in æqualibus à centro distantiis æquales sint. Circum centrum Σ, radio ΣΠ, cuilibet è Spirarum radiis SP æquali, scribatur circulus ΠXY. Dico corporis in spatio impedito per Spiras lati, in loco P, velocitatem velocitati illi æquabili esse æqualem, quâcum corpus in inani circum centrum Σ per circulum ΠXY ferretur. Sint enim PQ, ΠX arcus, ille Spirarum, hic Circuli, eodem tempore confecti; junctæque SQ, ΣX rectis PT, ΠΘ, quæ Curvas in punctis P, Π contingunt,

Medii densitatem aptari potest (h).

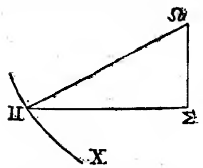
Corol. 3. Vis resistentiæ in loco quovis P, est ad vim centripetam in eodem loco ut $\frac{1}{2}$OS ad OP. Nam vires illæ sunt ad invicem ut $\frac{1}{2}$Rr & TQ; sive ut $\frac{\frac{1}{4}VQ \times PQ}{SQ}$ & $\frac{\frac{1}{2}PQ q}{SP}$; hoc est, ut $\frac{1}{2}$VQ & PQ, seu $\frac{1}{2}$OS & OP. Datâ igitur Spirali datur proportio resistentiæ ad vim centripetam; & vice versâ ex datâ illâ proportione datur Spiralis.

Corol. 4. Corpus itaque gyrari nequit in hâc Spirali, nisi ubi vis resistentiæ minor est quàm dimidium vis centripetæ. Fiat resistentia æqualis dimidio vis centripetæ, & Spiralis conveniet cum lineâ rectâ PS; inque hâc rectâ corpus descendet ad centrum eâ cum velocitate, quæ sit ad velocitatem, quâ probavimus in superioribus in casu Parabolæ (Theor. X. Lib. I.) descensum in medio non resistente fieri, in subduplicatâ ratione unitatis ad numerum binarium (i). Et tempora descensûs hîc erunt reciprocè ut velocitates, atque ideo dantur (k).

Corol.

gunt, in punctis T, Θ occurrant. Jam cùm illa TQ, arcu PQ primùm nascente, à nudâ vi centripetâ provenerit, quòd modò probavimus (Not. e) nascentes primùm TQ, ΘX, cùm ab æqualibus viribus centripetis eodem tempore oriundæ sint, erunt inter se æquales. Quare propter SP, ΣΠ inter se æquales, rectangula nascentia 2SP × TQ, 2ΣΠ × ΘX, primò quidem inter se æqualia erunt. At verò rectangulo nascenti 2SP × TQ quadratum ex nascente PQ primò est æquale. (Probatur à Lemmate III.) Rectangulo item nascenti 2ΣΠ × ΘX quadratum è nascente primò ΠX. (Probatur à circulo.) Quadrata igitur è nascentibus PQ, ΠX erunt primò inter se æqualia. Quare et nascentes PQ, ΠX primò inter se æquales. Velocitates autem corporum, à locis P, Π egredientium, eam inter se rationem habent, quæ arcuum nascentium PQ, ΠX inter ipsos prima est. Velocitates igitur in locis illis erunt inter se æquales. Q. E. D.

(h) Nimirum si dentur Spiræ PQ *(fig. text. p. 324)* per quas corpus feratur, per materiam, datâ quâdam densitate, in datâ à centro S distantiâ SP, præditam, dabuntur spiræ aliæ ΠX *(in figurâ appositâ)* per quas corpus feretur, cui cum materiâ circumfusâ luctandum sit, quæ in aliâ à centro Σ distantiâ datâ ΣΠ, aliam datam densitatem habeat.



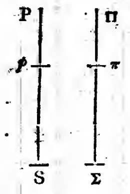
Spirarum PQ sit radius Sp radio ΣΠ spirarum ΠX æqualis. A puncto Π eductam puta rectam ΠΩ, quæ Curvam ΠX ad perpendiculum insistat, rectæque ΣΩ, à puncto Σ ad perpendiculum cum radio ΣΠ eductæ, in Ω occurrat. Densitates in locis P, Π significentur literis D, Δ. Densitas in loco p literâ d. Erit D : d = Sp : SP. Quare datis Sp, SP, datâque etiam densitate D, densitas d dabitur. Sed d : Δ = OS × ΩΠ : ΩΣ × OP. Datarum autem d, Δ ratio data. Rectangulorum igitur OS × ΩΠ, ΩΣ × OP ratio data. Latera autem OS, OP magnitudine data. Quare mutua eorum ratio data. (Dat. 1.) Quare et reliquorum laterum ΩΠ, ΩΣ ratio data. (Dat. 68.) Triangulum igitur ΩΣΠ, cujus angulus ad Σ rectus, specie datum. (Dat. 43.) Angulus igitur ΣΩΠ datus. Sed angulo ΣΩΠ angulus ΣΠX, radio ΣΠ Curvâque interclusus, æqualis est. Angulus igitur spirarum datus. Spiræ igitur specie datæ. Dato igitur centro Σ, radioque ΣΠ magnitudine et positione dato, Spiræ, cùm specie datæ sint, positione etiam dabuntur. Q. E. D.

(i) Per Cor. 1. & Lib. I. Prop. IV. Cor. 6.

(k) Corpora duo rectâ cadant; alterum per inane versus centrum Σ, alterum versus centrum S per

Corol. 5. Et quoniam in æqualibus à centro diſtantiis velocitas eadem eſt in Spirali PQR, atque in rectâ SP, & longitudo Spiralis ad longitudinem rectæ PS eſt in datâ ratione, nempe in ratione OP ad OS ([l]); tempus deſcenſûs in Spirali erit ad tempus deſcenſûs in rectâ SP in eâdem illâ data ratione, proindeque datur.

Corol. 6. Si centro S intervallis duobus quibuſcunque datis deſcribantur duo circuli; & manentibus hiſce circulis, mutetur utcunque angulus, quem Spiralis continet cum radio PS: numerus revolutionum, quas corpus intra circulorum circumferentias, pergendo



per materiam quandam circumfuſam, cujus denſitates diſtantiarum à centro S rationes contrarias ſervent. Ponantur vires, quæ centrum utrumque, Σ & S, reſpiciunt, rationem duplicatam diſtantiarum contrariam ſervare; et vires diverſas ad æquales à centro diſtantias inter ſe æquales eſſe. Ponantur autem ΣΠ, SP inter ſe æquales; et velocitas corporis per inane cadentis, in loco Π, ea ſit, quam caſu infinito locum uſque Π adeptum eſſet; ea verò corporis per materiam circumfuſam cadentis, in loco P, quâcum in ſpatiis vacuis circulum circum centrum S ad diſtantiam SP, ſcribere poſſet. Sint Σπ, Sp, aliæ corporum à centris diſtantiæ inter ſe æquales. Dicit Newtonus tempus caſûs per rectam Ππ in ſpatio vacuo ad tempus caſûs per æqualem Pp in ſpatio impedito, rationem habere ſubduplicatam ejus quam unitas ad binarium habet. Tempora cadendi per Ππ, Pp literis Θ, T ſingulatim ſignificentur; velocitates corporum à centris ſuis Σ, S æqualiter diſtantium, literis Υ, V. Erit $\dot{\overline{\Pi\pi}} : \dot{\overline{Pp}} = \dot{\Theta} \times \Upsilon : \dot{T} \times V$. Ponantur Sπ, Sp, quæ initio fuerunt ΣΠ, Sp, eâ lege fluere, ut mutabiles Σπ, Sp ſemper ſint inter ſe æquales. Ita fluxiones, $\dot{\overline{\Pi\pi}}$, $\dot{\overline{Pp}}$, ſemper erunt inter ſe æquales. Ac proinde rectangula $\dot{\Theta} \times \Upsilon$, $\dot{T} \times V$ inter ſe æqualia. Quare $\dot{\Theta} : \dot{T} = V : \Upsilon$. Sed $V : \Upsilon = 1 : \sqrt{2}$. Quare $\dot{\Theta} : \dot{T} = 1 : \sqrt{2}$. Et cùm hæc conſtans ſit fluxionum ratio, fluentibus etiam Θ, T, utpote quæ ſimul generari inceperint, eadem intercedet. Et cùm in omni magnitudine æqualium Ππ, Pp, hæc ratio vigeat, vigebit etiam quando æquales Ππ, Pp in totas ΠΣ, PS creverint. Hoc eſt tempus caſûs ab altitudine quâvis ΣΠ centrum uſque Σ in inani, ad tempus caſûs ab æquali altitudine SP centrum uſque S, in ſpatio impedito, rationem habebit ſubduplicatam ejus quam unitas ad binarium habet; modò velocitates, quibuſcum caſus in locis Π, P incipiantur, eæ ſint, quas præſcripſimus. Q. E. D.

([l]) Nimirum cùm hæc conſtans ſit fluxionum Curvæ radiique ratio.

([m]) Circum centrum S (*fig. p.* 327), quod vires centripetæ reſpiciant, quæ duplicatæ diſtantiarum rationi contrariè reſpondeant, ſcriptos puta circulos ABC, DEF. Spatium illud omne, quod horum circulorum circumflexus undique cingunt, materiâ quâdam intelligatur conſpergi, cujus denſitates in variis locis rationem diſtantiarum à centro S contrariam ſervent. Siquod igitur corpus è loco A projectum fuerit, ſecundum rectam tali angulo ad radium SA inclinatam, quem denſitas materiæ in loco A poſtulaverit; atque eâ cum velocitate, quâcum, urgentibus eiſdem viribus centripetis, per circulum ABC in inani æquabiliter ferretur: corpus, inquam, eo modo è loco A projectum, per ſpiras æquiangulares certæ cujuſdam ſpeciei circa centrum S feretur. Dentur anguli ASG, ASH. Literæ autem x, y numeros quoſdam adhuc incognitos ſignificent. Ac primùm eam puta materiæ in loco A denſitatem, quæ ſpiris æquiangulis, per quas corpori è loco A projecto eundum erit, ſpeciem inducat eam, in quâ radii, angulos qui dato ASG ſint æquales, cum Curvâ faciant. Tales autem ſpiræ, per punctum A ductæ, ad punctum D radii SA pertingant poſtquam centrum S tot gyris cinxerint, quot ſint in numero x unitates. Dein mutatam puta materiæ, quâcum ſpatium circulis intercluſum oppleri poſuimus, denſitatem; tali quidem ratione, ut ſpecies ſpirarum, per quas corpori, è loco A projecto, eundum ſit, in illam tranſeat, cujus radii cum Curvâ angulos faciant dato ASH æquales. Atque tales ſpiræ per punctum A ductæ ad punctum D radii SA perveniant, poſtquam centrum ſuum S tot gyris cinxerint, quot ſint in numero y unitates. Ducatur per A recta AH, quæ circulum ABC in A contingat, et rectis SG, SH datos angulos ASG, ASH, cum radio SA efficientibus, in punctis G, H occurrant.

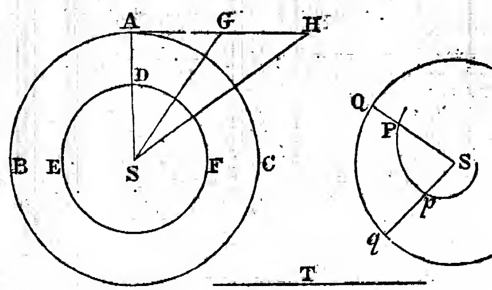
Dicit

gendo in Spirali à circumferentia ad circumferentiam, complere poteſt, eſt ut $\frac{PS}{OS}$; ſive ut tangens anguli illius, quem Spiralis continet cum radio PS; Tempus verò revolutionum earundem ut $\frac{OP}{OS}$, id eſt, ut ſecans anguli ejuſdem, vel etiam reciprocè ut medii denſitas ([m]).

Corol. 7. Si corpus in medio, cujus denſitas eſt reciprocè ut diſtantia locorum à centro, revolutionem in Curvâ quâcunque AEB circa centrum illud fecerit, & radium primum AS in eodem angulo

Dicit Newtonus numerum x ad numerum y rationem habere eam, quam recta AG ad rectam AH. Tempus autem, quo corpus à loco A in locum D per ſpiras primas delatum fuerit, ad tempus, quo delatum fuerit ab eodem loco A in eundem D per ſpiras alteras, rationem habere eam quam recta SG ad rectam SH; ſive eam, quam denſitas poſtremò poſita ad denſitatem primò poſitam. Nos autem oſtendimus quæ Newtonus dicit hoc modo.

Spirarum æquiangularium ea eſt natura, ut ſi duo ex earum radiis, SP, Sp, qui datum quemvis angulum contineant, circulo, datæ cujuſlibet magnitudinis, circum centrum ſpirarum S ſcripto, occurrant, ut in punctis Q, q; tum ſi ſumatur T tangenti anguli quem radii ſpirarum cum curvâ contineant, pro radio SQ, æqualis; arcus Qq à radiis SQ, Sq interceptus, rationis ejus quam SP ad Sp habet, pro modulo T logarithmus erit. (Cotes. Harmon. Menſur. Part I. Prop. VI.)

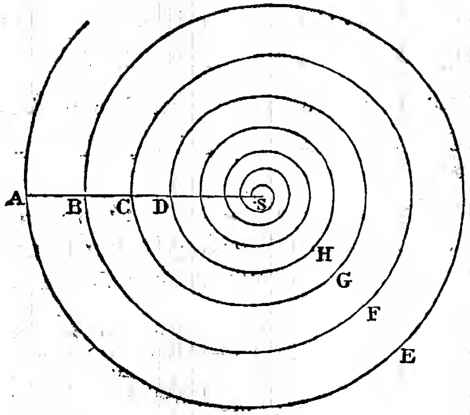


Hæc autem cùm ità ſint, ſi circuli ABC ambitus ſignificetur literâ P, erit utique xP logarithmus rationis, ejus quam SA habet ad SD, pro modulo AG. Erit etiam yP ejuſdem rationis logarithmus pro modulo AH. Ejuſdem autem rationis in ſyſtematis diverſis logarithmi ſunt ut moduli. (Cotes. Harmon. Menſur. Part I. Prop. I. Cor. 3.) Erit igitur xP ad yP ut AG ad AH. Sed xP eſt ad yP ut numerus x ad numerum y. Omninò igitur numerus x ad numerum y ut AG ad AH. Quod primùm demonſtrandum erat.

Jam verò tempus, quo corpus è loco A in locum D transferatur per ſpiras quarum angulus ASG, eſt ad tempus quo per ſpatium AD rectâ cecidiſſet, ſi talis fuiſſet materiæ denſitas, quæ vim renixûs vis centripetæ dimidiam effeciſſet, ut GS ad SA (per Cor. 5.) Quin et tempus illud rectâ cadendi per ſpatium AD, ad tempus quo transferatur corpus è loco A in locum D per ſpiras quarum angulus ASH, ut SA ad SH (per Cor. 5.) Quare ex æquo tempus per ſpiras primas ad tempus per has alteras, ut SG ad SH. Quod alterum demonſtrandum erat. Denique rationem rectæ SG ad SH denſitatum eſſe contrariam, id quidem ex Cor. 2. ſatis patet.

Stabunt autem hujuſce Corollarii rationes, etiamſi ſpiræ circulum interiorem non ad eundem radium ſecent, ad quem exteriorem ſecuerint, ſed in diverſis locis; puta ſi primæ in E, alteræ in F: modò pro numero converſionum x vel y, longitudo illa ſubſtituatur, quam radii mobilis terminus A, in circuli ſui ABC circumflexu, curſitando emenſus erit, dum corpus per ſpiras ſuas à circulo in circulum tranſlatum fuerit.

gulo



gulo fecuerit in B quo priùs in A, idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem fuam primam in A reciprocè in fubduplicatâ ratione diftantiarum à centro (id eft, ut AS ad mediam proportionalem inter AS & BS) corpus illud perget innumeras confimiles revolutiones BFC, CGD, &c. facere, & interfectionibus

(n) Ut corpus viribus centripetis incitatum, quæ duplicatæ diftantiarum rationi contrariè refpondeant, per fpiras aliquas feratur ex æquiangularibus; non modò illud neceffe eft, ut materiæ circumfufæ denfitas rationem diftantiæ à centro contrariam fervet, fed etiam ut corpus ex dato loco cum certâ velocitate projiciatur, & fecundum rectam certo quodam angulo ad radium inclinatam: nempe cum velocitate eâ, quâcum in inani, urgentibus iifdem viribus centripetis, per circulum ferretur ad eandem à centro diftantiam (per Cor. 1.); eâ autem ad radium inclinatione, cujus cofinus rationem ad radium habeat, quam dupla vis renixûs ad vim centripetam (per Cor. 3.) Quòd fi vel aliâ cum velocitate, vel fecundum rectam aliter ad radium inclinatam, corpus projectum fuerit, fieri nullo modo poteft, ut per fpiras aliquas ex æquiangularium genere curfum teneat. At verò per Curvam aliquam. Quænam illa erit? Difficillimam hanc quæftionem ne omninò intactam videretur reliquiffe, Newtonus, ut opinor, feptimum hoc corollarium pofuit. Nempe fieri poteft, ut corpus aliter è loco A projectum, quàm quo motus per fpiras logifticas præftari poffit, Curvam quandam circa centrum S fcribat, cujus, liceat haud prorfus æquiangularis fit, data tamen quædam ad radium inclinatio certis locis redeat. Si igitur talis fit, cujus, cùm femel centrum cinxerit, eadem ad radium SA inclinatio redeat, quam in loco A habuit; hoc eft fi radium SA eâdem inclinatione in locis duobus A, B fecuerit, fi præterea velocitates in locis, A, B, fubduplicatam radiorum SA, SB rationem contrariè gerant: dicit Newtonus Curvam illam centrum S gyris innumeris cingere, qui omnes ad radium AS fimiliter inclinati erunt, et radium illum in partes innumeras divident, geometricâ ratione inde ab initio decrefcentes. Tempora verò, quibus corpus per hanc Curvam latum orbes fingulos AEB, BFC, CGD ordine confecerit, rationem habere è ratione longitudinum ipforum orbium cum ratione velocitatum in locis A, B, C compofitam; five eam, quæ cuborum è radiis AS, BS, CS fubduplicata erit. Quorum omnium hæc erit demonftratio.

Perpetua fi fit inter rectas SA, SB, SC, SD proportionis convenientia, erunt aliquæ ex fpiris æquiangularibus, quæ, fi polus eorum ipfi S fuperimpofitus effet, radius autem ipfi SA æqualis in ipfum radium SA, radios fuos alios, qui illis SB, SC, SD æquales effent cum ipfis SB, SC, SD congruentes haberent; et inter puncta quæque proxima, A, B; B, C; C, D; fimplici femper orbe polum S cingerent. Jam verò vires centripetæ acceleratrices, quibus corpus per Curvam AEB incedens in locis A, B urgetur, eædem funt, quæ corpus per fpiras illas latum in eifdem locis urgerent. Velocitates item corporis per Curvam AEB incedentis quas in locis A, B, habet, cum eandem inter fe rationem gerant, quam velocitates corporis quod per fpiras ferretur, quas in eifdem locis utique id haberet: permutando, velocitas in Curvâ AEB in loco A, ad velocitatem in loco A in fpiris, ut velocitas in curvâ AEB in loco B ad velocitatem in loco B in fpiris. Denfitates etiam materiæ in locis A, B eædem, five corpus per Curvam AEB, five per fpiras incedat. Denique cum tam fpirarum quàm Curvæ eædem fint in locis A, B, ad radium communem SA inclinationes, eadem fcilicet in utroque loco Curvæ ad fpiras inclinatio erit. Motus igitur corporis è loco B egredientis,

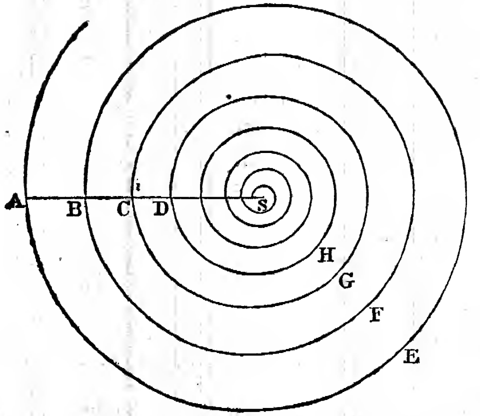
bus diftinguet radium AS in partes AS, BS, CS, DS, &c. continuè proportionales. Revolutionum verò tempora erunt ut perimetri orbitarum AEB, BFC, CGD, &c. directè, & velocitates in principiis A, B, C, inverfè; id eft, ut $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$ (n). Atque tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ, ut fumma omnium continuè proportionalium $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$; id eft, ut terminus ille primus $AS^{\frac{3}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$ (o), five ut $\frac{2}{3}$AS ad AB quàm proximè. Unde tempus illud totum expeditè invenitur.

Corol. 8. Ex his etiam præter propter colligere licet motus corporum in mediis, quorum denfitas aut uniformis eft, aut aliam

dientis, ad motum corporis, cui ex eodem loco egredienti fecundus fpirarum orbis fcribendus effet, eodem planè modo fe habet, quo motus corporis è loco A egredientis ad motum corporis fe habuit, cui, cùm ex eodem loco egrederetur, per primum fpirarum orbem eundum effet. Vires etiam illæ omnes, quibus corpori è loco B egredienti obtemperandum eft, ad vires illas, quæ motum per fecundum fpirarum orbem præftarent, eodem modo fe habent, quo vires, quibus corpori è loco A egredienti obtemperandum erat, ad vires quæ motum per fpirarum orbem primum præftarent. Fieri igitur nequit, cùm in rerum naturâ nihil fine ratione fiat, quin corpus è loco B egreffum per Curvam quandam feratur, cui cum orbe fpirarum fecundo eadem planè cognatio intercedat, quæ Curvæ AEB cum orbe illarum primo. Unde etiam Curva illa BFC cum fecundo fpirarum orbe in loco C iterum concurret, et tam radium communem SC quàm fpiras eifdem angulis in C, quibus in B vel A, fecabit. Et fimilibus planè argumentis efficietur corpus è loco C egreffum per tertium quendam orbem ferri, cui cum orbe fpirarum tertio eadem cognatio intercedat, quæ orbibus AEB, BCD cum fpirarum orbibus primo et fecundo: et è loco C egreffum corpus per orbem quartum CGD feretur cum orbe fpirarum quarto fimiliter cognatum. In fummâ, Curva, per quam corpus feretur, centrum S orbibus innumeris cinget; qui fpirarum orbibus innumeris in punctis A, B, C, D ordine occurrentes, radium primum SA, in innumeros SA, SB, SC, SD ratione geometricâ decrefcentes neceffario divident. Et cùm innumeri illi hujus Curvæ orbes fpirarum innumeros fimili inclinatione fingulatim fecent, ad radium etiam illi omnes in interfectionum punctis fimiliter inclinati erunt.

Præterea ex fimili orbium omnium Curvæ ad fpirarum orbes, fi ordine conferantur, cognatione, fequitur orbibus Curvæ, primo, fecundo tertio, innumerifque deinceps aliis, eafdem planè inter ipfos rationes intercedere, quæ fpirarum orbibus primo, fecundo, tertio innumerifque deinceps aliis: quin et tempora, quibus Curvæ orbes conficientur, temporum, quibus fpirarum orbes conficiendi effent, rationem inter fe fervare. Nam cùm ex orbium, Curvæ fpirarumque, feu cognatione feu diverfitate omnis temporum feu cognatio feu diverfitas proveniat, ex fimili orbium cognatione fimiles planè temporum feu cognationes feu diverfitates venerint. Tempus igitur quo conficitur orbis AEB erit ad tempus quo conficitur orbis BFC, ut tempus quo primus fpirarum orbis ad tempus quo fecundus conficiendus effet. Sed tempus quo primus conficeretur fpirarum orbis ad tempus quo fecundus rationem habet è ratione longitudinis orbis primi ad longitudinem orbis fecundi, cum contrariâ velocitatum in locis A, B ratione compofitam. Nimirum cùm orbes inter fe funt fimiles, dataque fit velocitatum ratio, quibus fimilium illorum orbium partes omnes fimiles conficiendæ effent. Sed longitudines orbium, propter fimilitudinem eorum inter fe, funt ut radii SA, SB. Et velocitatum contraria ratio radiorum SA, SB fubduplicata erit. Quare ratio ex hifce compofita cuborum è radiis SA, SB eft fubduplicata. Tempus igitur quo primus fpirarum orbis conficeretur ad tempus quo fecundus, ac proinde tempus quo conficitur orbis AEB, ad tempus quo orbis alter BFC, rationem habet quam $SA^{\frac{3}{2}}$ ad $SB^{\frac{3}{2}}$. Q. E. D. *Horum demonftrationem ex eifdem principiis arceffiverunt doctiffimi Patres Le Sœur & Jacquier.*

(o) Vide Analyf. per Æquat. Infinit. Not. a.



quamcunque legem aſſignatam obſervat. Centro S, intervallis continuè proportionalibus SA, SB, SC, &c. deſcribe circulos quotcunque, & ſtatue tempus revolutionum inter perimetros duorum quorumvis ex his circulis, in medio de quo egimus, eſſe ad tempus revolutionum inter eoſdem in medio propoſito, ut medii propoſiti denſitas mediocris inter hos circulos ad medii, de quo egimus, denſitatem mediocrem inter eoſdem quàm proximè: ſed & in eâdem quoque ratione eſſe ſecantem anguli, quo Spiralis præfinita, in medio de quo egimus, ſecat radium AS, ad ſecantem anguli quo Spiralis nova ſecat radium eundem in medio propoſito: atque etiam ut ſunt eorundem angulorum tangentes, ita eſſe numeros revolutionum omnium inter circulos eoſdem duos quàm proximè. Si hæc fiant paſſim inter circulos binos, continuabitur motus per circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari poſſimus, quibus modis ac temporibus corpora, in medio quocunque regulari, gyrari debebunt.

Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in Spiralibus ad formam Ovalium accedentibus peragantur; tamen concipiendo Spiralium illarum ſingulas revolutiones iiſdem ab invicem intervallis diſtare, iiſdemque gradibus ad centrum accedere cum Spirali ſuperius deſcriptâ, intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujuſmodi Spiralibus peragantur.

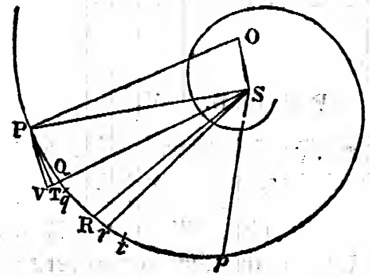
PROP.

(p) Nimirum ex eo quòd tempus quo conficitur arcus PQ fit ultimò ut $PQ \times SP^{\frac{1}{2}n}$, ſequitur velocitatem in loco P eſſe ut $\frac{1}{SP^{\frac{1}{2}n}}$. Arcus autem evaneſcentes PQ, QR eam ultimam inter ſe rationem habent, quam velocitates in punctis P, Q. Hoc eſt $PQ : QR$ ultimò $= SQ^{\frac{1}{2}n} : SP^{\frac{1}{2}n}$. Coeuntibus autem punctis P, Q, ut illa SQ, SP, vel SV, ultimò æquales fiant; erit $SQ^{\frac{1}{2}n}$ ad $SP^{\frac{1}{2}n}$ ultimò ut SQ ad $SQ + \frac{1}{2}nQV$. Unde $PQ : QR$ ultimò $= SQ : SQ + \frac{1}{2}nVQ$. Rurſum cùm æquales ſint areæ PSQ, QSr, angulique SPQ, SQr inter ſe æquales; cùm præterea areæ illæ evaneſcentes triangulorum rectilinearium rationem inter ſe ultimò aſciſcant: idcirco PQ erit ad Qr ultimò ut QS ad SP. (El. VI. 15.) Cùm igitur ſit PQ ad QR ultimò ut SQ ad $SQ + \frac{1}{2}nVQ$, et PQ ad Qr ultimò ut SQ ad SP vel $SQ + VQ$: erit (per El. V. 24) PQ ad Rr ultimò ut SQ ad $VQ - \frac{1}{2}nVQ$. Unde $Rr = \frac{\overline{1-\frac{1}{2}n}.VQ \times PQ}{SQ}$. Jam verò id quo arcus PQ propter renixum brevior redditur, ſive ejus duplum, Rr, rationem ſervabit è ratione vis renixûs cum duplicatâ temporis compoſitam. Quare vis renixûs erit ut $\frac{Rr}{PQ^2 \times SP^n}$; hoc eſt, pro Rr æquali ejus ſubſtituto, ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n}VQ}{PQ \times SQ \times SP^n}$: id eſt, propter SQ, SP ultimò inter ſe æquales ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n}VQ}{PQ \times SP^{n+1}}$.

PROP. XVI. THEOR. XIII.

Si medii denſitas in locis ſingulis ſit reciprocè ut diſtantia locorum à centro immobili, ſitque vis centripeta reciprocè ut dignitas quælibet ejuſdem diſtantiæ: dico quòd corpus gyrari poteſt in Spirali, quæ radios omnes à centro illo ductos interſecat in angulo dato.

Demonſtratur eâdem methodo cum Propoſitione ſuperiore. Nam ſi vis centripeta in P ſit reciprocè ut diſtantiæ, SP, dignitas quælibet, SP^{n+1}, cujus index eſt $n+1$: colligetur ut ſuprà, quòd tempus, quo corpus deſcribit arcum quemvis PQ, erit ut $PQ \times PS^{\frac{1}{2}n}$; & reſiſtentia in P ut $\frac{Rr}{PQq \times SP^n}$, ſive ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times VQ}{PQ \times SP^n \times SQ}$ (p), ideoque ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP \times SP^{n+1}}$; hoc eſt, ob datum $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP}$, reciprocè ut SP^{n+1}. Et propterea, cùm velocitas ſit reciprocè ut $SP^{\frac{1}{2}n}$, denſitas in P erit reciprocè ut SP.



Corol. 1. Reſiſtentia eſt ad vim centripetam ut $\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS$ ad OP (q).

Corol. 2. Si vis centripeta ſit reciprocè ut SP *cub.* erit $1-\frac{1}{2}n=0$; ideoque reſiſtentia & denſitas medii nulla erit, ut in Propoſitione nonâ Libri Primi.

Corol. 3. Si vis centripeta ſit reciprocè ut dignitas aliqua radii SP cujus index eſt major numero 3, reſiſtentia affirmativa in negativam mutabitur (r).

(q) Id enim eodem modo oſtendatur quo Corollarium tertium Propoſitionis præcedentis.

(r) Fieri igitur nequit, ut corpus per materiam renitentem in ſpirâ æquiangulari iter faciat, ſi vires centripetæ poteſtatis alicujus diſtantiarum, quæ cubicâ elatior ſit, contrariam rationem ſerant.

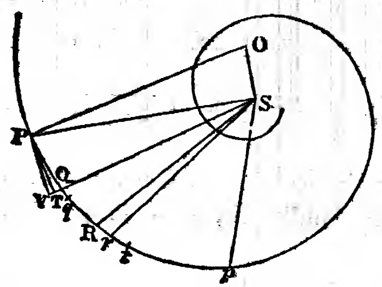
Scholium.

Scholium.

Cæterùm hæc Propoſitio & ſuperiores, quæ ad Media inæqualiter denſa ſpectant, intelligendæ ſunt de motu corporum adeo parvorum, ut Medii ex uno corporis latere major denſitas quàm ex altero non conſideranda veniat. Reſiſtentiam quoque, cæteris paribus, denſitati proportionalem eſſe ſuppono. Unde in Mediis, quorum vis reſiſtendi non eſt ut denſitas, debet denſitas eo uſque augeri vel diminui, ut reſiſtentiæ vel tollatur exceſſus vel defectus ſuppleatur.

PROP. XVII. PROB. IV.

Invenire & vim centripetam & medii reſiſtentiam, quâ corpus in datâ Spirali, datâ velocitatis lege, revolvi poteſt.



Sit Spiralis illa PQR. Ex velocitate, quâ corpus percurrit arcum quàm minimum PQ, dabitur tempus; & ex altitudine TQ, quæ eſt ut vis centripeta & quadratum temporis, dabitur vis. Deinde ex arearum, æqualibus temporum particulis confectarum, PSQ & QSR, differentiâ RSr, dabitur corporis retardatio, & ex retardatione invenietur reſiſtentia ac denſitas medii.

PROP. XVIII. PROB. V.

Datâ lege vis centripetæ, invenire medii denſitatem in locis ſingulis, quâ corpus datam Spiralem deſcribet.

Ex vi centripetâ invenienda eſt velocitas in locis ſingulis, deinde ex velocitatis retardatione quærenda medii denſitas; ut in Propoſitione ſuperiore.

Methodum verò tractandi hæc Problemata aperui in hujus Pro-

poſitione decimâ, & lemmate ſecundo; & lectorem in hujuſmodi perplexis diſquiſitionibus diutiùs detinere nolo. Addenda jam ſunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque denſitate & reſiſtentiâ Mediorum, in quibus motus hactenus expoſiti & his affines peraguntur.

SECTIO V.

De denſitate & compreſſione Fluidorum, deque Hydroſtaticâ.

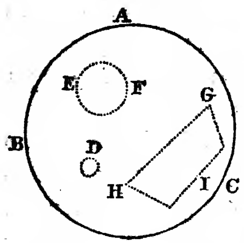
Definitio Fluidi.

Fluidum eſt corpus omne, cujus partes cedunt vi cuicunque illatæ, & cedendo facilè moventur inter ſe.

PROP. XIX. THEOR. XIV.

Fluidi homogenei & immoti, quod in vaſe quocunque immoto clauditur & undique comprimitur, partes omnes (ſepoſitâ condenſationis, gravitatis, & virium omnium centripetarum conſideratione) æqualiter premuntur undique, & ſine omni motu à preſſione illâ orto permanent in locis ſuis.

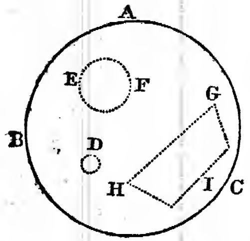
Caſ. 1. In vaſe ſphærico, ABC, claudatur & uniformiter comprimatur fluidum undique: dico, quòd ejuſdem pars nulla ex



illâ preſſione movebitur. Nam ſi pars aliqua D moveatur, neceſſe eſt ut omnes hujuſmodi partes, ad eandem à centro diſtantiam undique conſiſtentes, ſimili motu ſimul moveantur; atque hoc ideo quia ſimilis & æqualis eſt omnium preſſio, & motus omnis excluſus ſupponitur, niſi qui à preſſione illâ oriatur. Atqui non poſſunt omnes ad centrum propiùs accedere, niſi fluidum ad centrum condenſetur; contra hypotheſin. Non poſſunt longiùs ab eo recedere, niſi fluidum ad circumferentiam condenſetur; etiam contra hypotheſin. Non poſſunt ſervatâ ſuâ à centro diſtantiâ moveri in

plagam quamcunque, quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam; in plagas autem contrarias non poteſt pars eadem, eodem tempore, moveri. Ergo fluidi pars nulla de loco ſuo movebitur. Q. E. D.

Caſ. 2. Dico jam, quòd fluidi hujus partes omnes ſphæricæ æqualiter premuntur undique. Sit enim EF pars ſphærica fluidi; & ſi hæc undique non premitur æqualiter, augeatur preſſio minor, uſque dum ipſa undique prematur æqualiter; & partes ejus, per caſum primum, permanebunt in locis ſuis. Sed ante auctam preſſionem permanebunt in locis ſuis, per caſum eundem primum, & additione preſſionis novæ movebuntur de locis ſuis, per definitionem fluidi. Quæ duo repugnant. Ergo falsò dicebatur, quòd ſphæra EF non undique premebatur æqualiter. Q. E. D.



Caſ. 3. Dico præterea, quòd diverſarum partium ſphæricarum æqualis ſit preſſio. Nam partes ſphæricæ contiguæ ſe mutuò premunt æqualiter in puncto contactûs, per motûs Legem III. Sed &, per caſum ſecundum, undique premuntur eâdem vi. Partes igitur duæ quævis ſphæricæ non contiguæ, quia pars ſphærica intermedia tangere poteſt utramque, prementur eâdem vi. Q. E. D.

Caſ. 4. Dico jam, quòd fluidi partes omnes undique premuntur æqualiter. Nam partes duæ quævis tangi poſſunt à partibus ſphæricis in punctis quibuſcunque, & ibi partes illas ſphæricas æqualiter premunt, per Caſum 3, & viciſſim ab illis æqualiter premuntur, per motûs legem tertiam. Q. E. D.

Caſ. 5. Cùm igitur fluidi pars quælibet, GHI, in fluido reliquo tanquam in vaſe claudatur, & undique prematur æqualiter, partes autem ejus ſe mutuò æqualiter premant & quieſcant inter ſe; manifeſtum eſt, quòd fluidi cujuſcunque, GHI, quod undique premitur æqualiter, partes omnes ſe mutuò premunt æqualiter, & quieſcunt inter ſe. Q. E. D.

Caſ. 6. Igitur ſi fluidum illud in vaſe non rigido claudatur, & undique non prematur æqualiter; cedet idem preſſioni fortiori, per definitionem fluiditatis.

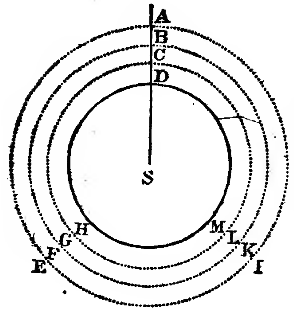
Caſ.

Caſ. 7. Ideoque in vaſe rigido fluidum non ſuſtinebit preſſionem fortiorem ex uno latere quàm ex alio, ſed eidem cedet, idque in momento temporis, quia latus vaſis rigidum non perſequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppoſitum, & ſic preſſio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam fluidum, quàm primùm à parte magis preſſâ recedere conatur, inhibetur per reſiſtentiam vaſis ad latus oppoſitum; reducetur preſſio undique ad æqualitatem, in momento temporis, ſine motu locali: & ſubinde partes fluidi, per caſum quintum, ſe mutuò prement æqualiter, & quieſcent inter ſe. Q. E. D.

Corol. Unde nec motus partium fluidi inter ſe, per preſſionem fluido ubivis in externâ ſuperficie illatam, mutari poſſunt; niſi quatenus aut figura ſuperficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes, intenſiùs vel remiſſiùs ſeſe premendo, difficiliùs vel faciliùs labuntur inter ſe.

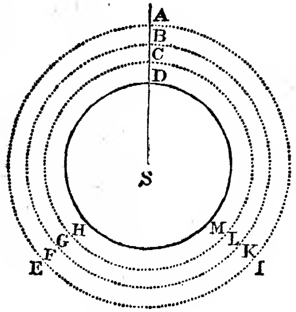
PROP. XX. THEOR. XV.

Si fluidi ſphærici, & in æqualibus à centro diſtantiis homogenei, fundo ſphærico concentrico incumbentis, partes ſingulæ verſus centrum totius gravitent; ſuſtinet fundum pondus cylindri, cujus baſis æqualis eſt ſuperficiei fundi, & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis.



Sit DHM ſuperficies fundi, & AEI ſuperficies ſuperior fluidi. Superficiebus ſphæricis innumeris BFK, CGL diſtinguatur fluidum in orbes concentricos æqualiter craſſos; & concipe vim gravitatis agere ſolummodo in ſuperficiem ſuperiorem orbis cujuſque, & æquales eſſe actiones in æquales partes ſuperficierum omnium. Premitur ergo ſuperficies ſuprema AE vi ſimplici gravitatis propriæ, quâ & omnes orbis ſupremi partes, & ſuperficies ſecunda BFK (per Prop. XIX.) pro menſurâ ſuâ æqualiter premuntur. Premitur præterea ſuperficies ſecunda BFK vi propriæ gravitatis, quæ addita vi priori facit

preſſionem



preſſionem duplam. Hâc preſſione, pro menſurâ ſuâ, & inſuper vi propriæ gravitatis, id eſt, preſſione triplâ, urgetur ſuperficies tertia CGL. Et ſimiliter preſſione quadruplâ urgetur ſuperficies quarta, quintuplâ quinta, & ſic deinceps. Preſſio igitur, quâ ſuperficies unaquæque urgetur, non eſt ut quantitas ſolida fluidi incumbentis, ſed ut numerus orbium ad uſque ſummitatem fluidi; & æquatur gravitati orbis infimi multiplicatæ per numerum orbium: hoc eſt, gravitati Solidi, cujus ultima ratio ad cylindrum præfinitum (ſi modò orbium augeatur numerus & minuatur craſſitudo in infinitum, ſic ut actio gravitatis à ſuperficie infimâ ad ſupremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Suſtinet ergo ſuperficies infima pondus cylindri præfiniti. Q. E. D. Et ſimili argumentatione patet propoſitio, ubi gravitas decreſcit in ratione quâvis aſſignatâ diſtantiæ à centro, ut & ubi fluidum ſurſum rarius eſt, deorſum denſius. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur fundum non urgetur à toto fluidi incumbentis pondere, ſed eam ſolummodo ponderis partem ſuſtinet, quæ in propoſitione deſcribitur; pondere reliquo à fluidi figurâ fornicatâ ſuſtentato.

Corol. 2. In æqualibus autem à centro diſtantiis eadem ſemper eſt preſſionis quantitas, ſive ſuperficies preſſa ſit horizonti parallela, vel perpendicularis, vel obliqua; ſive fluidum, à ſuperficie preſſâ ſurſum continuatum, ſurgat perpendiculariter ſecundum lineam rectam, vel ſerpit obliquè per tortas cavitates & canales, eaſque regulares vel maximè irregulares, amplas vel anguſtiſſimas. Hiſce circumſtantiis preſſionem nil mutari colligitur, applicando demonſtrationem theorematis hujus ad caſus ſingulos fluidorum.

Corol. 3. Eâdem demonſtratione colligitur etiam (per Prop. XIX.) quòd fluidi gravis partes nullum, ex preſſione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter ſe; ſi modò excludatur motus qui ex condenſatione oriatur.

Corol.

Corol. 4. Et propterea ſi aliud ejuſdem gravitatis ſpecificæ corpus, quod ſit condenſationis expers, ſubmergatur in hoc Fluido, id ex preſſione ponderis incumbentis nullum acquiret motum: non deſcendet, non aſcendet, non cogetur figuram ſuam mutare. Si ſphæricum eſt, manebit ſphæricum, non obſtante preſſione; ſi quadratum eſt, manebit quadratum: idque ſive molle ſit, ſive fluidiſſimum; ſive fluido liberè innatet, ſive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet interna rationem corporis ſubmerſi, & par eſt ratio omnium ejuſdem magnitudinis, figuræ & gravitatis ſpecificæ ſubmerſorum corporum. Si corpus ſubmerſum ſervato pondere liqueſceret, & indueret formam fluidi; hoc, ſi priùs aſcenderet, vel deſcenderet, vel ex preſſione figuram novam indueret, etiam nunc aſcenderet, vel deſcenderet, vel figuram novam induere cogeretur: id adeo quia gravitas ejus, cæteræque motuum cauſæ, permanent. Atqui (per Caſ. 5. Prop. XIX.) jam quieſceret & figuram retineret. Ergo & priùs.

Corol. Proinde corpus, quod ſpecificè gravius eſt quàm Fluidum ſibi contiguum, ſubſidebit; & quod ſpecificè levius eſt aſcendet, motumque & figuræ mutationem conſequetur, quantum exceſſus ille vel defectus gravitatis efficere poſſit. Namque exceſſus ille vel defectus rationem habet impulſûs, quo corpus, alias in æquilibrio cum fluidi partibus conſtitutum, urgetur; & comparari poteſt cum exceſſu vel defectu ponderis in lance alterutrâ Libræ.

Corol. 6. Corporum igitur in Fluidis conſtitutorum duplex eſt Gravitas: altera Vera & Abſoluta, altera Apparens, Vulgaris & Comparativa. Gravitas Abſoluta eſt vis tota, quâ corpus deorſum tendit: Relativa & Vulgaris eſt exceſſus gravitatis, quo corpus magis tendit deorſum quàm fluidum ambiens. Prioris generis gravitate partes fluidorum, & corporum omnium, gravitant in locis ſuis: ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave eſt, ut in vaſis liquorum plenis experiri licet; & pondus totius æquale eſt ponderibus omnium partium, ideoque ex iiſdem componitur. Alterius generis gravitate corpora non gravitant in locis ſuis; id eſt, inter ſe collata non prægravant, ſed mutuos ad deſcendendum conatus impedientia permanent in locis ſuis, perinde ac ſi gravia non eſſent. Quæ in Aere ſunt & non prægravant, vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant

gravant vulgus gravia judicat, quatenus ab Aeris pondere non ſuſtinentur. Pondera vulgi nihil aliud ſunt quàm exceſſus verorum ponderum ſupra pondus Aeris. Unde & vulgo dicuntur levia, quæ ſunt minùs gravia, Aerique prægravanti cedendo ſuperiora petunt. Comparativè levia ſunt, non verè, quia deſcendunt in vacuo. Sic & in Aquâ corpora, quæ ob majorem vel minorem gravitatem deſcendunt vel aſcendunt, ſunt comparativè & apparenter gravia vel levia; & eorum gravitas vel levitas comparativa & apparens eſt exceſſus vel defectus, quo vera eorum gravitas vel ſuperat gravitatem aquæ, vel ab eâ ſuperatur. Quæ verò nec prægravando deſcendunt, nec prægravanti cedendo aſcendunt, etiamſi veris ſuis ponderibus adaugeant pondus totius, comparativè tamen & in ſenſu vulgi non gravitant in aquâ. Nam ſimilis eſt horum caſuum demonſtratio.

Corol. 7. Quæ de Gravitate demonſtrantur, obtinent in aliis quibuſcunque viribus centripetis.

Corol. 8. Proinde ſi Medium, in quo corpus aliquod movetur, urgeatur vel à gravitate propriâ, vel ab aliâ quâcunque vi centripetâ, & corpus ab eâdem vi urgeatur fortiùs; differentia virium eſt vis illa motrix, quam in præcedentibus Propoſitionibus ut vim centripetam conſideravimus. Sin corpus à vi illâ urgeatur leviùs, differentia virium pro vi centrifugâ haberi debet.

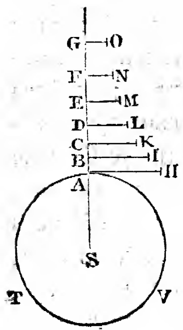
Corol. 9. Cùm autem Fluida, premendo corpora incluſa, non mutent eorum figuras externas, patet inſuper (per Corollarium Prop. XIX.) quòd non mutabunt ſitum partium internarum inter ſe: proindeque, ſi Animalia immergantur, & ſenſatio omnis à motu partium oriatur; nec lædent corpora immerſa, nec ſenſationem ullam excitabunt, niſi quatenus hæc corpora à compreſſione condenſari poſſunt. Et par eſt ratio cujuſcunque corporum Syſtematis Fluido comprimente circundati. Syſtematis partes omnes iiſdem agitabuntur motibus, ac ſi in vacuo conſtituerentur, ac ſolam retinerent Gravitatem ſuam Comparativam; niſi quatenus Fluidum vel motibus earum nonnihil reſiſtat, vel ad eaſdem compreſſione conglutinandas requiratur.

PROP.

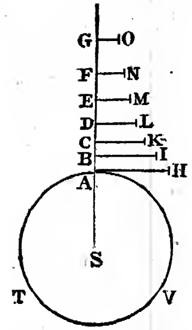
PROP. XXI. THEOR. XVI.

Sit Fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus à vi centripetâ diſtantiis ſuis à centro reciprocè proportionali deorſum trahantur: dico quòd, ſi diſtantiæ illæ ſumantur continuè proportionales, denſitates Fluidi in iiſdem diſtantiis erunt etiam continuè proportionales.

Deſignet ATV fundum ſphæricum cui Fluidum incumbit; S centrum; SA, SB, SC, SD, SE, SF, &c. diſtantias continuè proportionales. Erigantur perpendicula AH, BI, CK, DL, EM, FN, &c. quæ ſint ut denſitates Medii in locis A, B, C, D, E, F; & ſpecificæ gravitates in iiſdem locis erunt ut $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$, &c. vel, quod perinde eſt, ut $\frac{AH}{AB}$, $\frac{BI}{BC}$, $\frac{CK}{CD}$, &c. Finge primùm has gravitates uniformiter continuari ab A ad B, à B ad C, à C ad D, &c. factis per gradus decrementis in punctis B, C, D, &c. Et hæ gravitates ductæ in altitudines AB, BC, CD, &c. conficient preſſiones AH, BI, CK, &c. quibus fundum ATV (juxta Theorema XV.) urgetur. Suſtinet ergo particula A preſſiones omnes AH, BI, CK, DL, pergendo in infinitum; & particula B preſſiones omnes præter primam AH; & particula C omnes præter duas primas AH, BI; & ſic deinceps: ideoque particulæ primæ A denſitas AH eſt ad particulæ ſecundæ B denſitatem BI ut ſumma omnium AH + BI + CK + DL, in infinitum, ad ſummam omnium BI + CK + DL, &c. Et BI denſitas ſecundæ B eſt ad CK denſitatem tertiæ C, ut ſumma omnium BI + CK + DL, &c. ad ſummam omnium CK + DL, &c. Sunt igitur ſummæ illæ differentiis ſuis AH, BI, CK, &c. proportionales, atque ideo continuè proportionales (per hujus Lem. I.) proindeque differentiæ AH, BI, CK, &c. ſummis proportionales, ſunt etiam continuè proportionales. Quare cùm denſitates in locis A, B, C, &c. ſint ut AH, BI, CH, &c. erunt etiam hæ continuè proportionales. Pergatur per ſaltum, & ex æquo in diſtantiis SA, SC, SE continuè proportionalibus, erunt denſitates AH, CK, EM continuè proportionales.

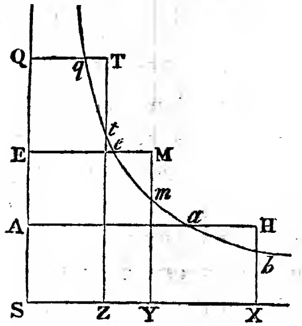


tionales.



tionales. Et eodem argumento, in diſtantiis quibuſvis continuè proportionalibus, SA, SD, SG, denſitates, AH, DL, GO, erunt continuè proportionales. Coeant jam puncta A, B, C, D, E, &c. eò ut progreſſio gravitatum ſpecificarum à fundo A ad ſummitatem Fluidi continua reddatur; & in diſtantiis quibuſvis continuè proportionalibus, SA, SD, SG, denſitates, AH, DL, GO, ſemper exiſtentes continuè proportionales, manebunt etiamnum continuè proportionales. Q. E. D.

Corol. Hinc ſi detur denſitas Fluidi in duobus locis, puta A & E, colligi poteſt ejus denſitas in alio quovis loco Q.



Centro S, Aſymptotis rectangulis SQ, SX deſcribatur Hyperbola ſecans perpendicula AH, EM, QT in *a*, *e*, *q*, ut & perpendicula HX, MY, TZ, ad Aſymptoton SX demiſſa, in *b*, *m* & *t*. Fiat area Y*mt*Z ad aream datam Y*mb*X ut area data E*eq*Q ad aream datam E*ea*A; & linea Z*t* producta abſcindet lineam QT denſitati proportionalem. Namque ſi lineæ SA, SE, SQ ſunt continue proportionales, erunt areæ E*eq*Q, E*ea*A æquales; & inde areæ his proportionales Y*mt*Z, X*bm*Y etiam æquales, & lineæ SX, SY, SZ, id eſt, AH, EM, QT, continuè proportionales, ut oportet. Et ſi lineæ SA, SE, SQ obtinent alium quemvis ordinem in ſerie continuè proportionalium,

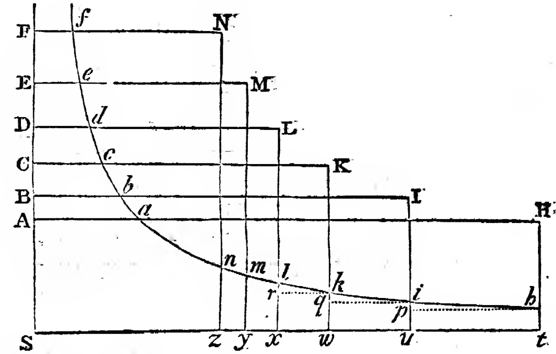
(a) Hujus conſtructionis in eo poſita eſt ratio, quòd ad omnes à centro diſtantias logarithmi rationum inter denſitates cum rationum inter ipſas diſtantias logarithmis ratione conveniunt. Inter diſtantias enim quaſvis datas SA, SE (in fig. Sup.) capiantur quot libuerit continuâ proportione mediæ SB, SC, SD. Erunt igitur denſitates BI, CK, DL, inter denſitates AH, EM, continuâ proportione mediæ. Logarithmi rationum, quæ diſtantiis SA, SB, denſitatibus AH, IB intercedunt, ſignificentur literis L, Λ. Quot verò ſumptæ fuerint diſtantiæ SB, SC, SD, inter duas SA, SE, continuâ proportione mediæ, tot ſint in numero $m-1$ unitates. Erit igitur mL logarithmus rationis quæ diſtantiis SA, SE intercedit. Cùm verò inter denſitates AH, EM tot ſint aliæ BI, CK, DL continuâ proportione mediæ, quot inter diſtantias SA, SE diſtantiæ; idcirco tot erunt denſitates BI, CK, DL inter duas AH, EM continuâ proportione mediæ, quot ſunt in numero $m-1$ unitates. Quare mΛ rationis ejus, quæ denſitatibus AH, EM intercedit, erit logarithmus. Jam verò mL : mΛ = L : Λ. Logarithmus igitur rationis inter diſtantias SA, SB, ad logarithmum rationis inter denſitates AH, BI eandem rationem habet, quam logarithmus inter rationis diſtantias SA, SE ad logarithmum rationis inter denſitates AH, EM. Nec huic rationi officiet diſtantiarum, quæ inter datas SA, SE, mediæ ſumptæ fuerint, multitudo, parva illa magnave fuerit. Quare et numero earum infinitè aucto, ut partes AB,

um, lineæ AH, EM, QT, ob proportionales areas hyperbolicas, obtinebunt eundem ordinem in aliâ ſerie quantitatum continuè proportionalium (a).

PROP. XXII. THEOR. XVII.

Sit Fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus à gravitate quadratis diſtantiarum ſuarum à centro reciprocè proportionali deorſum trahantur: dico quòd, ſi diſtantiæ ſumantur in progreſſione Muſicâ, denſitates fluidi in his diſtantiis erunt in progreſſione Geometricâ.

Deſignet S centrum, & SA, SB, SC, SD, SE diſtantias in progreſſione Geometricâ.

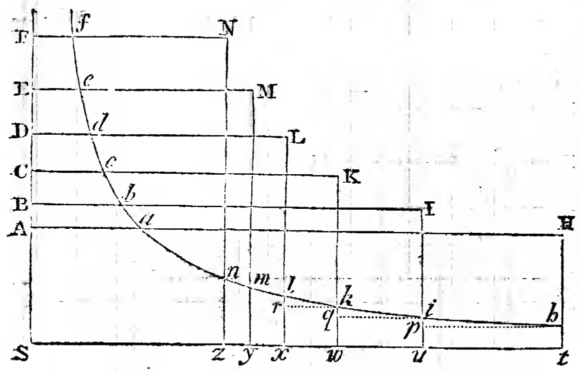


Erigantur perpendicula AH, BI, CK, &c. quæ ſint ut Fluidi denſitates in locis A, B, C, D, E, &c. & ipſius

AB, BC, CD, DE, necnon denſitatum AH, BI, CK, DL, EM differentiæ evaneſcant; inter evaneſcentes logarithmos, L, Λ, ratio data logarithmi rationis inter diſtantias SA, SE, ad logarithmum rationis inter denſitates AH, EM vel ultimò manebit. Quæ verò logarithmi evaneſcentis L ad evaneſcentem Λ ultima eſt ratio, ea fluxionis logarithmi inter diſtantias ad fluxionem logarithmi inter denſitates ratio erit. Quare fluxionibus hiſce data ratio intercedet logarithmi rationis inter diſtantias datas SA, SE, ad logarithmum rationis inter denſitates datas AH, EM. Eadem igitur fluentium inter ipſas ratio erit. Logarithmi igitur rationum inter denſitates eorum, qui rationum inter diſtantias ſunt logarithmi, rationem conſtanter ſervabunt. Jam verò in lineatione Newtoni *(vid. fig. Cor.)* poſitis SA, SE, SQ diſtantiis, ſi AH, EM, QT ſint inter ſe ut denſitates in diſtantiis illis; ſpatia hyperbolica *a*AE*e*, *e*EQ*q* rationum inter diſtantias SA, SE, SQ erunt logarithmi: item ſpatia hyperbolica *b*XYM, Y*mt*Z rationum inter denſitates AH, EM, QT logarithmi. Quare Y*mt*Z : *b*XYM = *e*EQ*q* : E*ea*A. Datis autem tribus diſtantiis SA, SE, SQ, cum denſitatibus duabus AH, EM, ſpatia tria E*ea*A, *e*EQ*q*, *b*XYM magnitudine data ſunt. Quare tertii *b*XYM ad quartum Y*mt*Z ratio data. Spatium igitur Y*mt*Z magnitudine datum. Quare rectâ etiam SY magnitudine datâ, dabitur magnitudine SZ, et illi æqualis QT (per Excerpt. ex Epiſt. 4. § 7.)

gravitates

gravitates ſpecificæ in iiſdem locis erunt $\frac{AH}{SAq}$, $\frac{BI}{SBq}$, $\frac{CK}{SCq}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari, primam ab A ad B, ſecundam à B ad C, tertiam à C ad D, &c. Et hæ ductæ in altitudines AB, BC, CD, DE, &c. vel, quod perinde eſt, in diſtantias SA, SB, SC, &c. altitudinibus illis proportionales, conficient exponentes preſſionum $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Quare cùm denſitates ſunt ut harum preſſionum ſummæ, differentiæ denſitatum AH−BI, BI−CK, &c. erunt ut ſummarum differentiæ $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Centro S, Aſymptotis SA, Sx deſcribatur Hyperbola quævis, quæ ſecet per-



pendicula AH, BI, CK, &c. in *a*, *b*, *c*, &c. ut & perpendicula ad Aſymptoton S*x* demiſſa H*t*, I*u*, K*w* in *h*, *i*, *k*; & denſitatum differentiæ *tu*, *uw*, &c. erunt ut $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, &c. Et rectangula $tu \times th$, $uw \times ui$, &c. ſeu *tp*, *uq*, &c. ut $\frac{AH \times th}{SA}$, $\frac{BI \times ui}{SB}$, &c. id eſt, ut A*a*, B*b*, &c. Eſt enim, ex naturâ hyperbolæ, SA ad AH vel S*t*, ut *th* ad A*a*, ideoque $\frac{AH \times th}{SA}$ æquale A*a*. Et ſimili argumento eſt $\frac{BI \times ui}{SB}$ æquale B*b*, &c. Sunt autem A*a*, B*b*, C*c*, &c. continuè proportionales, & propterea differentiis ſuis A*a*−B*b*, B*b*−C*c*, &c. proportionales; ideoque differentiis hiſce proportionalia ſunt rectangula

(b) Nimirum è naturâ hyperbolæ D*d* erit ad F*f* ut SF ad SD. Unde D*d*−F*f* : F*f* = FD : SD. Sed F*f* : A*a* = SA : SF. Et SA : SF = AD : DF propter progreſſionem muſicam. Quare F*f* : A*a* = AD : DF. Cùm igitur ſit D*d*−F*f* : F*f* = FD : SD; et F*f* : A*a* = AD : DF : ex æquo perturbatè D*d*−

gula *tp*, *uq*, &c. ut & ſummis differentiarum A*a*−C*c* vel A*a*−D*d* ſummæ rectangulorum $tp+uq$ vel $tp+uq+wr$. Sunto ejuſmodi termini quàm plurimi, & ſumma omnium differentiarum, puta A*a*−F*f*, erit ſummæ omnium rectangulorum, puta *zthn*, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur diſtantiæ punctorum A, B, C, &c. in infinitum, & rectangula illa evadent æqualia areæ hyperbolicæ *zthn*, ideoque huic areæ proportionalis eſt differentia A*a*−F*f*. Sumantur jam diſtantiæ quælibet, puta SA, SD, SF in progreſſione Muſicâ, & differentiæ A*a*−D*d*, D*d*−F*f* erunt æquales [b]; & propterea differentiis hiſce proportionales areæ *thlx*, *xlnz* æquales erunt inter ſe, & denſitates S*t*, S*x*, S*z*, id eſt, AH, DL, FN, continuè proportionales. Q. E. D.

Corol. Hinc ſi dentur Fluidi denſitates duæ quævis, puta AH & BI, dabitur area *thiu*, harum differentiæ *tu* reſpondens; & inde invenietur denſitas FN in altitudine quâcunque SF, ſumendo aream *thnz* ad aream illam datam *thiu* ut eſt differentia A*a*−F*f* ad differentiam A*a*−B*b*.

Scholium.

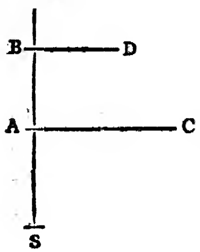
Simili argumentatione probari poteſt, quòd ſi gravitas particularum Fluidi diminuatur in triplicatâ ratione diſtantiarum à centro, & quadratorum diſtantiarum SA, SB, SC, &c. reciproca (nempe $\frac{SA\ cub.}{SAq}$, $\frac{SA\ cub.}{SBq}$, $\frac{SA\ cub.}{SCq}$) ſumantur in progreſſione Arithmeticâ; denſitates AH, BI, CK, &c. erunt in progreſſione Geometricâ. Et ſi gravitas diminuatur in quadruplicatâ ratione diſtantiarum, & cuborum diſtantiarum reciproca (puta $\frac{SAqq}{SA\ cub.}$, $\frac{SAqq}{SB\ cub.}$, $\frac{SAqq}{SC\ cub.}$, &c.) ſumantur in progreſſione Arithmeticâ; denſitates AH, BI, CK, &c. erunt in progreſſione Geometricâ. Et ſic in infinitum. Rurſus ſi gravitas particularum Fluidi in omnibus diſtantiis eadem ſit, & diſtantiæ ſint in progreſſione Arithmeticâ, denſitates erunt in progreſſione Geometricâ, uti Vir Cl. *Edmundus Halleius* invenit. Si gravitas ſit ut diſtantia, & quadrata diſtantiarum ſint in progreſ-

D*d*−F*f* : A*a* = AD : SD. Quare rectangula $\overline{Dd-Ff} \times SD$ et $Aa \times AD$ inter ſe æqualia. Rurſum, propter hyperbolam, A*a* : A*a*−D*d* = SD : AD. Quare rectangula $\overline{Aa-Dd} \times SD$ et $Aa \times AD$ inter ſe æqualia. Rectangula igitur $\overline{Dd-Ff} \times SD$, $\overline{Aa-Dd} \times SD$ inter ſe æqualia. Quare A*a*−D*d*, D*d*−F*f* inter ſe æquales.

sione Arithmeticâ, densitates erunt in progressione Geometricâ. Et sic in infinitum. Hæc ita se habent ubi Fluidi, compressione condensati, densitas est ut vis compressionis; vel, quod perinde est, spatium à Fluido occupatum reciprocè ut hæc vis. Fingi possunt aliæ condensationis leges; ut quòd cubus vis comprimentis sit ut quadrato-quadratum densitatis, seu triplicata ratio vis eadem cum quadruplicatâ ratione densitatis. Quo in casu, si gravitas est reciprocè ut quadratum distantiæ à centro, densitas erit reciprocè ut cubus distantiæ. Fingatur quòd cubus vis comprimentis sit ut quadrato-cubus densitatis, & si gravitas est reciprocè ut quadratum distantiæ, densitas erit reciprocè in sesquiplicatâ ratione distantiæ.

(c) Sed omnes generatim in duas Formulas concludam.

Sit S centrum ad quod gravia tendant; SA distantia quælibet data, per literam a designanda; SB alia quælibet, generaliter designanda per literam x. Ea verò vis centripetæ sit conditio, ut potestatis cujusdam è distantiâ, cujus index sit m, rationem ea semper servet. Nimirum ut vis centripeta in loco A sit ad vim centripetam in loco B ut SA^m ad SB^m, existente nimirum indice m vel positivo vel negativo, integro vel fracto, modò non sit -1. Jam si vis centripeta in loco dato A exponatur per rectam SA, vis centripeta in loco quovis alio exponetur per rectam $\frac{SB^m}{SA^{m-1}}$; cujus hoc erit symbolum algebraicum $\frac{x^m}{a^{m-1}}$. Ponatur recta AC cujusvis magnitudinis. Et sit alia BD, quæ ad datam AC rationem habeat, quam densitas in loco B ad datam in loco A densitatem. Rectaque BD generaliter designetur literâ y. Jam cùm gravitas, in loco quovis B, symbolo $\frac{x^m}{a^{m-1}}$ generaliter significetur, hoc alio $\frac{x^m}{a^m} y \times \dot{x}$, fluxionem vis comprimentis generaliter designare liceat. Quare si talis ponatur densitas materiæ fluidæ, quæ vis comprimentis rationem ubique servet, cùm fluxio quoque densitatis fluxionem vis comprimentis rationem servare debeat, ponere licebit $\frac{x^m}{a^m} y\dot{x} = b\dot{y}$ designante nimirum illâ b rectam quandam justæ magnitudinis. Quare $\dot{y} : \frac{x^m}{a^m}\dot{x} = y : b$. Sive $\dot{y} : \dot{\overline{\frac{x^{m+1}}{m+1.a^m}}} = y : b$. Quare $\frac{1}{m+1}\frac{SB^{m+1}}{SA^m} - \frac{1}{m+1}SA$ logarithmus erit rationis ejus quam BD habet ad AC, sive densitas in loco B ad densitatem datam in loco A, pro modulo b. Unde si tales sumantur distantiæ SB, ut earum potestates per quantitatem $m+1$ indicatæ arithmeticè usque crescant, densitatum progressio Geometrica erit.



2. Reliquis manentibus, talis ponatur densitas, quæ non simplici vis comprimentis rationi, sed rationi potestatis alicujus à vi comprimente constanter respondeat. Ejus potestatis index sit n, positivus quivis sive integer sive fractus, modò non sit $+1$, neve 0. Neque omninò negativum ponere liceat indicem n, ne rarior esset materia fluida, quæ majore vi comprimeretur: qualem ullius materiæ conditionem rerum natura ægrè, ut opinor, patiatur. Designet litera C rectam quandam eâ lege mutabilem, ut vis comprimentis rationem ea semper gerat. Erit igitur BD vel y ut C^n, et $\dot{y}$ ut $nC^{n-1}\dot{C}$; vel, dato n, ut $C^{n-1}\dot{C}$. Hoc est, cùm $y^{\frac{1}{n}}$ sit ut C, ac proinde $y^{\frac{n-1}{n}}$ ut C^{n-1}; $\dot{y}$ erit ut $y^{\frac{n-1}{n}}\dot{C}$. Ponere igitur licebit $\dot{y} = \frac{y^{\frac{n-1}{n}}\dot{C}}{b^{\frac{n-1}{n}}}$, sive $\frac{b^{\frac{n-1}{n}}}{y^{\frac{n-1}{n}}}\dot{y} = \dot{C}$, designante b rectam quandam justæ magnitudinis. (*Geom. Flux. Def.* 5.) At verò talis inveniebatur fluxio vis comprimentis, quæ rectanguli illius $\frac{x^m}{a^m}y\dot{x}$ rationem constanter servaret. Quare recta $\dot{C}$ talis esse debet, quæ hujus rectanguli rationem servet. Unde ponere licet $a\dot{C} = \frac{x^m}{a^m}y\dot{x}$. Unde efficitur $\frac{x^m}{a^m}y\dot{x} = \frac{a.b^{\frac{n-1}{n}}}{y^{\frac{n-1}{n}}}\dot{y}$. Sive $\frac{x^m}{a^m}\dot{x} = \frac{a.b^{\frac{n-1}{n}}}{y^{\frac{2n-1}{n}}}\dot{y}$. Et ex hàc fluxionum æquatione hæc alia fluentium veniet, $\frac{x^{m+1}}{\overline{m+1}.a^m} = \frac{\frac{n}{n-1}a.b^{\frac{n-1}{n}}}{y^{\frac{n-1}{n}}}$; modò illud generaliter obtineat, distantiâ x infinitè auctâ, densitatem item sensim imminui; ut datâ quâvis tandem minor fiat: è contrario, distantiâ in nihilum redactâ, densitatem omni datâ ultimò majorem fieri. At si verè ponatur æquatio illa, distantiarum potestates, à quantitate $m+1$ indicatæ, earum à densitatibus potestatum, quas quantitas $\frac{n-1}{n}$ indicaverit, rationem contrariam gerent.

Jam si in casu primo pro m numeri -3, -4, 0, 1 ordine substituantur; in casu autem secundo si pro m scribatur -2, & pro n quantitates $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ ordine subrogentur, verissima invenientur ea quæ, in casu utroque, à Newtono affirmata sunt.

Cæterùm in casu secundo necesse est ut quantitates $m+1$, $\frac{n-1}{n}$ eisdem prædita sint signis. Nam si contraria fortè gerant, fieri nequit ut distantiâ infinitè auctâ densitas in nullam abeat; & vicissim, distantiâ infinitè imminutâ, ut densitas infinitè crescat.

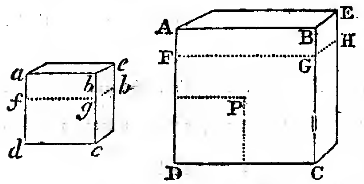
Formulas generales, nostrarum haud multum absimiles, post Varignonium, patres Doctissimi Le Seur & Jacquier ad locum posuerunt.

tantiæ. Fingatur quòd vis comprimens sit in duplicatâ ratione densitatis, & gravitas reciprocè in ratione duplicatâ distantiæ, & densitas erit reciprocè ut distantia. Casus omnes percurrere longum esset (c). Cæterùm per experimenta constat, quòd densitas Aeris sit ut vis comprimens vel accuratè vel saltem quàm proximè: & propterea densitas Aeris in Atmosphærâ Terræ est ut pondus Aeris totius incumbentis; id est, ut altitudo Mercurii in Barometro.

PROP. XXIII. THEOR. XVIII.

Si Fluidi, ex particulis se mutuò fugientibus compositi, densitas sit ut compressio, vires centrifugæ particularum sunt reciprocè proportionales distantiis centrorum suorum. Et vice versâ, particulæ viribus, quæ sunt reciprocè proportionales distantiis centrorum suorum, se mutuò fugientes componunt Fluidum Elasticum, cujus densitas est compressioni proportionalis.

Includi intelligatur Fluidum in spatio cubico ACE; dein compressione redigi in spatium cubicum minus *ace*: & particularum, similem situm inter se in utroque spatio obtinentium, distantiæ erunt ut cuborum latera AB, *ab*; & Mediorum densitates reciprocè ut spatia continentia AB *cub.* & *ab cub.* In cubi majoris latere plano, ABCD, capiatur quadratum, DP, æquale lateri plano cubi minoris, *db*; & ex hypothesi, pressio, quâ quadratum DP urget Fluidum inclusum, erit ad pressionem, quâ illud quadratum *db* urget Fluidum inclusum, ut Medii densitates ad invicem, hoc est, ut *ab cub.* ad AB *cub.* Sed pressio, quâ quadratum DB urget Fluidum inclusum, est ad pressionem, quâ quadratum DP urget idem Fluidum, ut quadratum DB ad quadratum DP, hoc est, ut AB *quad.* ad *ab quad.* Ergo, ex æquo, pressio quâ quadratum DB urget Fluidum, est ad pressionem quâ quadratum *db* urget Fluidum, ut *ab* ad AB (d). Planis FGH, *fgh*, per media cuborum ductis, distinguatur Fluidum in duas partes; & hæ se mutuò prement iisdem viribus, quibus premuntur à planis AC, *ac* (e), hoc est, in proportione *ab* ad AB: ideoque vires centrifugæ, quibus hæ pressiones



fiones

(d) Nempe cùm sit pressus quadrati DB ad pressum quadrati DP, ut AB^2 ad ab^2, sive ut solidum $AB^2 \times ab$ ad ab^3; cùm sit etiam pressus quadrati DP ad pressum quadrati *db* ut ab^3 ad AB^3, ex æquo erit pressus quadrati DB ad pressum quadrati *db* ut solidum $AB^2 \times ab$ ad AB^3, hoc est, ut recta *ab* ad rectam AB.

(e) Per Prop. XIX.

(f) Litera E significetur densitas liquoris in spatium cubicum *ade* coacti; literâ *e* minor ejusdem liquoris densitas, quâ spatium amplius cubicum ADE impleat. Jam si tales ponantur vires, quibus efficitur ut solida liquoris corpuscula se mutuò fugiant, quæ earum à centrorum distantiis potestatum, quæ numero *n* indicatæ sint, rationem contrariam gerant, vires

fiones sustinentur, sunt in eâdem ratione. Ob eundem particularum numerum similemque situm in utroque cubo, vires, quas particulæ omnes secundum plana FGH, *fgh* exercent in omnes, sunt ut vires quas singulæ exercent in singulas. Ergo vires, quas singulæ exercent in singulas secundum planum FGH in cubo majore, sunt ad vires, quas singulæ exercent in singulas secundum planum *fgh* in cubo minore, ut *ab* ad AB, hoc est, reciprocè ut distantiæ particularum ad invicem. Q. E. D.

Et vice versâ, si vires particularum singularum sunt reciprocè ut distantiæ, id est, reciprocè ut cuborum latera AB, *ab*; summæ virium erunt in eâdem ratione, & pressiones laterum DB, *db* ut summæ virium; & pressio quadrati DP ad pressionem lateris DB ut *ab quad.* ad AB *quad.* Et, ex æquo, pressio quadrati DP ad pressionem lateris *db* ut *ab cub.* ad AB *cub.* id est; vis compressionis ad vim compressionis ut densitas ad densitatem. Q. E. D.

Scholium.

Simili argumento, si particularum vires centrifugæ sint reciprocè in duplicatâ ratione distantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-quadrata densitatum. Si vires centrifugæ sint reciprocè in triplicatâ vel quadruplicatâ ratione distantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-cubi vel cubo-cubi densitatum. Et universaliter, si D ponatur pro distantiâ, & E pro densitate Fluidi compressi, & vires centrifugæ sint reciprocè ut distantiæ dignitas quælibet D^n, cujus index est numerus n; vires comprimentes erunt ut latera cubica dignitatis E^{n+2}, cujus index est numerus $n+2$: & contrà (f). Intelligenda verò sunt hæc omnia de particularum viribus centrifugis, quæ terminantur in particulis proximis; aut non longè ultrà diffunduntur. Exemplum habemus in corporibus Magneticis. Horum virtus attractiva terminatur ferè in sui generis corporibus sibi

vires illæ similium à rectis *ab*, AB potestatum contrariam rationem gerent; et pressus quadrati *db* erit ad pressum quadrati DB ut AB^n ad ab^n. Quare cùm sit pressus quadrati DB ad pressum quadrati DP ut AB^2 ad ab^2, rationes hasce componendo, efficietur pressus quadrati *db* ad pressum quadrati DP ut AB^{n+2} ad ab^{n+2}. Sed $E : e = AB^3 : ab^3$. Ergo $AB : ab = E^{\frac{1}{3}} : e^{\frac{1}{3}}$. Et AB^{n+2} ad ab^{n+2} ut $E^{\frac{n+2}{3}}$ ad $e^{\frac{n+2}{3}}$. Quare pressus quadrati *db* ad pressum quadrati DP ut $E^{\frac{n+2}{3}}$ ad $e^{\frac{n+2}{3}}$. Q. E. D.

proximis.

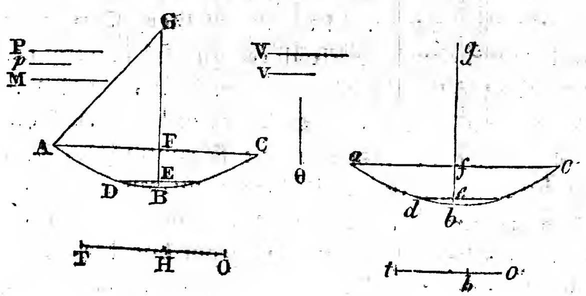
proximis. Magnetis virtus per interpoſitam laminam ferri contrahitur, & in laminâ ferè terminatur. Nam corpora ulteriora non tam à Magnete quàm à laminâ trahuntur. Ad eundem modum ſi particulæ fugant alias ſui generis particulas ſibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam exerceant, ex hujuſmodi particulis componentur Fluida, de quibus actum eſt in hâc Propoſitione. Quòd ſi particulæ cujuſque virtus in infinitum propagetur, opus erit vi majori ad æqualem condenſationem majoris quantitatis Fluidi. An verò Fluida Elaſtica ex particulis ſe mutuò fugantibus conſtent, Quæſtio Phyſica eſt. Nos proprietatem Fluidorum ex ejuſmodi particulis conſtantium Mathematicè demonſtravimus, ut Philoſophis anſam præbeamus quæſtionem illam tractandi.

SECTIO VI.

De Motu & Reſiſtentiâ Corporum Funependulorum.

PROP.

([a]) Corpora pendula, centris G, *g*, funibus æqualibus GB, *gb*, ſuſpenſa, arcus ABC, *abc*, vel circulares vel alios quoſlibet, dummodo ſimiles inter ſe ſint & æquales, centris oſcillationum B, *b*, in ſpatiis vacuis oſcillando ſcribant. Arcuum ABC, *abc* ſumantur partes quævis inter ſe ſimiles et æquales, & ſimiliter in totis poſitæ, AD, *ad*. Dicit Newtonus tempora, quibus conficiuntur



arcus AD, *ad*, eandem inter ſe habere rationem, quam tempora quibus arcus integri ABC, *abc* conficiendi ſunt. Dicit etiam velocitates corporum in locis D, *d* rationem inter ſe habere è rationibus virium motricûm et temporum, quibus arcus integri ABC, *abc* conficiuntur, cum contrariâ materiæ ratione compoſitam.

Primum verò quod dicit Newtonus, id nos oſtendimus hoc modo.

Exponatur recta P datæ cujuſvis longitudinis. Capiatur alia *p*, quæ ad illam P rationem habeat, quam pondus corporis *b* ad pondus corporis B. Capiatur etiam alia M, quæ habeat ad *p* rationem eam, quam materia corporis B ad materiam corporis *b*. Sint V, v rectæ eâ lege mutabiles, ut in omni magnitudine arcuum æqualium AD, *ad*, illæ V, v velocitatum in locis D, *d* inter

PROP. XXIV. THEOR. XIX.

Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oſcillationum à centro ſuſpenſionis æqualiter diſtant, ſunt in ratione compoſitâ ex ratione ponderum & ratione duplicatâ temporum oſcillationum in vacuo.

Nam velocitas, quam data vis in datâ materiâ, dato tempore generare poteſt, eſt ut vis & tempus directè, & materia inverſè. Quo major eſt vis, vel majus tempus, vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motûs Legem ſecundam manifeſtum eſt. Jam verò ſi Pendula ejuſdem ſint longitudinis, vires motrices, in locis à perpendiculo æqualiter diſtantibus, ſunt ut pondera: ideoque ſi corpora duo oſcillando deſcribant arcus æquales, & arcus illi dividantur in partes æquales; cùm tempora, quibus corpora deſcribant ſingulas arcúum partes correſpondentes, ſint ut tempora oſcillationum totarum; erunt velocitates ad invicem, in correſpondentibus oſcillationum partibus, ut vires motrices & tota oſcillationum tempora directè & quantitates materiæ reciprocè ([a]): ideoque quantitates materiæ ut vires & oſcillationum

inter ſe rationem ſervent. Sint aliæ etiam rectæ TH, *th*, eâ lege mutabiles, ut temporum, quibus conficiantur arcus æquales AD, *ad*, hæ rationem ſervent. Et quando arcus illi in integros creverint, rectæ TH, *th* longitudines TO, *to* ſint adeptæ; arcubus autem illis primùm naſcentibus, cum temporibus, quibus arcus naſcentes conficiuntur, in nihilum ipſæ ſingulatim abeant. Oſtendere oportet rectas TH, *th* cum illis TO, *to* proportione convenire. In rectas BG, *bg*, quæ à punctis arcuum ABC, *abc* mediis, ad perpendiculum fuerint erectæ, ducantur ab arcuum principiis A, *a*, nec non à punctis D, *d*, rectæ AF, *af*, DE, *de*, cum plano horizontis parallelæ. Jam arcuum AD, *ad* fluxiones rationem inter ſe habebunt, è ratione velocitatum in locis D, *d*, cum eâ quæ temporum, quibus arcus illi conficiuntur, fluxionibus intercedit, compoſitam. Hoc eſt $\dot{\overline{AD}} : \dot{\overline{ad}} = V \times \dot{\overline{TH}} : v \times \dot{\overline{th}}$. At verò cùm talia ſemper ſint tempora TH, *th*, ut arcus AD, *ad* ſemper ſint inter ſe æquales, arcuum etiam eorum fluxiones, $\dot{\overline{AD}}$, $\dot{\overline{ad}}$, ſemper erunt inter ſe æquales. Quare et rectangula $V \times \dot{\overline{TH}}$, $v \times \dot{\overline{th}}$ erunt inter ſe æqualia; et temporum TH, *th* fluxiones velocitatum V, v contrariam inter ſe rationem gerent. At verò eæ ſunt corporum in locis D, *d* velocitates, quas in locis E, *e* adeptæ eſſent, ſi è locis F, *f*, vi proprii utrumque ponderis rectâ cecidiſſent. Eam igitur velocitates illæ inter ſe rationem gerent, quæ efficitur è rationibus ponderum corporum B, *b*, temporumque quibus corpora illa, rectâ cadendo è locis F, *f*, ſpatia æqualia FE, *fe* confeciſſent, cum contrariâ materiæ, quæ corporibus ineſt, ratione compoſitis. Hoc eſt, cùm ſit pondus corporis B, ad pondus corporis *b*, ut P ad *p*, et materia in corpore *b* ad materiam in corpore B, ut *p* ad M; ratio rectæ V ad v ea erit, quæ componitur è rationibus rectæ P ad M, temporiſque, quo corpus B rectâ cadendo confeciſſet ſpatium FE, ad tempus quo corpus alterum *b*, rectâ itidem cadendo, confeciſſet ſpatium *fe*. Sit igitur θ recta quædam eâ lege mutabilis, ut ad mutabilem TH eam ſemper rationem gerat, quam tempus, quo corpus *b* ſpatium *fe* caſu recto confeciſſet, ad tempus quo corpus B caſu recto confeciſſet ſpatium FE. Igitur V erit ad v ut rectangulum $P \times TH$ ad rectangulum $M \times \theta$. At verò

num tempora directè & velocitates reciprocè. Sed velocitates reciprocè sunt ut tempora: atque ideo tempora directè & velocitates reciprocè sunt ut quadrata temporum; & propterea quantitates materiæ sunt ut vires motrices & quadrata temporum; id est, ut pondera & quadrata temporum. Q. E. D.

Corol. 1. Ideoque si tempora sunt æqualia, quantitates materiæ in singulis corporibus erunt ut pondera.

Corol. 2. Si pondera sunt æqualia, quantitates materiæ erunt ut quadrata temporum.

Corol.

verò cùm corpora, oscillando per arcus ABC, *abc*, in locis à perpendiculo æqualiter remotis, qualia semper erunt illa D, *d*, à viribus urgeantur quæ ipsam ponderum rationem inter se constanter gerant; fieri nequit, quin tempora, quibus corpora è locis F, *f*, in loca E, *e*, vi proprii utrumque ponderis, rectâ cecidissent, ad tempora quibus conficiuntur arcus similes et æquales AD, *ad*, similem singulatim rationem gerant. Hoc est, fieri nequit, quin sit $TH : tb = TH : \theta$. Fieri igitur nequit, quin sint æquales rectæ illæ *tb*, θ, et rectangula $M \times \theta$, $M \times tb$ inter se æqualia. Cùm igitur sit $V : v = P \times TH : M \times \theta$, erit etiam $V : v = P \times TH : M \times tb$. At verò jam antè ostendimus esse V ad v ut $\dot{\overline{tb}}$ ad $\dot{\overline{TH}}$. Erit igitur $\dot{\overline{tb}} : \dot{\overline{TH}} = P \times TH : M \times tb$. Quare $tb \times \dot{\overline{tb}} : tb \times \dot{\overline{TH}} = P \times TH : M \times tb$. Sed $tb \times \dot{\overline{TH}} : TH \times \dot{\overline{TH}} = M \times tb : M \times TH$. Ex æquo igitur $tb \times \dot{\overline{tb}} . TH \times \dot{\overline{TH}} = P : M$. Quadratorum autem è rectis *tb*, TH fluxiones rectangulorum, $tb \times \dot{\overline{tb}}$, $TH \times \dot{\overline{TH}}$ inter se rationem gerunt. Quare fluxionibus illis constans rectarum P, M ratio intercedet. Eadem igitur et fluentibus; ipsis utique rectarum *tb*, TH quadratis; siquidem quadrata illa, cum rectis ipsis arcubusque AD, *ad* simul generari inceperint. Rectarum igitur TH, *tb*, quarum duplicata ratio data est, earum propria certè inter ipsas ratio dabitur. Et si arcus AD, *ad*, semper inter se æquales, in totos ABC, *abc* creverint, et rectæ TH, *tb* in illas TO, *to*; erit TH ad *tb* ut TO, *to*: et tempora quibus arcus æquales AD, *ad* conficiuntur, quorum utique temporum rationem rectæ TH, *tb* referunt, ea cum temporibus, quibus arcus integri conficiuntur, per rectas TO, *to* expositis, proportione convenient. Q. E. D.

Jam verò quod alterum Newtonus dicit, esse V ad v ut $P \times TO$ ad $M \times to$, id ex iis quæ ostensa sunt, facilè obtinendum est. Nempe ostendimus TH esse ad *tb* ut TO ad *to*. Erit igitur $P \times TH$ ad $M \times tb$ ut $P \times TO$ ad $M \times to$. Sed illud etiam ostendimus, esse V ad v ut $P \times TH$ ad $M \times tb$. Quare $V : v = P \times TO : M \times to$. Q. E. D.

Cæterum Propositio ipsa, cujus approbandæ gratiâ hæc velocitatum ratio allegata est, vel ex eo satis in aperto posita est, quod modò nos ostendimus, rectis M, P rationem inter se habere, ejus quæ temporibus TH, *tb*, quibus arcus æquales conficiantur, intercedit, duplicatam. Cùm enim sit $M : P = TH^2 : tb^2 = TO^2 : to^2$; ratio M ad *p*, quæ componitur è rationibus rectæ M ad P rectæque P ad *p*, ea componetur è rationibus rectæ P ad *p* et quadrati ex TO ad quadratum ex *to*. Sed ratio rectæ M ad *p* ea est quæ materiæ in corpore B ad materiam in corpore *b*; et ratio rectæ P ad *p* ea est quæ ponderis corporis B ad pondus corporis *b*; et ratio mutua rectarum TO, *to*, ea temporum, quibus corpora arcus integros oscillando confecerint, mutua est ratio. Ratio igitur materiæ ad materiam composita est è ratione ponderum cum duplicatâ temporum ratione. Q. E. D.

(b) Corpora A, α, à centris G, γ, funibus longitudine inæqualibus, GB, $\gamma\beta$ suspensa, arcus ABC, $\alpha\beta\kappa$ sive circulares, sive alios quoslibet, inæquales quidem, sed inter se similes, in spatiis vacuis oscillando, centris oscillationum B, β scribant. Posuit Newtonus in Corollario quarto, temporum, quibus corpora arcus similes ABC, $\alpha\beta\kappa$ confecerint, quadrata esse inter se sicut longitudines GB, $\gamma\beta$, si corpora A, *a* tam pondere quàm materiâ inter se fuerint æqualia. Inde verò consequi ait, pondera corporum, A, α, longitudinum, GB, $\gamma\beta$, rationem inter se servare, si æqualis sit in utroque corpore materia, et si tempora oscillandi per arcus illos similes æqualia sint. Et in Corollario quinto, id universè constituit, materiam corporis cujuscunque penduli rationem è tribus rationibus

Corol. 3. Si quantitates materiæ æquantur, pondera erunt reciprocè ut quadrata temporum.

Corol. 4. Unde cùm quadrata temporum, cæteris paribus, sint ut longitudines Pendulorum; si & tempora & quantitates materiæ æqualia sunt, pondera erunt ut longitudines Pendulorum.

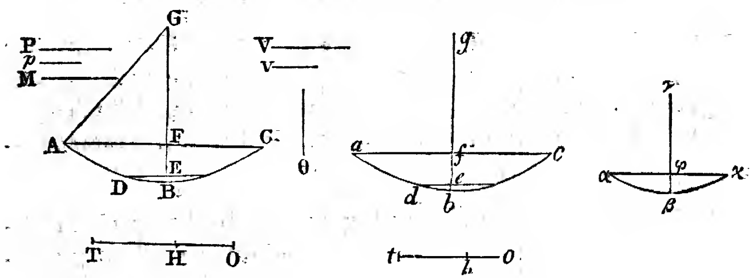
Corol. 5. Et universaliter, quantitas materiæ pendulæ est ut pondus & quadratum temporis directè, & longitudo Penduli inversè (b).

Corol.

tionibus compositam, ponderis, duplicatâ temporis, contrariâ longitudinis, constanter servare.

Nos primùm quod posuit Newtonus sic ostendimus.

Per puncta A, C, α, κ, arcuum similium ABC, $\alpha\beta\kappa$ extrema, ducantur rectæ AC, $\alpha\kappa$, quæ rectis GB, $\gamma\beta$, quæ à mediis arcuum illorum punctis ad perpendiculum fuerint erectæ, in punctis F, ϕ occurrant. Jam cùm similes sint arcus ABC, $\alpha\beta\kappa$, idcirco in locis, quæ à perpendiculo æqualibus va-



cillantium funium inclinationibus remota fuerint, corpora, per arcus ABC, $\alpha\beta\kappa$ oscillando, à viribus incitabuntur, quæ ipsorum ponderum rationem inter se constanter gerent. Ac propterea fieri nequit, quin tempora, quibus corpora, si è locis F, ϕ, cecidissent, vi proprii utrumque ponderis in loca B, β casu recto delata essent, ad tempora, quibus arcus similes ABC, $\alpha\beta\kappa$ oscillando conficiantur, similem rationem gerant. Quare et duplicata illorum ratio horum etiam duplicata erit. Atqui spatia FB, $\phi\beta$; cùm corpora ponantur tam pondere quàm materiâ inter se æqualia, rationem inter se habebunt temporum, quibus casu recto confecta essent, duplicatam: quare et eorum temporum duplicatam, quibus arcus similes ABC, $\alpha\beta\kappa$ corpora oscillando confecerint. Sed cùm similes sint arcus illi ABC, $\alpha\beta\kappa$, quæ spatiis FB, $\phi\beta$ eadem longitudinibus GB, $\gamma\beta$ inter ipsas ratio erit. Quare et longitudines illæ temporum, quibus arcus ABC, $\alpha\beta\kappa$ conficiantur, rationem inter se duplicatam gerant. Sicut in Corollario 4, Newtonus posuit. Q. E. D.

Inde verò quod in Corollario quinto Newtonus universè constituit, facili argumento obtinebimus. Manente enim corporum A, α, cùm materiæ tum ponderis æqualitate, intelligatur corpus quodpiam tertium *b* centro *g*, fune *gb*, qui illius GB longitudine æqualis, sit suspensum, arcum *abc* oscillando scribere illius ABC similem et æqualem. Jam materia corporis *a* ad materiam corporis A, sive ad materiam corporis α, rationem habet è ratione ponderis corporis *a* ad pondus corporis A vel α, cùm temporis, quo conficitur arcus *abc*, ad tempus, quo conficitur arcus ABC, duplicatâ ratione compositam (per Prop. XXIV.) Sed temporis, quo conficitur arcus *abc*, ad tempus, quo conficitur ABC, duplicata ratio componitur è duplicatâ temporis quo conficitur arcus *abc* ad tempus quo arcus $\alpha\beta\kappa$, et duplicatâ ejus quo arcus $\alpha\beta\kappa$ ad tempus quo ABC. Quæ postrema eadem est quæ longitudinis $\gamma\beta$ ad longitudinem GB vel *gb*: sicut Newtonus posuit, et à nobis ostensum est. Quare materia corporis *a* ad materiam corporis α rationem habet ex tribus compositam;

ponderis

De Motu Corporum

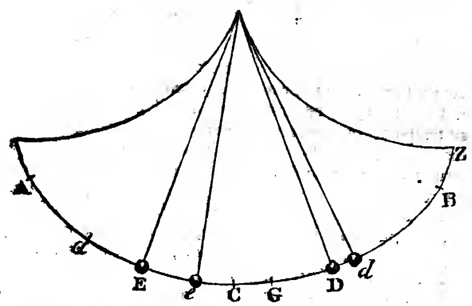
Corol. 6. Sed & in Medio non resistente ([c]) quantitas materiæ pendulæ est ut pondus comparativum & quadratum temporis directè & longitudo Penduli inversè. Nam pondus comparativum est vis motrix corporis in Medio quovis gravi, ut suprà explicui; ideoque idem præstat in tali Medio non resistente atque pondus absolutum in vacuo.

Corol. 7. Et hinc liquet ratio tum comparandi corpora inter se, quoad quantitatem materiæ in singulis; tum comparandi pondera ejusdem corporis in diversis locis, ad cognoscendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quàm accuratissimis inveni semper quantitatem materiæ in corporibus singulis eorum ponderi proportionalem esse.

PROP. XXV. THEOR. XX.

Corpora funependula quibus, in Medio quovis, resistitur in ratione momentorum temporis, & corpora funependula quæ in ejusdem gravitatis specificæ Medio non resistente moventur, oscillationes in Cycloide eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales simul describunt.

Sit AB Cycloidis arcus, quem corpus D, tempore quovis in Medio non resistente, oscillando describit. Bisecetur idem in C, ita ut C sit infimum ejus punctum; & erit vis acceleratrix, quâ corpus urgetur in loco quovis D, vel d, vel E, ut longitudo arcûs CD, vel Cd, vel CE. Exponatur vis illa per eundem arcum; & cùm resistentia sit ut momentum temporis,



ponderis a ad pondus α, temporum quibus conficiuntur arcus abc, $\alpha\beta\varkappa$ duplicatâ, et longitudinum gb, $\gamma\beta$ contrariâ. Q. E. D.

Hanc verò veritatem ejus quod in Corollario quarto Newtonus affirmavit, quivis colliget. Corporum pendulorum a, α pondera significentur literis a, α; materia illius literâ m; hujus, literâ μ. Tempora quibus arcus similes abc, $\alpha\beta\varkappa$ oscillando confecerint literis t, τ. Cùm sit $m : \mu =$ $a \times t^2 \times \gamma\beta : \alpha \times \tau^2 \times gb$; si ponantur m, μ inter se æquales, erunt $a \times t^2 \times \gamma\beta$, $\alpha \times \tau^2 \times gb$ inter se æqualia. Unde si æqualia sint t^2, τ^2, erunt etiam $a \times \gamma\beta$, $\alpha \times gb$ inter se æqualia. Ac propterea

5

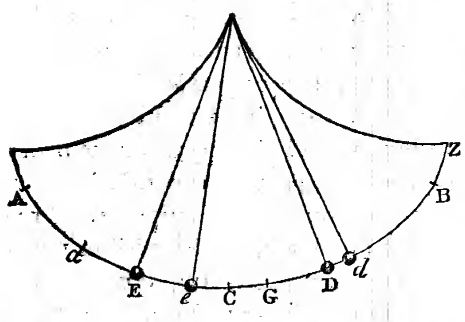
Liber Secundus.

ideoque detur ([d]), exponatur eadem per datam arcûs Cycloidis partem CG; & sumatur arcus Gd in ratione ad arcum CD quam habet arcus GB ad arcum CB: & vis, quâ corpus in d urgetur in Medio resistente, cùm sit excessus vis Cd supra resistentiam CG, exponetur per arcum Gd; ideoque erit ad vim, quâ corpus D urgetur in Medio non resistente in loco D, ut arcus Gd ad arcum CD; & propterea etiam in loco B ut arcus GB ad arcum CB. Proinde si corpora duo, D, d exeant de loco B, & his viribus urgeantur: cùm vires sub initio sint ut arcus CB & GB, erunt velocitates primæ & arcus primò descripti in eâdem ratione. Sunto arcus illi BD & Bd; & arcus reliqui CD, Gd erunt in eâdem ratione. Proinde vires, ipsis CD, Gd proportionales manebunt in eâdem ratione ac sub initio, & propterea corpora pergent arcus in eâdem ratione simul describere. Igitur vires & velocitates & arcus reliqui CD, Gd semper erunt ut arcus toti CB, GB; & propterea arcus illi reliqui simul describentur. Quare corpora duo D, d simul pervenient ad loca C & G; alterum quidem in Medio non resistente ad locum C, & alterum in Medio resistente ad locum G. Cùm autem velocitates in C & G sint ut arcus CB, GB; erunt arcus, quos corpora, ulteriùs pergendo, simul describunt, in eâdem ratione. Sunto illi CE & Ge. Vis, quâ corpus D in Medio non resistente retardatur in E, est ut CE; & vis, quâ corpus d in Medio resistente retardatur in e, est ut summa vis Ce & resistentiæ CG, id est ut Ge; ideoque vires, quibus corpora retardantur, sunt ut arcubus CE, Ge proportionales arcus CB, GB; proindeque velocitates, in datâ illâ ratione retardatæ, manent in eâdem illâ datâ ratione. Velocitates igitur, & arcus iisdem descripti, semper sunt ad invicem in datâ illâ ratione arcuum CB & GB; & propterea si sumantur arcus toti AB, aB in eàdem ratione, corpora D, d simul describent hos arcus, & in locis A & a motum omnem simul amittent. Isochronæ sunt igitur oscillationes totæ, & arcubus to-

terea $a : \alpha = gb : \gamma\beta$. Pondera ut longitudines. Q. E. D.

([c]) —*medio non resistente.*] Hoc est, in spatio materiâ quâdam consperso, modò ulla talis cogitari possit, quæ, cùm gravitate prædita esset, vi tamen inertiæ destitueretur. Corpora, in tali materiâ, sive pendula oscillarent, sive quovis modo per eam iter facerent, nullam quidem ex ejus offensibus mutationem motûs subirent, licet minore vi deorsum traherentur, quàm quæ in inani constituta essent.

([d]) —*detur,*] i. e. constans sit.



tis, BA, B*a*, proportionales sunt arcuum partes quælibet BD, B*d* vel BE, B*e* quæ simul describuntur. Q. E. D.

Corol. Igitur motus velocissimus in Medio resistente non incidit in punctum infimum C, sed reperitur in puncto illo G, quo arcus totus descriptus *a*B bisecatur. Et corpus, subinde pergendo ad *a*, iisdem gradibus retardatur quibus antea accelerabatur in descensu suo à B ad G.

PROP. XXVI. THEOR. XXI.

Corporum funependulorum, quibus resistitur in ratione velocitatum, oscillationes in Cycloide sunt Isochronæ.

Nam si corpora duo, à centris suspensionum æqualiter distantia, oscillando describant arcus inæquales, & velocitates in arcuum partibus correspondentibus sint ad invicem ut arcus toti; resistentiæ, velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde si viribus motricibus à gravitate oriundis, quæ sint ut iidem arcus, auferantur vel addantur hæ resistentiæ, erunt differentiæ vel summæ ad invicem in eâdem arcuum ratione: cúmque velocitatum incrementa vel decrementa sint ut hæ differentiæ vel summæ, velocitates semper erunt ut arcus toti. Igitur velocitates, si sint in aliquo casu ut arcus toti, manebunt semper in eâdem ratione. Sed in principio motûs, ubi corpora incipiunt descendere & arcus illos describere, vires, cùm sint arcubus proportionales, generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates semper erunt ut arcus toti describendi, & propterea arcus illi simul describentur. Q. E. D.

PROP.

PROP. XXVII. PROB. XXII.

Si corporibus funependulis resistitur in duplicatâ ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oscillationum in Medio resistente ac tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ Medio non resistente, erunt arcubus oscillando descriptis proportionales quàm proximè.

Nam pendulis æqualibus in Medio resistente describantur arcus inæquales A, B; & resistentia corporis in arcu A, erit ad resistentiam corporis in parte correspondente arcûs B, in duplicatâ ratione velocitatum; id est, ut AA ad BB, quàm proximè. Si resistentia in arcu B esset ad resistentiam in arcu A ut AB ad AA; tempora in arcubus A & B forent æqualia, per Propositionem superiorem. Ideoque resistentia AA in arcu A, vel AB in arcu B, efficit excessum temporis in arcu A suprà tempus in Medio non resistente; & resistentia BB efficit excessum temporis in arcu B supra tempus in Medio non resistente. Sunt autem excessus illi ut vires efficientes AB & BB quàm proximè, id est, ut arcus A & B. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ex oscillationum temporibus, in Medio resistente, in arcubus inæqualibus factarum, cognosci possunt tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ Medio non resistente. Nam differentia temporum erit ad excessum temporis in arcu minore supra tempus in Medio non resistente, ut differentia arcuum ad arcum minorem.

Corol. 2. Oscillationes breviores sunt magis Isochronæ; & brevissimæ iisdem temporibus peraguntur ac in Medio non resistente, quàm proximè. Earum verò quæ in majoribus arcubus fiunt, tempora sunt paulo majora; propterea quòd resistentia in descensu corporis, quâ tempus producitur, major sit, pro ratione longitudinis in descensu descriptæ, quàm resistentia in ascensu subsequente, quâ tempus contrahitur. Sed & tempus oscillationum tam brevium quàm longarum nonnihil produci videtur per motum Medii. Nam corporibus tardescentibus paulo minùs resistitur, pro ratione velocitatis, & corporibus acceleratis paulo magis, quàm iis quæ uniformiter progrediuntur: idque quia Medium,

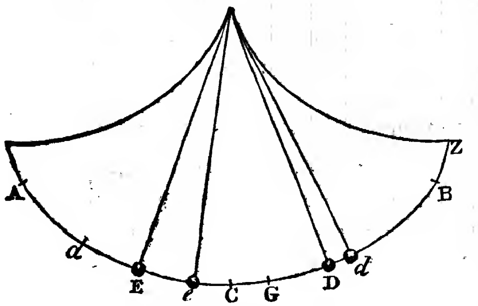
 eo

eo quem à corporibus accepit motu, in eandem plagam pergendo, in priore caſu magis agitatur, in poſteriore minùs; ac proinde magis vel minùs cum corporibus motis conſpirat. Penduli igitur in deſcenſu magis reſiſtit, in aſcenſu minùs quàm pro ratione velocitatis, & ex utrâque cauſâ tempus producitur.

PROP. XXVIII. THEOR. XXIII.

Si corpori funependulo in Cycloide oſcillanti reſiſtitur in ratione momentorum temporis, erit ejus reſiſtentia ad vim gravitatis ut exceſſus arcûs deſcenſu toto deſcripti ſupra arcum aſcenſu ſubſequente deſcriptum, ad Penduli longitudinem duplicatam.

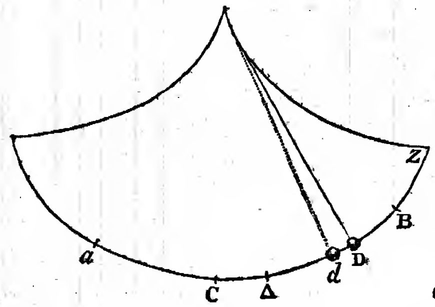
Deſignet BC arcum deſcenſu deſcriptum, C*a* arcum aſcenſu deſcriptum, & A*a* differentiam arcuum: & ſtantibus quæ in Propoſitione XXV. conſtructa & demonſtrata ſunt, erit vis, quâ corpus oſcillans urgetur in loco quovis D, ad vim reſiſtentiæ ut arcus CD ad arcum CG, qui ſemiſſis eſt differentiæ illius A*a*. Ideoque vis, quâ corpus oſcillans urgetur in Cycloidis principio, ſeu puncto altiſſimo, id eſt, vis gravitatis, erit ad reſiſtentiam ut arcus Cycloidis inter punctum illud ſupremum & punctum infimum C ad arcum CG; id eſt (ſi arcus duplicentur) ut Cycloidis totius arcus, ſeu dupla Penduli longitudo [e], ad arcum A*a*. Q. E. D.

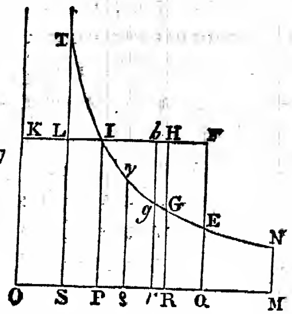


PROP. XXIX. PROB. VI.

Poſito quòd corpori in Cycloide oſcillanti reſiſtitur in duplicatâ ratione velocitatis: invenire reſiſtentiam in locis ſingulis.

Sit B*a* arcus oſcillatione integrâ deſcriptus, ſitque C infimum Cycloidis punctum, & CZ ſemiſſis arcûs Cycloidis totius, longitudini Penduli æqualis; & quæratur reſiſtentia corporis in loco quovis D. Secetur recta infinita OQ in punctis O, S, P, Q; eâ lege, ut (ſi erigantur perpendicula OK, ST, PI, QE, centroque O & Aſymptotis OK, OQ deſcribatur Hyperbola TIGE ſecans perpendicula ST, PI, QE in T, I & E, & per punctum I agatur KF parallela Aſymptoto OQ occurrens Aſymptoto OK in K, & perpendiculis ST & QE in L & F) fuerit area hyperbolica PIEQ ad aream hyperbolicam PITS ut arcus BC, deſcenſu corporis deſcriptus, ad arcum C*a* aſcenſu deſcriptum; & area IEF ad aream ILT ut OQ ad OS. Dein perpendiculo MN abſcindatur area hyperbolica PINM, quæ ſit ad aream hyperbolicam PIEQ ut arcus CZ ad arcum BC deſcenſu deſcriptum. Et ſi perpendiculo RG abſcindatur area hyperbolica PIGR, quæ ſit ad aream PIEQ ut arcus quilibet CD ad arcum BC deſcenſu toto deſcriptum; erit reſiſtentia in loco D ad vim gravitatis, ut area $\frac{OR}{OQ}$ IEF − IGH ad aream PINM.





Nam cùm vires à gravitate oriundæ, quibus corpus in locis Z, B, D, *a* urgetur, ſint ut arcus CZ, CB, CD, C*a*, & arcus illi ſint ut areæ PINM, PIEQ, PIGR, PITS; exponantur tum arcus tum vires per has areas reſpectivè. Sit inſuper D*d* ſpatium quàm minimum, à corpore deſcendente deſcriptum, & exponatur idem per aream quàm minimam RG*gr*, parallelis RG, *rg* comprehenſam; & producatur *rg* ad *h*, ut ſint GH*hg*, & RG*gr* contemporanea arearum IGH, PIGR decrementa. Et areæ $\frac{OR}{OQ}$ IEF − IGH incrementum, GH*hg* $-\frac{Rr}{OQ}$ IEF, ſeu R*r* × HG $-\frac{Rr}{OQ}$ IEF, erit ad areæ PIGR decrementum, RG*gr*, ſeu R*r* × RG, ut HG $-\frac{IEF}{OQ}$ ad RG; ideoque ut OR × HG −

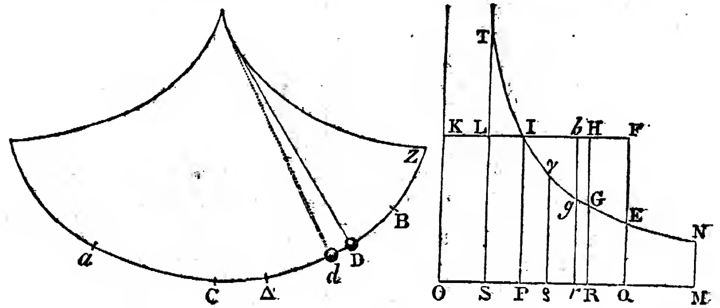
(e) Vide Coteſium de motu Pendulorum in Cycloide. Prob. & Lemm. III.

$\frac{OR}{OQ}$ IEF ad OR × GR, ſeu OP × PI; hoc eſt (ob æqualia OR × HG, OR × HR − OR × GR, ORHK − OPIK, PIHR & PIGR + IGH) ut PIGR + IGH − $\frac{OR}{OQ}$ IEF ad OPIK. Igitur ſi area $\frac{OR}{OQ}$ IEF − IGH dicatur Y, atque areæ PIGR decrementum RGgr detur, erit incrementum areæ Y ut PIGR − Y.

Quòd ſi V deſignet vim à gravitate oriundam, arcui deſcribendo CD proportionalem, quâ corpus urgetur in D, & R pro reſiſtentiâ ponatur; erit $V-R$ vis tota, quâ corpus urgetur in D. Eſt itaque incrementum velocitatis ut $V-R$ & particula illa temporis, in quâ factum eſt, conjunctim: ſed & velocitas ipſa eſt ut incrementum contemporaneum ſpatii deſcripti directè & particula eadem temporis inverſè. Unde, cùm reſiſtentia per hypotheſin ſit ut quadratum velocitatis, incrementum reſiſtentiæ (per Lem. II.) erit ut velocitas & incrementum velocitatis conjunctim, id eſt, ut momentum ſpatii & $V-R$ conjunctim; atque ideo, ſi momentum ſpatii detur, ut $V-R$; id eſt, ſi pro vi V ſcribatur ejus exponens PIGR, & reſiſtentia R exponatur per aliam aliquam aream Z, ut PIGR − Z.

Igitur areâ PIGR per datorum momentorum ſubductionem uniformiter decreſcente, creſcunt area Y in ratione PIGR − Y, & area Z in ratione PIGR − Z. Et propterea ſi areæ Y & Z ſimul incipiant, & ſub initio æquales ſint, hæ, per additionem æqualium momentorum, pergent eſſe æquales, & æqualibus itidem momentis ſubinde decreſcentes ſimul evaneſcent. Et viciſſim, ſi ſimul incipiunt et ſimul evaneſcunt, æqualia habebunt momenta, & ſemper erunt æquales: id adeo quia ſi reſiſtentia Z augeatur, velocitas, unà cum arcu illo Ca qui in aſcenſu corporis deſcribitur, diminuetur; & punctò in quo motus omnis, unà cum reſiſtentiâ, ceſſat, propiùs accedente ad punctum C, reſiſtentia citiùs evaneſcet quàm area Y. Et contrarium eveniet ubi reſiſtentia diminuitur.

Jam verò area Z incipit deſinitque ubi reſiſtentia nulla eſt; hoc eſt, in principio motûs, ubi arcus CD arcui CB æquatur, & recta RG incidit in rectam QE; & in fine motûs, ubi arcus CD arcui Ca æquatur & RG incidit in rectam ST. Et area Y, ſeu $\frac{OR}{OQ}$ IEF − IGH, incipit deſinitque ubi nulla eſt; ideoque ubi $\frac{OR}{OQ}$ IEF & IGH æqualia ſunt; hoc eſt (per conſtructionem) ubi recta RG



incidit ſucceſſivè in rectas QE & ST. Proindeque areæ illæ ſimul incipiunt & ſimul evaneſcunt, & propterea ſemper ſunt æquales. Igitur area $\frac{OR}{OQ}$ IEF − IGH æqualis eſt areæ Z, per quam reſiſtentia exponitur, & propterea eſt ad aream PINM, per quam gravitas exponitur, ut reſiſtentia ad gravitatem (f). Q. E. D.

Corol.

(f) Mira certè argumenti ſubtilitas, neque tamen evidentia minor; niſi quòd illud fortè obſcuriùs dictum ſit, cur areæ Y, Z, ſi initio ſive creſcendi ſive decreſcendi æquales fuerint, ſemper æquales maneant. Hujus autem ratio hâc nititur Propoſitione.

THEOREMA.

Si magnitudines initio æquales ſimili modo fluant, atque eâ etiam lege, ut fluentium magnitudines, fluendo ſimul factæ, fluxionibus ſuis auctæ ſemper inter ſe æquales ſint; fluentes ipſæ ſemper erunt inter ſe æquales.

Magnitudines æquales AB, CD ſimiliter fluant, i. e. vel creſcendo utraque vel utraque decreſcendo, et earum ſub initio fluxûs, ſint AE, CF (ſenſu Def. 5. Geom. Flux.) fluxiones. Sint Ab, Cd; Aβ, Cδ fluentium magnitudines fluendo ſimul factæ; quarum etiam fluxiones (ſenſu Def. 5. Geom. noſtræ Flux.) ſint Ae, Cf; Aϵ, Cφ; magnitudines utique in eodem genere in quo ſunt fluentes. Ea denique ſit fluendi lex, ut ſint EB, FD, nec non eb, fd; $\epsilon\beta$, $\varphi\delta$ inter ſe æquales. Dico fluentes eſſe ſemper inter ſe æquales, ſi eæ conferantur magnitudines, quæ fluendo ſimul exſiſtant. Hoc eſt dico Ab = Cd, et Aβ = Cδ. Magnitudinibus enim AB, CD eas manere fingatur fluendi velocitates, quas initio fluxûs quæque habuit, uſquedum novas illas longitudines Ab, Cd ſint adeptæ: inde verò velocitates fluendi in alias ſubitò mutari, quæ ſint ad priores ut rectæ Ae, Cf ad illas AE, CF. Atque rurſum magnitudinibus fluentibus hæ novæ fluendi velocitates maneant, uſquedum fluentes Ab, Cd in illas Aβ, Cδ mutatæ fuerint. Inde verò velocitates in

Fig. 1.

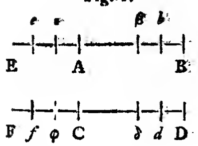
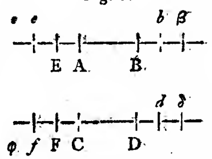


Fig. 2.



De Motu Corporum

Corol. 1. Est igitur resistentia in loco infimo C ad vim gravitatis, ut area $\frac{OP}{OQ}$ IEF ad aream PINM.

Corol. 2. Et autem maxima, ubi area PIHR est ad aream IEF ut OR ad OQ. Eo enim in casu momentum ejus (nimirum PIGR $- Y$) evadit nullum (g).

Corol. 3. Hinc etiam innotescit velocitas in locis singulis: quippe quæ est in subduplicatâ ratione resistentiæ, & ipso motûs initio æquatur velocitati corporis in eâdem Cycloide sine omni resistentiâ oscillantis.

Cæterùm ob difficilem calculum, quo resistentia & velocitas per hanc Propositionem inveniendæ sunt, visum est Propositionem sequentem subjungere.

PROP. XXX. THEOR. XXIV.

Si recta AB *æqualis sit Cycloidis arcui, quem corpus oscillando describit, & ad singula ejus puncta* D *erigantur perpendicula* DK, *quæ sint ad longitudinem Penduli ut resistentia corporis, in arcûs punctis correspondentibus, ad vim gravitatis: dico, quòd differentia inter arcum, descensu toto descriptum, & arcum, ascensu toto subsequente descriptum, ducta in arcuum eorundem semisummam æqualis erit areæ* BKa *à perpendiculis omnibus* DK *occupatæ.*

Fig. 1.

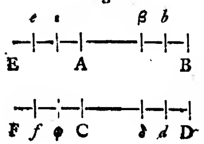
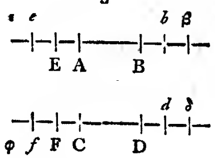


Fig. 2.



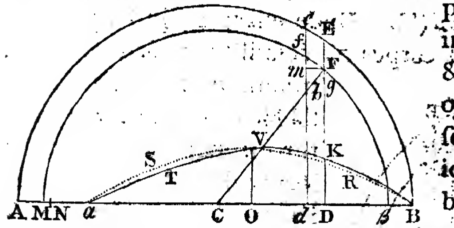
in alias rursum subitò mutentur, quæ sint ad primas ut Aε, Cφ ad illas AE, CF. Ita erit Bb ad Dd ut AE ad AF: et bβ ad dδ ut Ae ad Af.

Jam verò cùm EB, ED inter se æquales sint, id enim posuimus; cùm sint etiam AB, CD inter se æquales, nam et illud posuimus; erunt nimirum AE, CF inter se æquales. Ergo Bb, Dd inter se æquales erunt. Quare et Ab, Cd, quæ fluendo simul factæ sunt, erunt inter se æquales, necnon illæ Eb, Fd. Rursum cùm Eb, Fd sint inter se æquales, çùm sint etiam eb, fd inter se æquales, id enim posuimus, et Ee, Ff inter se æquales erunt. Quare cùm illæ AE, CF sint etiam inter se æquales, id enim ostensum est, æquales erunt Ae, Cf. Unde illæ bβ, dδ erunt etiam inter se æquales. Et propter æquales jam ostensas Ab, Cd, aliæ illæ Aβ, Cδ, fluendo utique simul factæ, erunt etiam inter se æquales; necnon illæ eβ, fδ. Unde rursum cùm sint etiam εβ, φδ inter se æquales, id enim posuimus, et eε, fφ inter se æquales erunt; et propter æquales illas Ae, Cf, erunt Aε, Cφ inter se æquales, illarum utique Aβ, Cδ fluxiones. Neque huic rationi officiet illarum Bb, bβ, Cd, dδ magnitudines, magnæ parvæve fuerint. Quare et numero earum Bb, bβ; Dd, dδ infinitè aucto, magnitudinibus singularum infinitè imminutis, fluentium, quæ fluendo simul factæ fuerint, æqualitas mutua manebit. Q. E. D.

Hinc autem facilis est probatio ejus quod à Newtono affirmatum est. Constantem enim areæ PIGR fluxionem (*vid. fig. p.* 359) ponere licet dato rectangulo OPIK æqualem. (Geom. Flux. Def. 5.) Unde cùm

Liber Secundus.

Exponatur enim tum Cycloidis arcus, oscillatione integrâ descriptus, per rectam illam sibi æqualem *a*B, tum arcus qui describeretur in vacuo per longitudinem AB. Bisecetur AB in C, & punctum C repræsentabit infimum Cycloidis punctum; & erit CD ut vis a gravitate oriunda, quâ corpus in D secundum tangentem Cycloidis urgetur; eamque habebit rationem ad longitudinem Penduli, quam habet vis in D ad vim gravitatis. Exponatur igitur vis illa per longitudinem CD, & vis gravitatis per longitudinem Penduli; & si in DE capiatur DK, in eâ ratione ad longitudinem Penduli, quam habet resistentia ad gravitatem, erit DK exponens resistentiæ. Centro C & intervallo CA, vel CB, construatur semicirculus BE*e*A. Describat autem corpus, tempore quàm minimo, spatium D*d*; & erectis perpendiculis DE, *de* circumferentiæ occurrentibus in E & *e*, erunt hæc ut velocitates, quas corpus in vacuo, descendendo



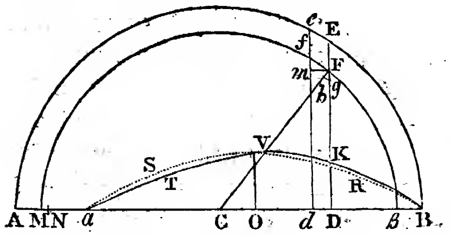
cùm sit $\dot{Y}$: $\overline{PIGR} = PIGR - Y$: OPIK, id enim à Newtono ostensum est, erit $\dot{Y} = PIGR - Y$. Sive $\dot{Y} + Y = PIGR$. At verò et fluxio areæ Z ponenda est spatio PIGR $-$ Z æqualis (sic demonstrante Newtono.) Quare $\dot{Z} + Z = PIGR = \dot{Y} + Y$. Unde si areæ Y, Z semel fuerint æquales, semper æquales erunt (per nostram Propositionem). Q. E. D.

(g) Nimirum $\dot{R} = PIGR - Z = PIGR - Y = PIGR + IGH - \frac{OR}{OQ} IEF = PIHR - \frac{OR}{OQ} IEF$. (*Vid. fig. p.* 359.)

Posito igitur $\dot{R} = 0$, ut sit R maxima, erit $PIHR = \frac{OR}{OQ} IEF$. Sive PIHR : IEF = OR : OQ. Q. E. D.

Si igitur capiatur O*ρ* talis ut sit O*ρ* ad P*ρ* sicut datum rectangulum OP ad datum spatium IEF; eductâque ad perpendiculum rectâ *ργ*, quæ hyperbolæ in *γ* occurrat, si capiatur arcus CΔ qui ad arcum CB rationem habeat quam spatium hyperbolicum PI*ργ* ad spatium PIEQ, vis renixûs Maxima erit in loco Δ. Non enim. In alio igitur loco; puta in loco D; ductâque RG, quæ, cum asymptotâ OK parallela, abscindat aream PIGR, cujus ea sit ad aream PIEQ ratio quæ arcûs CD ad arcum CB, erit PIHR : IEF = OR : OQ (pro eo quod modò ostensum est). Sed OR : OQ = OKHR : OKFQ. (Elem. VI. 1.) Quare PIHR : IEF = OKHR : OKFQ. Permutando PIHR : OKHR, sive PR : OR = IEF : OF. Invertendo OR : PR = OP : IEF = O*ρ* : P*ρ*. Dividendo OP : PR = O*ρ* : P*ρ*. Æquales igitur erunt PR, P*ρ*. Quare punctum R cum illo ipso *ρ* congruet, et ordinata RG cum ipsâ *ργ*. At verò cùm locus D alius sit à loco Δ, arcus CD, CΔ inæquales erunt; et inæqualium ad arcum CB haud una erit ratio. Neque igitur arearum IP*ργ*, IPRG ad aream IPEQ una erit ratio. Areæ igitur IP*ργ*, IPRG, quæ ab eâdem ordinatâ IP initium sumunt, inæquales erunt. Minimè igitur congruent ordinatæ illæ *ργ*, RG. Quod est absurdum; quoniam congruere ostensæ sunt. Non igitur in alio loco præter Δ vis renixûs maxima erit. Quare in ipso loco Δ. Q. E. D.

à puncto B, acquireret in locis D & *d*. Patet hoc (per Prop. LII. Lib. I.) Exponantur itaque hæ velocitates per perpendicula illa DE, *de*; ſitque DF velocitas, quam acquirit in D, cadendo de B in Medio reſiſtente. Et ſi centro C, & intervallo CF, deſcribatur Circulus F*f*M occurrens rectis *de* & AB in *f* & M, erit M locus, ad quem deinceps, ſine ulteriore reſiſtentiâ, aſcenderet; & *df* velocitas, quam acquireret in *d* (h). Unde etiam ſi F*g* deſignet velocitatis momentum, quod corpus D, deſcribendo ſpatium quàm minimum D*d*, ex reſiſtentiâ Medii amittit; & ſumatur CN æqualis C*g*: erit N locus ad quem corpus deinceps ſine ulteriore reſiſtentiâ aſcenderet; & MN erit decrementum aſcenſûs ex velocitatis illius amiſſione oriundum.



Ad *df* demittatur perpendiculum F*m*; & velocitatis DF decrementum F*g*, à reſiſtentiâ DK genitum, erit ad velocitatis ejuſdem incrementum *fm*, à vi CD genitum, ut vis generans DK ad vim generantem CD. Sed & ob ſimilia triangula F*mf*, F*hg*, FDC, eſt *fm* ad F*m*, ſeu D*d*, ut CD ad DF; & ex æquo F*g* ad D*d* ut DK ad DF. Item F*h* ad F*g* ut DF ad CF; & ex æquo perturbatè, F*h*, ſeu MN, ad D*d* ut DK ad CF, ſeu CM; ideoque ſumma omnium $MN \times CM$ æqualis erit ſummæ omnium $Dd \times DK$. Ad punctum mobile M erigi ſemper intelligatur ordinata rectangula æqualis indeterminatæ CM, quæ motu continuo ducatur in totam longitudinem A*a*; & trapezium ex illo motu deſcriptum, ſive huic æquale rectangulum $Aa \times \frac{1}{2}aB$, æquabitur ſummæ omnium $MN \times CM$ (i), ideoque ſummæ omnium $Dd \times DK$, id eſt, areæ BKVT*a*. Q.E.D.

Corol.

(h) Perficiatur enim ſemicirculus MFβ, ut rectæ MC iterum in β occurrat. Jam velocitas DF ea eſt, quam corpus, in ſpatiis vacuis oſcillando, in loco D adeptum eſſet, ſi è loco β, urgente vi quæ eſſet ut Cβ, cecidiſſet. (Lib. I. LII.) Cùm igitur corporis, in ſpatio impedito oſcillantis, eadem ſit in loco D velocitas ac ſi in vacuo, è loco β, urgente ibi vi Cβ, oſcillare incepiſſet; ſi extingui ponatur vis renixûs in loco D, idem erit corporis deinceps motus, ſcilicet per materiam vi ſuâ renitendi ſpoliatam, ac ſi motus ab initio è loco β vi Cβ inchoatus eſſet. At verò motu in vacuo ita inchoato corpus, in loco D, velocitatem *df* adipiſceretur; et locum uſque M aſcenderet, ubi velocitas ejus omnis extingueretur. (Lib. I. LII.)

(i) Trapezium motu illo deſcriptum iri, ex eo patet, quòd ordinata mobilis, ad perpendiculum cum rectâ CA, quæ poſitione data eſt, educta, rectæ CM inter ipſam et datum punctum C interceptæ ſemper ſit æqualis. Atque idcirco mobilis illa faſtigio ſuo tanget ſemper rectam poſitione datam. (Simſon. Loc. Plan. Lib. I. Prop. XXIII. Caſ. I.) Trapezium autem illud rectangulo $Aa \times \frac{1}{2}aB$ æquale eſſe ſic oſtenditur. Trapezii illius latera parallela per puncta A, *a* cùm ſint rectis CA, C*a* ſingulatim æqualia, trapezium æquale erit rectangulo $\overline{\frac{1}{2}CA + \frac{1}{2}Ca} \times Aa$; hoc eſt propter CA, CB inter ſe æquales, rectangulo $\frac{1}{2}CB + \frac{1}{2}Ca \times Aa$, ſive $\frac{1}{2}aB \times Aa$.

Corol. Hinc ex lege reſiſtentiæ & arcuum C*a*, CB differentiâ A*a* colligi poteſt proportio reſiſtentiæ ad gravitatem quàm proximè.

Nam ſi uniformis ſit reſiſtentia DK, figura BKT*a* rectangulum erit ſub B*a* & DK; & inde rectangulum ſub $\frac{1}{2}Ba$ & A*a* erit æquale rectangulo ſub B*a* & DK, & DK æqualis erit $\frac{1}{2}Aa$. Quare cùm DK ſit exponens reſiſtentiæ, & longitudo Penduli exponens gravitatis, erit reſiſtentia ad gravitatem ut $\frac{1}{2}Aa$ ad longitudinem penduli; omninò ut in Prop. XXVIII. demonſtratum eſt.

Si reſiſtentia ſit ut velocitas, figura BKT*a* Ellipſis erit quàm proximè. Nam ſi corpus, in Medio non reſiſtente, oſcillatione integrâ deſcriberet longitudinem BA, velocitas, in loco quovis D, foret ut Circuli, diametro AB deſcripti, ordinatim applicata DE. Proinde cùm B*a* in Medio reſiſtente, & BA in Medio non reſiſtente, æqualibus circiter temporibus deſcribantur; ideoque velocitates in ſingulis ipſius B*a* punctis, ſint quàm proximè ad velocitates in punctis correſpondentibus longitudinis BA, ut eſt B*a* ad BA; erit velocitas in puncto D, in Medio reſiſtente, ut Circuli, vel Ellipſeos, ſuper diametro B*a* deſcripti, ordinatim applicata; ideoque figura BKVT*a* Ellipſis erit quàm proximè. Cùm reſiſtentia velocitati proportionalis ſupponatur, ſit OV exponens reſiſtentiæ in puncto medio O; & Ellipſis BRVS*a*, centro O, ſemiaxibus OB, OV deſcripta, figuram BKVT*a*, eique æquale rectangulum $Aa \times BO$, æquabit quamproximè. Eſt igitur $Aa \times BO$ ad $OV \times BO$ ut area Ellipſeos hujus ad $OV \times BO$: id eſt, A*a* ad OV ut area ſemicirculi ad quadratum radii, ſive ut 11 ad 7 circiter: et propterea $\frac{7}{11}Aa$ ad longitudinem Penduli ut corporis oſcillantis reſiſtentia in O ad ejuſdem gravitatem.

Quòd ſi reſiſtentia DK ſit in duplicatâ ratione velocitatis, figura BKVT*a* ferè Parabola erit, verticem habens V & axem OV (k);

(k) Cùm enim DK ſit ut DF^2, erit $DK \times A = DF^2 = \beta D \times DM$, deſignante A datam quandam juſtæ longitudinis. Sed rectangulum $\beta D \times DM$ rectangulo $BD \times Da$ propemodùm eſt æquale. Quare $DK \times A$, $BD \times Da$ propemodum inter ſe æqualia. Si verè æqualia eſſent, punctum K eſſet ad Parabolam cujus parameter A; axis verò rectam B*a*, quam ad perpendiculum inſiſteret, mediam divideret. Neque longè ab illius Parabolæ ductu punctum K abſceſſerit, propter non magnam illorum $DK \times A$, $BD \times Da$ inæqualitatem.

ideoque æqualis erit rectangulo sub $\frac{1}{3}Ba$ & OV quam proximè. Est igitur rectangulum sub $\frac{1}{2}Ba$ & Aa æquale rectangulo sub $\frac{1}{3}Ba$ & OV, ideoque OV æqualis $\frac{3}{4}Aa$: & propterea corporis oscillantis resistentia in O ad ipsius gravitatem ut $\frac{3}{4}Aa$ ad longitudinem Penduli.

Atque has conclusiones in rebus practicis abundè satis accuratas esse censeo. Nam cùm Ellipsis vel Parabola BRVSa congruat cum figurâ BKVTa in puncto medio V, hæc, si ad partem alterutram BRV vel VSa excedit figuram illam, deficiet ab eâdem ad partem alteram, & sic eidem æquabitur quàm proximè.

PROP. XXXI. THEOR. XXV.

Si corporis oscillantis resistentia, in singulis arcuum descriptorum partibus proportionalibus, augeatur vel minuatur in datâ ratione; differentia inter arcum descensu descriptum & arcum subsequente ascensu descriptum, augebitur vel diminuetur in eâdem ratione.

Oritur enim differentia illa ex retardatione Penduli per resistentiam Medii, ideoque est ut retardatio tota eique proportionalis resistentia retardans. In superiore Propositione rectangulum sub rectâ $\frac{1}{2}aB$, & arcuum illorum CB, Ca differentiâ, Aa, æqualis erat areæ BKTa. Et area illa, si maneat longitudo aB, augetur vel diminuitur in ratione ordinatim applicatarum DK; hoc est, in ratione resistentiæ, ideoque est ut longitudo aB & resistentia conjunctim. Proindeque rectangulum sub Aa & $\frac{1}{2}aB$ est ut aB & resistentia conjunctim, & propterea Aa ut resistentia. Q. E. D.

Corol. 1. Unde si resistentia sit ut velocitas, differentia arcuum in eodem Medio erit ut arcus totus descriptus: & contrà.

Corol. 2. Si resistentia sit in duplicatâ ratione velocitatis, differentia illa erit in duplicatâ ratione arcûs totius: & contrà.

Corol. 3. Et universaliter, si resistentia sit in triplicatâ vel aliâ quâvis ratione velocitatis, differentia erit in eâdem ratione arcûs totius: & contrà.

Corol. 4. Et si resistentia sit partim in ratione simplici velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ, differentia erit partim in ratione arcûs totius & partim in ejus ratione duplicatâ: & contrà. Eadem erit lex & ratio resistente pro velocitate, quæ est differentiæ illius pro longitudine arcûs.

Corol. 5. Ideoque si Pendulo inæquales arcus successivè describente inveniri potest ratio incrementi ac decrementi differentiæ hujus pro longitudine arcûs descripti; habebitur etiam ratio incrementi ac decrementi resistentiæ pro velocitate majore vel minore.

Scholium Generale.

Ex his Propositionibus, per oscillationes Pendulorum in Mediis quibuscunque, invenire licet resistentiam Mediorum. Aeris verò resistentiam investigavi per Experimenta sequentia.

Globum ligneum pondere unciarum *Romanarum* $57\frac{7}{22}$, diametro digitorum *Londinensium* $6\frac{7}{8}$ fabricatum, filo tenui ab unco satis firmo suspendi; ita ut inter uncum & centrum oscillationis Globi distantia esset pedum $10\frac{1}{2}$. In filo punctum notavi pedibus decem & unciâ unâ à centro suspensionis distans; & è regione puncti illius collocavi Regulam, in digitos distinctam, quorum ope notarum longitudines arcuum à Pendulo descriptas. Deinde numeravi oscillationes, quibus Globus octavam motûs sui partem amitteret. Si Pendulum deducebatur à perpendiculo ad distantiam duorum digitorum, & inde demittebatur; ita ut toto suo descensu describeret arcum duorum digitorum, totâque oscillatione primâ, ex descensu & ascensu subsequente compositâ, arcum digitorum ferè quatuor: idem oscillationibus 164 amisit octavam motûs sui partem; sic ut, ultimo suo ascensu, describeret arcum digiti unius cum tribus partibus quartis digiti. Si primo descensu descripsit arcum digitorum quatuor; amisit octavam motûs partem oscillationibus 121; ita ut, ascensu ultimo, describeret arcum digitorum $3\frac{1}{2}$. Si primo descensu descripsit arcum digitorum octo, sexdecim, triginta duorum vel sexaginta quatuor; amisit octavam motûs partem oscillationibus 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$, respectivè. Igitur differentia inter arcus descensu primo & ascensu ultimo descriptos erat in casu primo, secundo, tertio, quarto, quinto, sexto, digitorum $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 respectivè. Dividantur eæ differentiæ per numerum oscillationum in casu unoquoque, & in oscillatione unâ mediocri, quâ arcus digitorum $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60,

DE MOTU CORPORUM

60, 120 descriptus fuit, differentia arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum erit $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{24}{29}$ partes digiti respectivè. Hæ autem in majoribus oscillationibus sunt in duplicatâ

(l) NEQUE tamen universè illud videtur obtinere, ut quo majores sint oscillationes, eò propiùs vires renixùs duplicatam attingant velocitatum rationem. Nam cùm arcuum differentiæ fuerint quales à Newtono sunt descriptæ, si omnes ordine à primâ dividantur, numeri à divisione oriundi, earum omnium inter se & ad primam rationes exhibebunt. Atqui hi sunt numeri à divisione oriundi

1 2,71 9,507 36,96 141,84 543

Motu igitur corporis penduli ad Cycloidem redacto, quâ ratione Newtonus mox dicturus est, vires renixûs, quales in mediis arcuum Cycloideos punctis fuissent, si per tales arcus corpus pendulum latum esset, eas inter se rationes habuissent, quas hi numeri præ se ferunt; arcus autem ipsi Cycloideos eandem inter se rationem habuissent, quam circulares quos corpus pendulum centro oscillandi suo reverâ scribebat; quorum communis ratio minoris cujusque ad proximum, unitatis ad binarium erat. Velocitatum igitur, quibuscum in similibus arcuum illorum Cycloideos punctis corpus pendulum latum esset, et harum eadem inter ipsas communis ratio, unitatis ad binarium, fuisset. Velocitatum igitur illarum duplicata ratio unitatis ad quaternarium fuisset. Hæc cùm ita sint, quænam fuisset vis renixùs in medio arcûs cujusque Cycloidalis puncto, si ad eam, quæ in puncto medio arcûs proximè majoris regnâsset, rationem habuisset velocitatum duplicatam; & quânam sui parte vis renixûs, in medio arcûs cujusque minoris puncto, major fuisset quàm pro duplicatâ velocitatum ratione, ex sequenti numerorum descriptione quivis ut opinor intelligat

4 : 1 = 543 : 135,75	141,84	$\frac{6,1}{141,8} = \frac{1}{23}$
4 : 1 = 141,84 : 35,46	36,96	$\frac{1,5}{36,9} = \frac{1}{25}$
4 : 1 = 36,96 : 9,24	9,51	$\frac{,27}{9,51} = \frac{1}{35}$
4 : 1 = 9,51 : 2,37	2,71	$\frac{,34}{2,71} = \frac{1}{8}$
4 : 1 = 2,71 : 0,68	1	$\frac{,3}{1} = \frac{3}{10}$

Hic in maximis arcubus, minùs quidem quàm in mediis, servatam videre est inter vires renixûs duplicatam velocitatum rationem. A quâ quantum et in aliis Newtoni experimentis vires illæ abscesserint, haud inutile erit simili numerorum descriptione oculis subjecisse.

EXPERIMENTA IN GLOBO LIGNEO

Qui in AERE oscillabat donec pars QUARTA Motûs extincta erat.

Arcuum Differentiæ	$\frac{1}{748}$	$\frac{1}{272}$	$\frac{4}{325}$	$\frac{6}{125}$	$\frac{24}{125}$	$\frac{12}{17}$.
Differentiarum rationes	1	2,75	9,21	35,9	143,6	528.

Velocitatum communis ratio 1 : 2

4 : 1 = 528 : 132	143,6	$\frac{11,6}{143,6} = \frac{1}{12}$
4 : 1 = 143,6 : 35,9	35,9	0
4 : 1 = 35,9 : 8,97	9,21	$\frac{,24}{9,21} = \frac{1}{38}$
4 : 1 = 9,21 : 2,30	2,75	$\frac{,45}{2,75} = \frac{1}{6}$
4 : 1 = 2,75 : 0,69	1,	$\frac{,3}{1} = \frac{3}{10}$

EXPE-

LIBER SECUNDUS.

duplicatâ ratione arcuum descriptorum quàm proximè; in minoribus verò paulo majores quàm in eâ ratione; & propterea (per Corol. 2. Prop. XXXI. libri hujus) resistentia Globi, ubi celeriùs movetur, est in duplicatâ ratione velocitatis quàm proximè; ubi tardiùs, paulo major quàm in eâ ratione (l).

Designet jam V velocitatem maximam in oscillatione quâvis, sintque A, B, C quantitates datæ; & fingamus quòd differentia arcuum sint $AV+BV^{\frac{3}{2}}+CV^2$. Cùm velocitates maximæ sint, in Cycloide,

EXPERIMENTA IN GLOBO PLUMBEO

Qui in AERE oscillabat donec pars OCTAVA motûs extincta erat.

Arcuum Differentiæ	$\frac{1}{1808}$	$\frac{1}{912}$	$\frac{1}{386}$	$\frac{1}{140}$	$\frac{4}{181}$	$\frac{4}{53}$	$\frac{4}{15}$
Differentiarum rationes	1,	1,98	4,86	12,91	39,96	136,4	482,1

Velocitatum communis ratio 1 : 2

4 : 1 = 482,1 : 120,5	136,4	$\frac{15,9}{136,4} = \frac{10}{86}$
4 : 1 = 136,4 : 34,1	39,99	$\frac{5,9}{39,9} = \frac{1}{7}$
4 : 3 = 39,96 : 9,99	12,91	$\frac{3}{12,9} = \frac{1}{4,3}$
4 : 1 = 12,91 : 3,23	4,68	$\frac{1,45}{4,68} = \frac{1}{3,2}$
4 : 1 = 4,68 : 1,17	1,98	$\frac{,81}{1,98} = \frac{1}{2,4}$
4 : 1 = 1,98 : 0,49	1,	$\frac{,5}{1} = \frac{1}{2}$

EXPERIMENTA IN EODEM GLOBO PLUMBEO

Qui in AERE oscillabat donec pars QUARTA motûs extincta erat.

Arcuum Differentiæ	$\frac{1}{2040}$	$\frac{1}{1036}$	$\frac{1}{420}$	$\frac{1}{159}$	$\frac{1}{51}$	$\frac{8}{121}$	$\frac{8}{35}$.
Differentiarum rationes	1	1,97	4,86	12,83	40	134,9	466,3

Velocitatum communis ratio 1 : 2

4 : 1 = 466,3 : 116,6	134,9	$\frac{18,3}{134,9} = \frac{1}{7}$
4 : 1 = 134,9 : 33,5	40	$\frac{6,5}{40} = \frac{1}{6}$
4 : 1 = 40 : 10,	12,83	$\frac{2,8}{12,8} = \frac{1}{4,6}$
4 : 1 = 12,83 : 3,21	4,86	$\frac{1,65}{4,86} = \frac{1}{3}$
4 : 1 = 4,86 : 1,21	1,97	$\frac{,76}{1,97} = \frac{1}{2,6}$
4 : 1 = 1,97 : 0,49	1	$\frac{,5}{1} = \frac{1}{2}$

EXPE-

De Motu Corporum

cloide, ut ſemiſſes arcuum oſcillando deſcriptorum, in Circulo verò, ut ſemiſſium arcuum illorum chordæ; ideoque paribus arcubus majores ſint in Cycloide quàm in Circulo, in ratione ſemiſſium arcuum ad eorundem chordas; tempora autem in Circulo ſint majora quàm in Cycloide in velocitatis ratione reciprocâ; patet arcuum differentias (quæ ſunt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim) eaſdem fore quamproximè in utrâque Curvâ: deberent enim differentiæ illæ in Cycloide augeri, unà cum reſiſtentiâ, in duplicatâ circiter ratione arcûs ad chordam, ob velocitatem in ratione illâ ſimplici auctam; & diminui, unà cum quadrato temporis, in eâdem duplicatâ ratione. Itaque ut reductio fiat ad Cycloidem, eædem ſumendæ ſunt arcuum differentiæ, quæ fuerunt in Circulo obſervatæ; velocitates verò maximæ ponendæ

EXPERIMENTA IN GLOBO PLUMBEO MAJORE.

Qui in AERE oſcillabat donec pars QUARTA motûs extincta erat.

Arcuum differentiæ	$\frac{2}{535}$	$\frac{4}{287}$	$\frac{32}{171}$
Differentiarum rationes	1	3,73	50
Velocitatum rationes	1	2	8

16 : 1 = 50 : 3,125	3,73	$\frac{,6}{3,7} = \frac{1}{6}$
4 : 1 = 3,73 : 0,93	1,	$\frac{,07}{1} = \frac{1}{14}$

Mitto experimenta hujus Globi in Aquâ oſcillantis, propter errores ex vaſis anguſtiâ oriundos.

EXPERIMENTA IN GLOBO PLUMBEO MINORE

Qui in AQUA oſcillabat donec pars QUARTA motus extincta erat.

Arcuum Differentiæ	$\frac{5}{4976}$	$\frac{1}{424}$	$\frac{1}{136}$	$\frac{5}{212}$	$\frac{12}{145}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{32}{27}$
Differentiarum rationes	1	2,35	7,32	23,5	82,36	306,2	1179,5

Velocitatum communis ratio 1 : 2

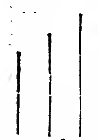
4 : 1 = 1179,5 : 294,9	306,2	$\frac{11,3}{306,2} = \frac{1}{27}$
4 : 1 = 306,2 : 76,55	82,36	$\frac{5,8}{82,4} = \frac{1}{15}$
4 : 1 = 82,36 : 20,59	23,5	$\frac{2,9}{23,5} = \frac{1}{8}$
4 : 1 = 23,5 : 5,87	7,32	$\frac{1,45}{7,32} = \frac{1}{5}$
4 : 1 = 7,32 : 1,83	2,35	$\frac{,52}{2,35} = \frac{1}{4,5}$
4 : 1 = 2,35 : 0,59	1	$\frac{,4}{1} = \frac{2}{3}$

ſunt

ſunt arcubus, vel dimidiatis vel integris, hoc eſt, numeris $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16 analogæ. Scribamus ergo in caſu ſecundo, quarto & ſexto numeros 1, 4 & 16 pro V; & prodibit arcuum differentia $\frac{\frac{1}{2}}{121} = A + B + C$ in caſu ſecundo; $\frac{2}{35\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$ in caſu quarto; & $\frac{8}{9\frac{2}{3}} = 16A + 14B + 256C$ in caſu ſexto. Et ex his æquationibus, per debitam collationem & reductionem analyticam, fit $A = 0,0000916$; $B = 0,0010847$; & $C = 0,0029558$. Eſt igitur differentia arcuum ut $0,0000916V + 0,0010847V^3 + 0,0029558V^2$: & propterea, cùm (per Corollarium Propoſitionis XXX. applicatum ad hunc caſum) reſiſtentia Globi, in medio arcûs oſcillando deſcripti, ubi velocitas eſt V, ſit ad ipſius pondus ut $\frac{7}{11}AV + \frac{7}{10}BV^3$ (m) $+ \frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem Penduli; ſi pro A, B & C ſcribantur

Liber Secundus.

(m) NIMIRUM vis renixûs, quam literâ R ſignificare liceat, trifariam intelligatur diſtribui, ſive ex tribus viribus conflari, quas ſingulatim literis r, r, ϱ ſignificabimus; ut ſit $R = r + r + \varrho$. Harum trium partium, ex quibus vis tota R conflata eſt, prima r talis ſit, quæ ſimplici ſemper velocitatis corporis penduli rationi reſpondeat; ultima ϱ rationem velocitatis duplicatam ſervet; media r rationem illam quæ ſimplicis & duplicatæ velocitatis media eſt, quam Newtonus ſeſquiplicatam vocare ſolet. Vel ut clariùs dicamus, ſi ſint V, V^2 duæ rectæ eâ lege mutabiles, ut illa V ſimplicem velocitatis rationem, illa V^2 duplicatam ſemper gerat; ſit alia $V^{\frac{3}{2}}$ eâ lege mutabilis, ut duarum V, V^2 proportione ſemper media ſit. Et tales ponantur vires r, r, ϱ, ut illa r rectæ V, illa r rectæ $V^{\frac{3}{2}}$, illa ϱ rectæ V^2 ſemper rationem ſervet. Similiter arcuum, qui à corpore pendulo deſcendendo & aſcendendo ſcripti fuerint, horum differentia à vi renixûs oriunda, quam literâ D ſignificabimus, in partes tres d, d, δ diſtribui cogitetur, à tribus viribus r, r, ϱ ſingulatim oriundas. Ut ſit $D = d + d + \delta$. Ponatur autem $d = AV$, $d = BV^{\frac{3}{2}}$, $\delta = CV^2$. Unde efficietur id quod Newtonus poni juſſit, $D = AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2$. Et pro D & V numeris, quos experimenta è memoratis ſecundum, quartum, & ſextum monſtrant, ordine ſubſtitutis, venient literarum A, B, C æſtimationes illæ, quas Newtonus protulit.



V $V^{\frac{3}{2}}$ V^2

Jam verò cùm in puncto medio arcûs, quem corpus quodpiam pendulum ſcribat, vis renixûs ſit ad corporis pondus ut recta OV (in fig. Prop. XXX.) ad longitudinem fili quo corpus ſuſpenſum eſt; cùm præterea, ſi talis ponatur vis renixûs quæ ſimplici velocitatum rationi uſque reſpondeat, ea erit OV quæ ad arcuum, qui deſcendendo & aſcendendo confecti fuerint, differentiam rationem habeat quam 7 ad 11 (per Cor. Prop. XXX.). Hæc cùm ita ſint, ſi figura Propoſitionis XXX. ad vim r accommodata fuerit, erit $OV = \frac{7}{11}d$. Ac proinde ea fuerit vis r, in puncto arcûs ſcripti medio, quæ ad corporis penduli pondus rationem habuerit, quam $\frac{7}{11}d$, ſive $\frac{7}{11}AV$ ad L (ſignificante literâ L longitudinem fili, quo corpus ſuſpenſum erat).

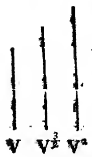
At verò ſi talis ſit vis renixûs, quæ duplicatam velocitatis rationem ſervet, OV ea erit quæ ad arcuum, qui deſcendendo & aſcendendo confecti fuerint, differentiam rationem habeat quam 3 ad 4. Quare ſi figura Prop. XXX. ad vim ϱ accommodata fuerit, erit $OV = \frac{3}{4}\delta$. Ac proinde ea fuerit vis ϱ, in medio arcûs confecti puncto, quæ ad corporis penduli pondus rationem habeat quam $\frac{3}{4}\delta$ ſive $\frac{3}{4}CV^2$ ad L.

Rurſum cùm proportio rectæ OV ad Aa, ſive quantitas $\frac{OV}{Aa}$, à lege vis renixûs omnino pendeat; et cùm lex illa, quæ ſimplicem inter vires illas velocitatum conſtituat rationem, illam $\frac{OV}{Aa}$ huic $\frac{7}{11}$ æqualem efficiet; altera verò lex, quæ duplicatam velocitatum rationem viribus renixûs inducat, illam

bantur numeri inventi, fiet resistentia Globi ad ejus pondus, ut $0{,}0000583V + 0{,}0007593V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0022169V^2$ ad longitudinem Penduli inter centrum suspensionis & Regulam; id est, ad 121 digitos. Unde cùm V in casu secundo designet 1, in quarto 4, in sexto 16: erit resistentia ad pondus Globi in casu secundo ut 0,0030345 ad 121, in quarto ut 0,041748 (n) ad 121, in sexto ut 0,61705 ad 121.

Arcus, quem punctum in filo notatum in casu sexto descripsit, erat $120 - \frac{8}{9\frac{2}{3}}$, seu $119\frac{5}{29}$ digitorum (o). Et propterea, cùm radius esset 121 digitorum, & longitudo Penduli inter punctum suspensionis & centrum Globi esset 126 digitorum; arcus, quem centrum globi descripsit, erat $124\frac{3}{31}$ (p) digitorum. Quoniam corporis oscillantis velocitas maxima, ob resistentiam Aëris, non incidit in punctum infimum arcûs descripti, sed in medio ferè loco arcûs totius versatur: hæc eadem erit circiter, ac si Globus, descensu suo toto in Medio non resistente, describeret arcûs illius partem dimidiam digitorum $62\frac{3}{62}$ (q), idque in Cycloide, ad quam motum Penduli suprà reduximus: & propterea velocitas illa æqualis erit velocitati, quam Globus, perpendiculariter cadendo & casu suo describendo altitudinem arcûs illius sinui verso æqualem, acquirere posset. Est autem sinus ille versus in Cycloide ad arcum istum $62\frac{3}{62}$ ut arcus idem ad Penduli longitudinem duplam 252, & propterea æqualis digitis 15,278 (r). Quare velocitas ea ipsa est, quam corpus cadendo, & casu suo spatium 15,278 (r) digitorum

illam $\frac{OV}{Aa}$ huic $\frac{3}{4}$ æqualem reddat: certè lex priorum geometricè quasi intermedia, quæ viribus renixûs rationem simplicis & duplicatæ velocitatum mediam induxerit, hæc illam $\frac{OV}{Aa}$ talem præstiterit, quæ earum, quas priores renixûs leges dabant, geometricâ ratione quasi media sit. (Id quod Emersonus ad locum rectè monuit.) Sed quantitatum $\frac{7}{11}$, $\frac{3}{4}$, quas leges priores dabant, est $\frac{7}{10}$ geometricâ ratione quasi media. Quare si figura Propositionis XXX. ad vim r accommodetur, erit $\frac{OV}{Aa}$ sive $\frac{OV}{d} = \frac{7}{10}$, sive $OV = \frac{7}{10}d$. Ac proinde ea fuerit vis r, in puncto medio arcûs oscillando confecti, quæ ad pondus corporis penduli rationem habeat quam $\frac{7}{10}d$, sive $\frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}}$, ad L.



Cùm igitur in medio puncto arcûs, oscillando confecti, ea fuerit vis r, quæ ad pondus corporis penduli rationem habeat quam $\frac{7}{11}AV$ ad L: ea autem vis r quæ ad pondus corporis penduli rationem habeat quam $\frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}}$ ad L: ea denique vis ρ quæ ad pondus corporis penduli rationem habeat quam $\frac{3}{4}CV^2$ ad L: idcirco ea fuerit vis R, è tribus r, r, ρ conflata, in puncto illo oscillationis medio, quæ ad pondus corporis penduli rationem habeat quam $\frac{7}{11}AV + \frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}CV^2$ ad L,

gitorum describendo acquirere posset. Tali igitur cum velocitate Globus resistentiam patitur, quæ sit ad ejus pondus ut 0,61705 ad 121, vel (si resistentiæ pars illa sola spectetur quæ est in velocitatis ratione duplicatâ) ut 0,56752 ad 121.

Experimento autem hydrostatico inveni, quòd pondus Globi hujus lignei esset ad pondus Globi aquei magnitudinis ejusdem ut 55 ad 97: & propterea cùm 121 sit ad 213,4 in eâdem ratione, erit resistentia Globi aquei, præfatâ cum velocitate progredientis, ad ipsius pondus ut 0,56752 ad 213,4, id est, ut 1 ad $376\frac{1}{50}$ (s). Unde cùm pondus Globi aquei, quo tempore Globus cum velocitate uniformiter continuatâ describat longitudinem digitorum 30,556 (t), velocitatem illam omnem in Globo cadente generare posset; manifestum est, quòd vis resistentiæ eodem tempore uniformiter continuata tollere posset velocitatem minorem in ratione 1 ad $376\frac{1}{50}$ (s), hoc est, velocitatis totius partem $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$ (s). Et propterea, quo tempore Globus, eâ cum velocitate uniformiter continuatâ, longitudinem semidiametri suæ, seu digitorum $3\frac{7}{16}$, describere posset, eodem amitteret motûs sui partem $\frac{1}{3342}$ (u).

Numerabam etiam oscillationes, quibus Pendulum quartam motûs sui partem amisit. In sequente Tabulâ numeri supremi denotant longitudinem arcûs descensu primo descripti, in digitis & partibus digiti expressam: numeri medii significant longitudinem arcûs ascensu ultimo descripti; & loco infimo stant numeri oscillationum. Experimentum descripsi tanquam magis accura-

L, longitudinem fili quo corpus suspensum erat. (El. V. 24.) Q. E. D.

(n) Lege 0,041778, sicut rectè emendavit etiam Emersonus.

(o) ERAT ut opinor arcus digitorum 120, ne minimâ quidem parte major vel minor; si, quod Newtonus voluisse videtur, media ejus longitudo maximam inter minimamque sumenda sit. Cùm enim arcus, quos corpus pendulum motu suo, ob aëris renixum sensim languescente, scribebat, seriem quandam arithmeticam constituerint, datâ longitudine ($\frac{24}{29}$ dig.) usque minuentes, media omnium longitudo maximæ minimæque simul sumptarum semissis fuerit. At verò arcus descensûs primi in experimento è memoratis sexto erat digitorum 64. Arcus igitur ascensûs primi partibus $\frac{24}{29}$ unius digiti contractior. Unde arcus totus primus, idemque maximus, $128 - \frac{24}{29}$. Rursum arcus ascensûs ultimi erat digitorum 56. Arcus igitur descensûs ultimi partibus $\frac{24}{29}$ unius digiti longior. Arcus igitur totus ultimus, idemque minimus, $112 + \frac{24}{29}$. Primi igitur ultimique summa $128 - \frac{24}{29} + 112 + \frac{24}{29} = 240$. Atque hujus semissis = 120.

(p) 124,958.

(q) 62,479.

(r) 15,490.

(s) Lege $376\frac{1}{500}$.

(t) 30,9814.

(u) $\frac{1}{3340}$.

tum,

tum, quàm cùm motûs pars tantùm octava amitteretur. Calculum tentet qui volet (x).

Descensus primus	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oscillat.	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$

Postea Globum plumbeum, diametro digitorum 2, & pondere unciarum *Romanarum* $26\frac{1}{4}$ suspendi filo eodem; sic ut inter centrum Globi & punctum suspensionis intervallum esset pedum $10\frac{1}{2}$, & numerabam oscillationes quibus data motûs pars amitteretur. Tabularum subsequentium prior exhibet numerum oscillationum, quibus pars octava motûs totius cessavit; secunda numerum oscillationum, quibus ejusdem pars quarta amissa fuit.

Descensus primus	1	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
Numerus Oscillat.	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30

Descensus primus	1	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oscillat.	510	518	420	318	204	121	70

In Tabulâ priore, seligendo ex observationibus tertiam, quintam & septimam, & exponendo velocitates maximas in his observationibus particulatim per numeros 1, 4, 6 respectivè, & generaliter per quantitatem V ut suprà: emerget in observatione tertiâ

(x) Nobis autem tentantibus exitus operis hujusmodi fuit; computatione utique super experimento secundo cum quarto & sexto institutâ

A = 0,0005098. B = 0,0005881. C = 0,0025785. Unde

	In Exp. 2.	In Exp. 4.	In Exp. 6.
r	0,0003244	0,0012976	0,0051904
r	0,0004117	0,0032936	0,0263488
ρ	0,0019340	0,0309440	0,4951040
R	0,0026701	0,0355352	0,5266432

Igitur in experimento sexto pars illa vis renixûs, quæ duplicatam velocitatis rationem servabat, erat ad pondus corporis penduli ut 0,495104 ad 121.

Longitudo autem arcûs, quem fili punctum illud scripsit cujus è regione Regula collocata est, digitorum erat 112. (Vide Not. °.)

Duplus sinus versus dimidii arcûs cycloidalis, quem globus centro oscillandi scripsisset = 26,988.

Motus globo aqueo amittendus, qui diametrum lignei Newtoniani æqualis esset, quo tempore cum velocitate æquabili, quam spatium digitorum 13,494 rectâ cadendo vi proprii ponderis adeptus esset, spatium casûs illius duplum, 26,988, confecisset; motus, inquam, hoc tempore globo aqueo amittendus pars esset $\frac{1}{431}$ totius.

Motus tali globo aqueo amittendus, quo tempore eâdem cum velocitate semidiametrum suam confecisset, pars esset $\frac{1}{3384}$ totius.

Illud

tertiâ $\frac{1}{193} = A + B + C$; in quintâ $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$; in septimâ $\frac{8}{30} = 16A + 64B + 256C$. Hæ verò æquationes reductæ dant $A = 0{,}001414$; $B = 0{,}000297$; $C = 0{,}000879$. Et inde prodit resistentia Globi, cum velocitate V moti, in eâ ratione ad pondus suum unciarum $26\frac{1}{4}$, quam habet $0{,}0009V + 0{,}000208V^{\frac{3}{2}} + 0{,}000659V^2$ ad Penduli longitudinem 121 digitorum. Et si spectemus eam solummodo resistentiæ partem, quæ est in duplicatâ ratione velocitatis; hæc erit ad pondus globi ut $0{,}000659V^2$ ad 121 digitos. Erat autem hæc pars resistentiæ, in experimento primo, ad pondus Globi lignei unciarum $57\frac{7}{22}$ ut $0{,}002217V^2$ ad 121: & inde fit resistentia Globi lignei ad resistentiam Globi plumbei (paribus eorum velocitatibus) ut $57\frac{7}{22}$ in 0,002217 ad $26\frac{1}{4}$ in 0,000659, id est, ut $7\frac{1}{3}$ ad 1. Diametri Globorum duorum erant $6\frac{7}{8}$ & 2 digitorum, & harum quadrata sunt ad invicem ut $47\frac{1}{4}$ & 4, seu $11\frac{13}{16}$ & 1 quamproximè. Ergo resistentiæ Globorum æquivelocium erant in minore ratione quàm duplicatâ diametrorum. At nondum consideravimus resistentiam fili, quæ certè permagna erat, ac de Pendulorum inventâ resistentiâ subduci debet. Hanc accuratè definire non potui, sed majorem tamen inveni quàm partem tertiam resistentiæ totius minoris Penduli; & inde didici; quòd resistentiæ Globorum, demptâ fili resistentiâ, sunt quàm proximè in duplicatâ ratione diametrorum. Nam ratio $7\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ ad $1 - \frac{1}{3}$, seu $10\frac{1}{2}$ ad 1, non longè abest à diametrorum ratione duplicatâ, $11\frac{13}{16}$ ad 1 (y).

Illud autem hâc in re minimè prætereundum judico, quod nequeo non mirari à Newtono prætermissum: computationem, si in experimento primo, cum tertio & quinto, sive horum, sive eorum quæ antè memorata sunt, similem ad modum instituta fuerit, coefficientem B negativum promere. Nec aliter eveniet, in experimentis illis quæ in Globo plumbeo minore in Aere oscillante facta sunt, si in primo, cum tertio & quinto, vel in secundo, cum quarto et sexto utriusque eorum classis, computatio peracta fuerit.

(y) Quod si in experimento tertio, cum quinto et septimo, secundæ classis eorum quæ in hoc globo facta sunt, similis computatio instituatur, veniet $A = 0{,}0013066$. $B = 0{,}0003508$. $C = 0{,}0007235$. Unde vis renixûs, in puncto arcûs cujusque medio, ad pondus hujus globi rationem habuerit quam $0{,}0008316V + 0{,}0002457V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0005427V^2$ ad 121. Et pars ea hujus vis, quæ rationem velocitatis duplicatam servaverit, sive pars ρ, ea fuerit ad pondus globi ut $0{,}0005427V^2$ ad 121 Sed in Globo ligneo, ex experimento 2°, 4°, et 6° eorum in quibus pars quarta motûs extinguebatur, eam invenimus vis ρ ad pondus globi lignei rationem, quæ est $0{,}001934V^2$ ad 121. (Vide Not. x.) Æquatis igitur globorum velocitatibus, efficietur vis ρ in globo ligneo ad vim ρ in globo plumbeo ut $0{,}001934 \times 57\frac{7}{22}$ ad $0{,}0005427 \times 26\frac{1}{4}$; hoc est ut 7,7914 ad 1. Vel ablatâ utrinque parte illâ renixûs, quæ filo tribuenda erat, ut $7{,}7914 - \frac{1}{3}$ ad $1 - \frac{1}{3}$, hoc est ut 7,46 ad $\frac{2}{3}$; vel ut 22,38 ad 2; vel ut 11,19 ad 1. Sed ratio 11,19 ad 1 à ratione duplicatâ diametrorum $11\frac{13}{16}$, sive 11,8125 ad 1, haud longè abest.

3 Cùm

Cùm resistentia fili in Globis majoribus minoris sit momenti, tentavi etiam experimentum in Globo, cujus diameter erat $18\frac{3}{4}$ digitorum. Longitudo Penduli, inter punctum suspensionis & centrum oscillationis, erat digitorum $122\frac{1}{2}$; inter punctum suspensionis & nodum in filo $109\frac{1}{2}$ dig. Arcus primo Penduli descensu à nodo descriptus 32 dig. Arcus ascensu ultimo, post oscillationes quinque (z), ab eodem nodo descriptus 28 dig. Summa arcuum, seu arcus totus oscillatione mediocri descriptus, 60 dig. Differentia arcuum 4 dig. Ejus pars decima, seu differentia inter descensum & ascensum in oscillatione mediocri, $\frac{2}{5}$ dig. Ut radius $109\frac{1}{2}$ ad radium $122\frac{1}{2}$, ita arcus totus 60 dig. oscillatione mediocri à nodo descriptus ad arcum totum $67\frac{1}{8}$ dig. oscillatione mediocri à centro Globi descriptum; & ita differentia $\frac{2}{5}$ ad differentiam novam 0,4475. Si longitudo Penduli, manente longitudine arcûs descripti, augeretur in ratione 126 ad $122\frac{1}{2}$; tempus oscillationis augeretur, & velocitas Penduli diminueretur in ratione illâ subduplicatâ; maneret verò arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum differentia 0,4475. Deinde si arcus descriptus augeretur in ratione $124\frac{3}{31}$ (aa) ad $67\frac{1}{8}$, differentia ista 0,4475 augeretur in duplicatâ illâ ratione, ideoque evaderet 1,5295 (bb). Hæc ita se haberent, ex hypothesi quòd resistentia Penduli esset in duplicatâ ratione velocitatis. Ergo si Pendulum describeret arcum totum $124\frac{3}{31}$ (aa) digitorum, & longitudo ejus inter punctum suspensionis & centrum oscillationis esset 126 digitorum, differentia arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum foret 1,5295 digitorum (bb). Et hæc differentia ducta in pondus Globi penduli, quod erat unciarum 208, producit 318,136 (cc). Rursus, ubi Pendulum superius ex globo ligneo constructum, centro oscillationis, quod à puncto suspensionis digitos 126 distabat, describebat arcum totum $124\frac{3}{31}$ (dd) digitorum; differentia arcuum descensu & ascensu descriptorum fuit $\frac{126}{121}$ in $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$ (ee); quæ ducta in pondus globi, quod erat unciarum $57\frac{7}{22}$, producit 49,396. Duxi autem differentias hasce in pondera Globorum, ut invenirem eorum resistentias. Nam differentiæ oriuntur ex resistentiis, suntque ut resistentiæ directè & pondera inversè*. Sunt igitur resistentiæ ut numeri 318,136 & 49,396 (ff). Pars autem resistentiæ Globi minoris, quæ est in duplicatâ ratione velocitatis, erat ad resistentiam totam ut 0,56752 ad 0,61675 (gg), id est, ut 45,453 ad 49,396 (hh); & pars resistentiæ Globi majoris propemodum æquatur ipsius resistentiæ toti; ideoque partes illæ sunt ut 318,136 & 45,453 quamproximè (ii), id est, ut 7 & 1 (kk). Sunt autem Globorum diametri $18\frac{3}{4}$ & $6\frac{7}{8}$; & harum quadrata $351\frac{9}{16}$ & $47\frac{17}{64}$ sunt ut 7,438 & 1, id est, ut Globorum resistentiæ 7 & 1 quamproximè. Differentia rationum haud major est, quàm quæ ex fili resistentiâ oriri potuit. Igitur resistentiarum partes illæ quæ sunt, paribus Globis, ut quadrata velocitatum; sunt etiam, paribus velocitatibus, ut quadrata diametrorum Globorum.

(z) Legendum omnino *Decem*. Id quod ad locum Emersonus rectè monuit.

(aa) 124,958. Vide Not. p.

(bb) 1,5508+.

(cc) 1,5508+ × 208 = 322,575.

(dd) Vide aa.

(ee) Talem enim arcum scribebat Globus ligneus minor, in experimento sexto eorum quæ omnium prima memorata sunt.

* Nimirum in datâ fili longitudine.

(ff) Ut numeri 322,575 & 49,396 (vide Not. cc.)

(gg) Ut 0,56752 ad 0,61705. Vide suprà.

(hh) Ut 45,431 ad 49,396.

(ii) Ut 322,575 & 45,431 quam proximè.

Cæterùm Globorum, quibus usus sum in his experimentis, maximus non erat perfectè sphæricus, & propterea in calculo hic allato minutias quasdam, brevitatis gratiâ, neglexi; de calculo accurato in experimento non satis accurato minimè sollicitus. Optârim itaque, cùm demonstratio Vacui ex his dependeat, ut experimenta cum Globis & pluribus & majoribus & magis accuratis tentarentur. Si Globi sumantur in proportione geometricâ, puta quorum diametri sint digitorum 4, 8, 16, 32; ex progressione experimentorum colligetur quid in Globis adhuc majoribus evenire debeat.

(kk) —*ut* 7,1 *ad* 1] Nec alia veniet ratio, si hoc idem experimentum, in Globo ligneo majore, conferatur cum sexto secundæ classis eorum, quæ in ligneo minore facta sunt; quæ cùm facillimè ad hunc modum conferatur. Arcus, quem globus minor, centro suo oscillandi, in sexto illo experimento, scribebat, digitorum erat $\frac{126}{121}112$; hoc est 116,628. Inveniatur igitur numerus (280,998) ad quem numerus ille antè inventus 322,575 rationem habeat duplicatam ejus quam 124,958 ad 116,628. Tum inveniatur numerus (42,132) ad quem numerus 49,396 rationem habeat quam $\frac{24}{29}$ ad $\frac{12}{17}$. Vires renixûs fuerint ut numeri 280,998; 42,132. Sed in experimento illo, de quo agitur, in globo minore, sexto utique secundæ classis eorum quæ in illo factæ sunt, vis tota R ad partem ρ erat ut 0,5266432 ad 0,495104 (vid. Not. .) Et 0,5266432 : 0,495104 = 42,132 : 39,609. Et in Globo majore pars ρ toti R tantùm non æqualis erat. Vires igitur renixûs in globos ligneos, quâ parte utraque duplicatæ velocitatis rationi responderit, fuerint inter se ut numeri 280,998; 36,609. Sed 280,998 : 36,609 = 7,1 : 1.

sionis

JAM

Jam verò conferendo resistentias diversorum Fluidorum inter se tentavi sequentia. Arcam ligneam paravi longitudine pedum quatuor, latitudine & altitudine pedis unius. Hanc operculo nudatam implevi aquâ fontanâ; fecique ut immersa Pendula in Medio aquæ oscillando moverentur. Globus autem plumbeus pondere $166\frac{1}{6}$ unciarum, diametro $3\frac{5}{8}$ digitorum movebatur ut in Tabulâ sequente descripsimus; existente videlicet longitudine Penduli à puncto suspensionis ad punctum quoddam in filo notatum 126 digitorum, ad oscillationis autem centrum $134\frac{3}{8}$ digitorum.

Arcus descensu primo à puncto in filo notato descriptus, digitorum	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus ascensu ultimo descriptus, digitorum	48	24	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum differentia, motui amisso proportionalis, digitorum	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oscillationum in aquâ			$\frac{29}{60}$	$1\frac{1}{5}$	3	7	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$
Numerus Oscillationum in aere	$85\frac{1}{2}$		287	535					

In experimento columnæ quartæ, motus æquales oscillationibus 535 in Aere, & $1\frac{1}{5}$ in Aquâ amissi sunt. Erant quidem oscillationes in Aere paulo celeriores quàm in Aquâ. At si oscillationes in aquâ in eâ ratione accelerarentur, ut motus Pendulorum in Medio utroque fierent æquiveloces, maneret numerus idem oscillationum $1\frac{1}{5}$ in aquâ, quibus motus idem ac priùs amitteretur; ob resistentiam auctam, & simul quadratum temporis diminutum, in eâdem ratione illâ duplicatâ. Paribus igitur Pendulorum velocitatibus, motus æquales in Aere oscillationibus 535 & in Aquâ oscillationibus $1\frac{1}{5}$ amissi sunt; ideoque resistentia Penduli in Aquâ est ad ejus resistentiam in Aere ut 535 ad $1\frac{1}{5}$. Hæc est proportio resistentiarum totarum in casu columnæ quartæ.

Designet jam $AV+CV^2$ differentiam arcuum, in descensu & subsequente ascensu descriptorum, à Globo in Aere cum velocitate maximâ V moto; & cùm velocitas maxima in casu columnæ quartæ sit ad velocitatem maximam in casu columnæ primæ, ut 1 ad 8; & differentia illa arcuum in casu columnæ quartæ ad differentiam in casu columnæ primæ ut $\frac{2}{535}$ ad $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, seu ut $85\frac{1}{2}$ ad 4280: scribamus

(ll) Sed ad partem illam vis renixûs in aere definiendam, quæ duplicatam velocitatis rationem servaverit,

bamus in his casibus 1 & 8 pro velocitatibus, atque $85\frac{1}{2}$ & 4280 pro differentiis arcuum, & fiet $A+C=85\frac{1}{2}$; & $8A+64C=4280$; seu $A+8C=535$; indeque per reductionem æquationum proveniet $7C=449\frac{1}{2}$; & $C=64\frac{3}{14}$; & $A=21\frac{2}{7}$: atque ideo resistentia, cùm sit ut $\frac{7}{11}AV+\frac{3}{4}CV^2$, erit ut $13\frac{6}{11}V+48\frac{9}{56}V^2$. Quare in casu columnæ quartæ, ubi velocitas erat 1, resistentia tota est ad partem suam quadrato velocitatis proportionalem, ut $13\frac{6}{11}+48\frac{9}{56}$, seu $61\frac{12}{17}$, ad $48\frac{9}{56}$; & idcirco resistentia Penduli in Aquâ est ad resistentiæ partem illam in Aere, quæ quadrato velocitatis proportionalis est, quæque sola in motibus velocioribus consideranda venit, ut $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$ & 535 ad $1\frac{1}{5}$ conjunctim; id est, ut 571 ad 1 (ll). Si Penduli in Aquâ oscillantis filum totum fuisset immersum, resistentia ejus fuisset adhuc major; adeo ut Penduli in Aquâ oscillantis resistentia illa, quæ velocitatis quadrato proportionalis est, quæque sola in corporibus velocioribus consideranda venit, sit ad resistentiam ejusdem Penduli totius, eâdem cum velocitate in Aere oscillantis, ut 850 ad 1 circiter; hoc est, ut densitas Aquæ ad densitatem Aeris quàm proximè.

In hoc calculo sumi quoque deberet pars illa resistentiæ Penduli in Aquâ, quæ esset ut quadratum velocitatis, sed (quod mirum fortè videatur) resistentia in aquâ augebatur in ratione velocitatis plusquam duplicatâ. Ejus rei causam investigando, in hanc incidi; quòd arca nimis angusta esset pro magnitudine Globi penduli, & motum aquæ cedentis, præ angustiâ suâ nimis impediebat. Nam si Globus pendulus, cujus diameter erat digiti unius, immergeretur; resistentia augebatur in duplicatâ ratione velocitatis quàm proximè. Id tentabam construendo Pendulum ex Globis duobus, quorum inferior & minor oscillaretur in Aquâ, superior & major proximè supra aquam filo affixus esset; &, in Aere oscillando, adjuvaret motum Penduli, eumque diuturniorem redderet. Experimenta autem hoc modo instituta se habebant ut in Tabulâ sequente describitur.

servaverit, cur non hic ut antè Newtonus posuit $AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2 = D$? Nempè si posuisset, ex tribus illis quæ in Aere facta sunt experimentis, coefficiens A negativus prodiisset.

Arcus deſcenſu primo deſcriptus	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus aſcenſu ultimo deſcriptus	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum diff. motui amiſſo proport.	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oſcillationum	$3\frac{3}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{12}$	$21\frac{1}{5}$	34	53	$62\frac{1}{5}$

Conferendo reſiſtentias Mediorum inter ſe, effeci etiam ut Pendula ferrea oſcillarentur in argento vivo. Longitudo fili ferrei erat pedum quaſi trium, & diameter Globi penduli quaſi tertia pars digiti. Ad filum autem proximè ſupra mercurium affixus erat Globus alius plumbeus ſatis magnus ad motum Penduli diutiùs continuandum. Tum vaſculum, quod capiebat quaſi libras tres argenti vivi, implebam vicibus alternis argento vivo & aquâ communi; ut, pendulo in Fluido utroque ſucceſſivè oſcillante, invenirem proportionem reſiſtentiarum: & prodiit reſiſtentia argenti vivi ad reſiſtentiam aquæ ut 13 vel 14 ad 1 circiter: id eſt, ut denſitas argenti vivi ad denſitatem aquæ. Ubi Globum pendulum paulo majorem adhibebam, puta cujus diameter eſſet quaſi $\frac{1}{3}$ vel $\frac{2}{3}$ partes digiti, prodibat reſiſtentia argenti vivi in eâ ratione ad reſiſtentiam aquæ, quam habet numerus 12 vel 10 ad 1 circiter. Sed experimento priori magis fidendum eſt, propterea quòd in his ultimis vas nimis anguſtum fuit pro magnitudine Globi immerſi. Ampliato Globo, deberet etiam Vas ampliari. Conſtitueram quidem hujuſmodi experimenta in vaſis majoribus, & in liquoribus tum Metallorum fuſorum, tum aliis quibuſdam, tam calidis quàm frigidis, repetere: ſed omnia experiri non vacat, & ex jam deſcriptis ſatis liquet reſiſtentiam corporum, celeriter motorum, denſitati Fluidorum, in quibus moventur, proportionalem eſſe quàm proximè. Non dico accuratè. Nam Fluida tenaciora, pari denſitate, proculdubio magis reſiſtunt quàm liquidiora; ut Oleum frigidum quàm calidum, calidum quàm Aqua pluvialis, Aqua quàm Spiritus Vini. Verùm in liquoribus, qui ad ſenſum ſatis fluidi ſunt, ut in Aere, in Aquâ ſeu dulci ſeu ſalſâ, in Spiritibus

Vini,

(mm) EX EDITIONE PRIMA.

Hactenus experimentis uſi ſumus oſcillantium Pendulorum, eò quòd eorum motus faciliùs & accuratiùs obſervari, & menſurari poſſint. Motus autem Pendulorum in gyrum actorum, &, in orbem redeundo, circulos deſcribentium, propterea quòd ſint uniformes, & eo nomine ad inveſtigandam reſiſtentiam datæ velocitati competentem longè aptiores videantur, in conſilium eti-

am

Vini, Terebinthi & Salium, in Oleo à fæcibus per deſtillationem liberato & calefacto, Oleoque Vitrioli & Mercurio, ac Metallis liquefactis, & ſiqui ſint alii, qui tam fluidi ſunt, ut, in vaſis agitati, motum impreſſum diutiùs conſervent, effuſique liberrimè in guttas decurrendo reſolvantur; nullus dubito quin regula allata ſatis accuratè obtineat: præſertim ſi experimenta in corporibus pendulis & majoribus, & velociùs motis, inſtituantur (mm).

DENIQUE cùm nonnullorum opinio ſit, Medium quoddam æthereum & longè ſubtiliſſimum extare, quod omnes omnium corporum poros & meatus liberrimè permeet; à tali autem Medio, per corporum poros fluente, reſiſtentia oriri debeat: ut tentarem an reſiſtentia, quam in motis corporibus experimur, tota ſit in eorum externâ ſuperficie, an verò partes etiam internæ in ſuperficiebus propriis reſiſtentiam notabilem ſentiant, excogitavi experimentum tale. Filo, pedum undecim longitudinis, ab unco chalybeo ſatis firmo, mediante annulo chalybeo, ſuſpendebam pyxidem abiegnam rotundam, ad conſtituendum Pendulum longitudinis prædictæ. Uncus ſurſum præacutus erat acie concavâ, ut annulus, arcu ſuo ſuperiore acie annixus, liberrimè moveretur. Arcui autem inferiori annectebatur filum. Pendulum ita conſtitutum deducebam à perpendiculo ad diſtantiam quaſi pedum ſex, idque ſecundum planum aciei unci perpendiculare; ne annulus, oſcillante pendulo, ſupra aciem unci ultro citroque laberetur. Nam punctum ſuſpenſionis, in quo annulus uncum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accuratè notabam, ad quem deduxeram Pendulum; dein, Pendulo demiſſo, notabam alia tria loca, ad quæ redibat in fine oſcillationis primæ, ſecundæ ac tertiæ. Hoc repetebam ſæpiùs, ut loca illa quàm potui accuratiſſimè invenirem. Tum pyxidem plumbo & gravioribus, quæ ad manus erant, metallis implebam. Sed priùs ponderabam pyxidem vacuam, unà cum parte fili quæ circum pyxidem volvebatur, ac dimidio partis reliquæ, quæ inter uncum & pyxidem pen-

am adhibui. Faciendo enim ut Pendulum circulariter latum duodecies revolveretur, notavi magnitudines circulorum duorum, quos primâ & ultimâ revolutione deſcripſit. Et inde collegi velocitates corporis ſub initio & fine. Tum dicendo quòd corpus, velocitate mediocri deſcribendo circulos duodecim mediocres, amitteret velocitatum illarum differentiam, collegi reſiſtentiam, quâ differentia illa eo omni corporis per circulos duodecim itinere amitti poſſet; & reſiſtentia inventa, quanquam hujus generis experimenta minùs accuratè tentare licuit, probè tamen cum præcedentibus congruebat.

dulam

dulam tendebatur. Nam filum tenſum dimidio ponderis ſui Pendulum, à perpendiculo digreſſum, ſemper urget. Huic ponderi addebam pondus Aeris, quem pyxis capiebat. Et pondus totum erat quaſi pars ſeptuageſima octava pyxidis metallorum plenæ. Tum quoniam pyxis metallorum plena, pondere ſuo tendendo filum, augebat longitudinem Penduli, contrahebam filum, ut Penduli jam oſcillantis eadem eſſet longitudo ac priùs. Dein Pendulo ad locum primò notatum retracto ac demiſſo, numerabam oſcillationes quaſi ſeptuaginta & ſeptem, donec pyxis ad locum ſecundo notatum rediret; totidemque ſubinde donec pyxis ad locum tertiò notatum rediret, atque rurſus totidem donec pyxis reditu ſuo attingeret locum quartum. Unde concludo, quòd reſiſtentia tota pyxidis plenæ non majorem habebat proportionem ad reſiſtentiam pyxidis vacuæ quàm 78 ad 77. Nam ſi æquales eſſent ambarum reſiſtentiæ, pyxis plena, ob vim ſuam inſitam ſeptuagies & octies majorem vi inſitâ pyxidis vacuæ, motuum ſuum oſcillatorium tanto diutiùs conſervare deberet, atque ideo completis ſemper oſcillationibus 78 ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oſcillationibus 77.

Deſignet igitur A reſiſtentiam pyxidis in ipſius ſuperficie externâ, & B reſiſtentiam pyxidis vacuæ in partibus internis; & ſi reſiſtentiæ corporum æquivelocium in partibus internis ſint ut materia, ſeu numerus particularum quibus reſiſtitur, erit 78 B reſiſtentia pyxidis plenæ in ipſius partibus internis: ideoque pyxidis vacuæ reſiſtentia tota A+B erit ad pyxidis plenæ reſiſtentiam totam A+78 B ut 77 ad 78; & diviſim A+B ad 77 B, ut 77 ad 1, indeque A+B ad B ut 77×77 ad 1, & diviſim A ad B ut 5928 ad 1. Eſt igitur reſiſtentia pyxidis vacuæ, in partibus internis, quinquies millies minor quàm ejuſdem reſiſtentia in externâ ſuperficie, & ampliùs. Sic verò diſputamus ex hypotheſi quòd major illa reſiſtentia pyxidis plenæ non ab aliâ aliquâ cauſâ latente oriatur, ſed ab actione ſolâ Fluidi alicujus ſubtilis in metallum incluſum.

Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in quâ illud aliquando deſcripſeram, intercidit. Unde fractas quaſdam numerorum partes, quæ memoriâ exciderunt, omittere compulſus ſum. Nam omnia denuò tentare non vacat. Primâ vice, cùm unco infirmo uſus eſſem, pyxis plena citiùs retardabatur. Cauſam quærendo, reperi quòd uncus infirmus cedebat ponderi pyxidis, &, ejus oſcillationibus obſequendo, in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum ſuſpenſionis immotum maneret, & tunc omnia ita evenerunt uti ſuprà deſcripſimus.

SECTIO VII.

De Motu Fluidorum & Reſiſtentiâ Projectilium.

PROP. XXXII. THEOR. XXVI.

Si Corporum Syſtemata duo ſimilia ex æquali particularum numero conſtent, & particulæ correſpondentes ſimiles ſint & proportionales, ſingulæ in uno ſyſtemate ſingulis in altero, & ſimiliter ſitæ inter ſe, ac datam habeant rationem denſitatis ad invicem, & inter ſe temporibus proportionalibus ſimiliter moveri incipiant (eæ inter ſe quæ in uno ſunt ſyſtemate & eæ inter ſe quæ ſunt in altero) & ſi non tangant ſe mutuò quæ in eodem ſunt ſyſtemate, niſi in momentis reflexionum; neque attrahant, vel fugent ſe mutuò, niſi viribus acceleratricibus, quæ ſint ut particularum correſpondentium diametri inverſè & quadrata velocitatum directè: dico, quòd Syſtematum particulæ illæ pergent inter ſe, temporibus proportionalibus, ſimiliter moveri.

Corpora ſimilia & ſimiliter ſita temporibus proportionalibus inter ſe ſimiliter moveri dico, quorum ſitus ad invicem, in fine temporum illorum, ſemper ſunt ſimiles: puta ſi particulæ unius ſyſtematis cum alterius particulis correſpondentibus conferantur. Unde tempora erunt proportionalia, in quibus ſimiles & proportionales figurarum ſimilium partes à particulis correſpondentibus deſcribuntur. Igitur ſi duo ſint ejuſmodi Syſtemata, particulæ correſpondentes, ob ſimilitudinem incœptorum motuum, pergent ſimiliter moveri, uſque donec ſibi mutuò occurrant. Nam ſi nullis agitantur viribus, progredientur uniformiter in lineis rectis per motûs Leg. 1. Si viribus aliquibus ſe mutuò agitant, & vires illæ ſint ut particularum correſpondentium diametri inverſè &

& quadrata velocitatum directè; quoniam particularum ſitus ſunt ſimiles & vires proportionales, vires totæ quibus particulæ correſpondentes agitantur, ex viribus ſingulis agitantibus (per legum Corollarium ſecundum) compoſitæ, ſimiles habebunt determinationes, perinde ac ſi centra inter particulas ſimiliter ſita reſpicerent; & erunt vires illæ totæ ad invicem ut vires ſingulæ componentes, hoc eſt, ut correſpondentium particularum diametri inverſè, & quadrata velocitatum directè: & propterea efficient, ut correſpondentes particulæ figuras ſimiles deſcribere pergant. Hæc ita ſe habebunt (per Corol. 1 & 8. Prop. IV. Lib. 1.) ſi modò centra illa quieſcant. Sin moveantur, quoniam ob transſlationum ſimilitudinem, ſimiles manent eorum ſitus inter ſyſtematum particulas; ſimiles inducentur mutationes in figuris, quas particulæ deſcribunt. Similes igitur erunt correſpondentium & ſimilium particularum motus uſque ad occurſus ſuos primos; & propterea ſimiles occurſus, & ſimiles reflexiones, & ſubinde (per jam oſtenſa) ſimiles motus inter ſe donec iterum in ſe mutuò inciderint, & ſic deinceps in infinitum. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi corpora duo quævis, quæ ſimilia ſint & ad Syſtematum particulas correſpondentes ſimiliter ſita, inter ipſas temporibus proportionalibus ſimiliter moveri incipiant, ſintque eorum magnitudines ac denſitates ad invicem ut magnitudines ac denſitates correſpondentium particularum: hæc pergent temporibus proportionalibus ſimiliter moveri. Eſt enim eadem ratio partium majorum ſyſtematis utriuſque atque particularum.

Corol. 2. Et ſi ſimiles & ſimiliter poſitæ Syſtematum partes omnes quieſcant inter ſe: & earum duæ, quæ cæteris majores ſint, & ſibi mutuò in utroque ſyſtemate correſpondeant, ſecundum lineas ſimiliter ſitas, ſimili cum motu, utcunque moveri incipiant: hæ ſimiles in reliquis ſyſtematum partibus excitabunt motus, & pergent inter ipſas temporibus proportionalibus ſimiliter moveri; atque ideo ſpatia diametris ſuis proportionalia deſcribere.

PROP.

PROP. XXXIII. THEOR. XXVII.

Iiſdem poſitis, dico, quòd Syſtematum partes majores reſiſtuntur in ratione compoſitâ ex duplicatâ ratione velocitatum ſuarum & duplicatâ ratione diametrorum & ratione denſitatis partium ſyſtematum.

Nam reſiſtentia oritur partim ex viribus centripetis vel centrifugis, quibus particulæ ſyſtematum ſe mutuò agitant, partim ex occurſibus & reflexionibus particularum & partium majorum. Prioris autem generis reſiſtentiæ ſunt ad invicem ut vires totæ motrices à quibus oriuntur; id eſt, ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ in partibus correſpondentibus; hoc eſt (per hypotheſin) ut quadrata velocitatum directè, & diſtantiæ particularum correſpondentium inverſè, & quantitates materiæ in partibus correſpondentibus directè: ideoque, cùm diſtantiæ particularum ſyſtematis unius ſint ad diſtantias correſpondentes particularum alterius, ut diameter particulæ vel partis in ſyſtemate priore ad diametrum particulæ vel partis correſpondentis in altero, & quantitates materiæ ſint ut denſitates partium & cubi diametrorum; reſiſtentiæ ſunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & denſitates partium ſyſtematum. Q. E. D. Poſterioris generis reſiſtentiæ ſunt ut reflexionum correſpondentium numeri & vires conjunctim. Numeri autem reflexionum ſunt ad invicem ut velocitates partium correſpondentium directè, & ſpatia inter earum reflexiones inverſè. Et vires reflexionum ſunt ut velocitates & magnitudines & denſitates partium correſpondentium conjunctim; id eſt, ut velocitates & diametrorum cubi & denſitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus, reſiſtentiæ partium correſpondentium ſunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & denſitates partium conjunctim. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur ſi Syſtemata illa ſint Fluida duo Elaſtica, ad modum Aeris, & partes eorum quieſcant inter ſe: corpora autem duo ſimilia, & partibus Fluidorum quoad magnitudinem & denſitatem proportionalia, & inter partes illas ſimiliter poſita, ſecundum lineas ſimiliter poſitas utcunque projiciantur; vires autem accele-

5 ratrices,

ratrices, quibus particulæ Fluidorum ſe mutuò agitant, ſint ut corporum projectorum diametri inverſè, & quadrata velocitatum directè: corpora illa temporibus proportionalibus ſimiles excitabunt motus in Fluidis, & ſpatia ſimilia, ac diametris ſuis proportionalia, deſcribent.

Corol. 2. Proinde in eodem Fluido Projectile velox reſiſtentiam patitur, quæ eſt in duplicatâ ratione velocitatis quàm proximè. Nam ſi vires, quibus particulæ diſtantes ſe mutuò agitant, augerentur in duplicatâ ratione velocitatis, reſiſtentia foret in eâdem ratione duplicatâ accuratè; ideoque in Medio, cujus partes ab invicem diſtantes ſeſe viribus nullis agitant, reſiſtentia eſt in duplicatâ ratione velocitatis accuratè. Sunto igitur Media tria A, B, C, ex partibus ſimilibus, & æqualibus, & ſecundum diſtantias æquales regulariter diſpoſitis, conſtantia. Partes Mediorum A & B fugiant ſe mutuò viribus quæ ſint ad invicem ut T & V; illæ Medii C ejuſmodi viribus omninò deſtituantur. Et ſi corpora quatuor æqualia D, E, F, G in his Mediis moveantur; priora duo D & E in prioribus duobus A & B, & altera duo F & G in tertio C: ſitque velocitas corporis D ad velocitatem corporis E, & velocitas corporis F ad velocitatem corporis G in ſubduplicatâ ratione virium T ad vires V: reſiſtentia corporis D erit ad reſiſtentiam corporis E, & reſiſtentia corporis F ad reſiſtentiam corporis G, in velocitatum ratione duplicatâ; & propterea reſiſtentia corporis D erit ad reſiſtentiam corporis F ut reſiſtentia corporis E ad reſiſtentiam corporis G. Sunto corpora D & F æquivelocia, ut & corpora E & G; & augendo velocitates corporum D & F in ratione quâcunque, ac diminuendo vires particularum Medii B in eâdem ratione duplicatâ, accedet Medium B ad formam & conditionem Medii C pro libitu; & idcirco reſiſtentiæ corporum æqualium & æquivelocium E & G in his Mediis, perpetuò accedent ad æqualitatem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quàm data quævis. Proinde cùm reſiſtentiæ corporum D & F ſint ad invicem ut reſiſtentiæ corporum E & G, accedent etiam hæ ſimiliter ad rationem æqualitatis. Corporum igitur D & F, ubi velociſſimè moventur, reſiſtentiæ ſunt æquales quàm proximè: & propterea cùm reſiſtentia corporis F ſit in duplicatâ ratione velocitatis, erit reſiſtentia corporis D in eâdem ratione quàm proximè.

Corol.

Corol. 3. Corporis in Fluido quovis Elaſtico velociſſimè moti eadem ferè eſt reſiſtentia, ac ſi partes Fluidi viribus ſuis centrifugis deſtituerentur, ſeque mutuò non fugerent: ſi modo Fluidi vis elaſtica ex particularum viribus centrifugis oriatur, & velocitas adeo magna ſit, ut vires non habeant ſatis temporis ad agendum.

Corol. 4. Proinde cùm reſiſtentiæ ſimilium & æquivelocium corporum, in Medio cujus partes diſtantes ſe mutuò non fugiunt, ſint ut quadrata diametrorum; ſunt etiam æquivelocium & celerrimè motorum corporum reſiſtentiæ, in Fluido Elaſtico, ut quadrata diametrorum quàm proximè.

Corol. 5. Et cùm corpora ſimilia, æqualia & æquivelocia, in Mediis ejuſdem denſitatis, quorum particulæ ſe mutuò non fugiunt, ſive particulæ illæ ſint plures & minores, ſive pauciores & majores, in æqualem materiæ quantitatem temporibus æqualibus impingant, eique æqualem motûs quantitatem imprimant, & viciſſim (per motûs Legem Tertiam) æqualem ab eâdem reactionem patiantur, hoc eſt, æqualiter reſiſtantur: manifeſtum eſt etiam, quòd in ejuſdem denſitatis Fluidis Elaſticis, ubi velociſſimè moventur, æquales ſint eorum reſiſtentiæ quàm proximè; ſive Fluida illa ex particulis craſſioribus conſtent, ſive ex omnium ſubtiliſſimis conſtituantur. Ex Medii ſubtilitate reſiſtentia Projectilium, celerrimè motorum, non multum diminuitur.

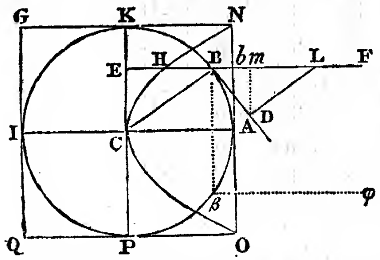
Corol. 6. Hæc omnia ita ſe habent in Fluidis, quorum vis elaſtica ex particularum viribus centrifugis originem ducit. Quòd ſi vis illa aliunde oriatur, veluti ex particularum expanſione ad inſtar lanæ vel ramorum arborum, aut ex aliâ quâvis cauſâ, quâ motus particularum inter ſe redduntur minùs liberi: reſiſtentia, ob minorem Medii Fluiditatem, erit major quàm in ſuperioribus Corollariis.

PROP. XXXIV. THEOR. XXVIII.

Si Globus & Cylindrus æqualibus diametris deſcripti, in Medio Raro, ex particulis æqualibus & ad æquales ab invicem diſtantias liberè diſpoſitis conſtante, ſecundum plagam axis Cylindri, æquali cum velocitate moveantur: erit reſiſtentia Globi duplo minor quàm reſiſtentia Cylindri.

Nam quoniam actio Medii in corpus eadem eſt (per Legum Corol.

rol. 5.) ſive corpus in Medio quieſcente moveatur, ſive Medii particulæ, eâdem cum velocitate, impingant in corpus quieſcens: conſideremus corpus tanquam quieſcens, & videamus, quo impetu urgebitur à Medio movente. Deſignet igitur ABKI corpus Sphæricum, centro C, ſemidiametro CA deſcriptum; & incidant particulæ Medii, datâ cum velocitate, in corpus illud Sphæricum, ſecundum rectas ipſi AC parallelas: ſitque FB ejuſmodi recta. In eâ capiatur LB ſemidiametro CB æqualis, & ducatur BD quæ ſphæram tangat in B. In KC & BD demittantur perpendiculares BE, LD; & vis, quâ particula Medii, ſecundum rectam FB obliquè incidendo, Globum ferit in B, erit ad vim, quâ particula eadem Cylindrum ONGQ, axe ACI circa Globum deſcriptum, perpendiculariter feriret in *b*, ut LD ad LB, vel BE ad BC. Rurſus efficacia hujus vis ad movendum Globum, ſecundum incidentiæ ſuæ



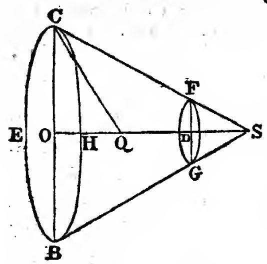
plagam FB vel AC, eſt ad ejuſdem efficaciam ad movendum Globum ſecundum plagam determinationis ſuæ, id eſt, ſecundum plagam rectæ BC quâ Globum directè urget, ut BE ad BC ([a]). Et conjunctis rationibus, efficacia particulæ in Globum ſecundum rectam FB obliquè incidentis, ad movendum eundem ſecundum plagam incidentiæ ſuæ, eſt ad efficaciam particulæ ejuſdem ſecundum eandem rectam in Cylindrum perpendiculariter incidentis, ad ipſum movendum in plagam eandem, ut BE quadratum ad BC quadratum. Quare ſi in *b*E, quæ perpendicularis eſt ad Cylindri baſem circularem, NAO, & æqualis radio AC, ſumatur

([a]) Nam à puncto D in rectam BL rectâ D*m* ad perpendiculum demiſſâ, vis DL in duas L*m*, *m*D reſolvitur, quarum illa L*m*, cum axe AC parallela, motui corporis ſecundum axem adverſatur. Pars altera MD, cum rectâ KP parallela, motum aliquem in corpore ſecundum rectam illam excitaret, niſi effectus ejus vi æquali et contrariâ tolleretur, à corpuſculo illo oriundâ, quod ſuperficiei ſphæricæ in puncto β impinget, ubi recta à B in axem AC ad perpendiculum demiſſa cum ſuperficie ſphæricâ iterum concurrit. Vis igitur totius LB, pars BD tollitur per ſuperficiei figuram. Reliquæ LD pars D*m* tollitur per vim contrariam corpuſculi puncto β impingentis. Relinquitur ſola vis L*m*, quæ, in impetu corporis reſtinguendo, effectum ſuum edere poſſit. Hæc autem L*m* ad totam LB rationem habet ejus quam recta LD ad rectam LB duplicatam. Ac proinde, in Sphærâ, duplicatam ejus quam BE habet ad CB. Et in omni Solido rotundo (Rotundum dico quod tali figurâ ſit præditum, ut plana omnia, quæ ſuper rectâ quâdam poſitione datâ, quam axem voco, ad perpendiculum erigantur, ſuperficiem ſolidi ſecando, circulos effecerint), in omni inquam iſtius modi Solido, quod per materiam aliquam fluidam raram, undique uniformem, ſecundum axis ſui directionem progrediatur, par erit ratio vis renixûs, quam ſuperficiei pars quæque percipiet. Nempe

ſumatur *b*H æqualis $\frac{\text{BE quad.}}{\text{CB}}$: erit *b*H ad *b*E ut effectus particulæ in Globum ad effectum particulæ in Cylindrum. Et propterea Solidum, quod à rectis omnibus *b*H occupatur, erit ad Solidum, quod à rectis omnibus *b*E occupatur, ut effectus particularum omnium in Globum ad effectum particularum omnium in Cylindrum. Sed Solidum prius eſt Parabolois, vertice C, axe CA, & latere recto CA deſcriptum ([b]); & Solidum poſterius eſt Cylindrus Paraboloidi circumſcriptus: & notum eſt, quòd Parabolois ſit ſemiſſis Cylindri circumſcripti. Ergo vis tota Medii in Globum eſt duplo minor quàm ejuſdem vis tota in Cylindrum. Et propterea ſi particulæ Medii quieſcerent, & Cylindrus ac Globus æquali cum velocitate moverentur, foret reſiſtentia Globi duplo minor quàm reſiſtentia Cylindri. Q. E. D.

Scholium.

Eâdem methodo Figuræ aliæ inter ſe quoad reſiſtentiam comparari poſſunt; eæque inveniri, quæ ad motus ſuos, in Mediis reſiſtentibus, continuandos aptiores ſunt. Ut ſi baſe circulari CEBH, quæ centro O, radio OC deſcribitur, & altitudine OD, conſtruendum ſit fruſtum Coni ([c]) CBGF, quod omnium, eâdem baſi & altitudine conſtructorum, & ſecundum plagam axis ſui verſus D progredientium fruſtorum, minimè reſiſtatur: biſeca altitudinem OD in Q, & produc OQ ad S, ut ſit QS æqualis QC; & erit S vertex coni cujus fruſtum quæritur ([d]).



Unde

Nempe ut vis corpuſculi cujuſque, quod in punctum quodpiam B impingat, ad motum corporis reſtinguendum, ad vim quâ idem corpuſculum polleret, ſi eâdem cum velocitate ſuperficiem ad perpendiculum feriret, eam rationem habeat quæ duplicata ſit ejus quam ſinus anguli LBD, obliquitatis utique ictûs in loco B, ad radium habet.

([b]) Nam cùm rectangulum CB × *b*H, ſive CA × *b*H, quadrato ex BE æquale ſit, hoc eſt, rectangulo KE × EP, ſive N*b* × *b*O, idcirco punctum H erit ad Parabolam, vertice C, axe CA, parametro quæ datæ CA ſit æqualis, in plano rectanguli CN ſcribendam. Ac proinde, plano illo poſitione non dato, ad ſuperficiem Paraboloideos, converſione talis Parabolæ circa axem CA, poſitione datum, generandam.

([c]) Recti ſcilicet.

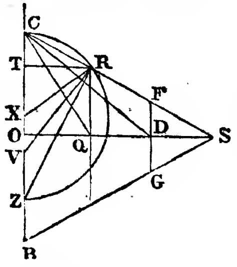
([d]) Vis renixûs quam ſuperficies Coni recti SCB, cujus vertex S, baſis circulus CEBH, percipiet, ad eam quam Cylindrus Rectus perciperet, qui eundem circulum baſim haberet, ſi eâdem cum velocitate quâ conus, per ſimilem materiam fluidam, ſecundum axem OS Coni et Cylindri commu-

 nem

Unde obiter, cùm angulus CSB ſemper ſit acutus, conſequens eſt, quòd ſi Solidum ADBE convolutione figuræ Ellipticæ vel Ovalis, ADBE, circa axem AB factâ generetur, & tangatur figura generans à rectis tribus, FG, GH, HI, in punctis F, B & I; eâ lege, ut GH ſit perpendicularis ad axem in puncto contactûs B, & FG, HI cum eâdem GH contineant angulos, FGB, BHI, graduum 135; Solidum, quod convolutione figuræ ADFGHIE circa axem eundem AB generatur, minùs reſiſtitur quàm Solidum prius; ſi modò utrumque ſecundum plagam axis ſui AB progrediatur, & utriuſque terminus B præcedat. Quam quidem Propoſitionem in conſtruendis Navibus non inutilem futuram eſſe cenſeo.

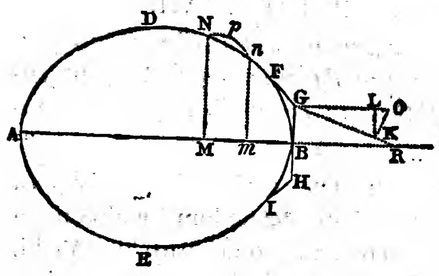
Quòd ſi figura DNFG ejuſmodi ſit Curva, ut, ſi ab ejus puncto quovis N ad axem AB demittatur perpendiculum NM, & à puncto

nem ferretur, eam rationem habet, quam quadratum ex CO ad quadratum ex CS. Id enim ex iis quæ ſuprà oſtendimus (Not. [a]) quivis opinor intelliget. Similiter vis renixûs, quam ſuperficies Coni SFG percipiet, ad vim quam perciperet Cylindrus, cujus baſis circulus FG, rationem habet quam quadratum ex FD ad quadratum ex FS, ſive eam quam quadratum ex CO ad quadratum ex CS. Hinc ſi vis renixûs, quam Cylindrus, baſi circulo CEBH, ſuſtineret, exponatur per CO^2, erit FD^2 vis renixûs quam Cylindrus baſe FG perciperet, ſi eadem cum velocitate, quâ alter cylindrus, ferretur: erit autem $CO^2 \times \frac{CO^2}{CS^2}$ vis quam ſuperficies Coni SCB, et $FD^2 \times \frac{CO^2}{CS^2}$ vis quam ſuperficies Coni minoris SFG percipiet. Unde vis illa quam ſuperficies conica, circulis FG, CB intercepta, percipiet, ea erit $\overline{CO^2 - FD^2} \times \frac{CO^2}{CS^2}$. Sed vis renixûs quam fruſtum conicum GFCB percipiet, ea componetur ex vi illâ, quàm ſuperficies conica circulis FG, CB interjecta perceperit, et ex illâ quam circulus minor FG. Hæc ita ſe habent, ſi fruſtum conicum FCBG, ſecundum directionem axis ſui progrediatur, antecedente utique circulo anguſtiore FG. Erit igitur vis renixus quam fruſtum Coni percipiet, ut $\overline{CO^2 - FD^2} \times \frac{CO^2}{CS^2} + FD^2$. Secetur Conus SCB plano per axem; quod in baſe et ſuperficie Conicâ triangulum SBC efficiat, & in plano circuli minoris rectam FG. Per Q agatur QR cum baſium diametris, CB, FG, parallela; quæ coni lateri SC in R occurrat. Et agatur RT cum axe SO parallela, quæ rectæ BC in T occurrat. Propter æquales OQ, QD, è tribus rectis CO, RQ, FD, media RQ eâdem differentiâ minimam FD exſuperabit, quâ ipſa à maximâ CO exſuperata eſt. Erit igitur $2RQ = CO + FD$. Et $CO - FD = 2CT$. Quare $4RQ \times CT = \overline{CO + FD} \times \overline{CO - FD} = CO^2 - FD^2$. Hinc vis renixûs, quam fruſtum conicum percipiet, exponetur per $4RQ \times CT \times \frac{CO^2}{CS^2} + \overline{CO - 2CT}|^2$. Hoc eſt, quoniam $CO^2 : CS^2 = CT^2 : CR^2$, per $\frac{4RQ \times CT^3}{CR^2} + \overline{CO - 2CT}|^2$. Vel ſi CT deſignetur literâ x; OQ, vel TR, literâ a; OC literâ b; vis renixûs in fruſtum conicum erit



ut $\frac{\overline{4b - 4x} . x^3}{a^2 + x^2} + \overline{b - 2x}|^2 = \frac{4bx^3 - 4x^4 + b^2a^2 - 4ba^2x + 4a^2x^2 + b^2x^2 - 4bx^3 + 4x^4}{a^2 + x^2} = \frac{b^2a^2 + {+4a^2 \atop +b^2} x^2 - 4ba^2x}{a^2 + x^2}$. Et hujus fluxio $= \frac{{+8a^2 \atop +2b^2} x\dot{x} - 4ba^2\dot{x}}{a^2 + x^2} - \frac{2b^2a^2x\dot{x} + {+8a^2 \atop +2b^2} x^3\dot{x} - 8ba^2x^2\dot{x}}{\overline{a^2 + x^2}|^2} = \dot{x} \times$

8a⁴x+



to dato G ducatur recta GR, quæ parallela ſit rectæ figuram tangenti in N, & axem productum ſecet in R, fuerit MN ad GR ut GR *cub.* ad $4BR \times GBq$; Solidum, quod figuræ hujus revolutione circa axem AB factâ deſcribitur, in Medio Raro prædicto ab A verſus B movendo, minùs reſiſtetur, quàm aliud quodvis, eâdem longitudine & latitudine deſcriptum, Solidum circulare ([e]).

P R O P.

$\frac{8a^4x + 4ba^2x^2 - 4ba^4}{\overline{a^2 + x^2}|^2}$

Ut vis renixûs in fruſtum minima fiat, hæc fluxio nihilo æquanda eſt. Et ex hâc fluxione nihilo æquatâ veniet, $4ba^2x^2 + 8a^4x - 4ba^4 = 0$. Unde etiam $x^2 + \frac{2a^2}{b} x = a^2$. Ex hâc denique æquatione facilè efficitur rectarum QS, QC inter ſe æqualitas. Junctâ enim CD, conſtituatur angulus TRV angulo DCO æqualis. Et propter angulos ad T, O rectos, triangula VTR, DOC erunt inter ſe ſimilia; et VT erit ad TR vel a, ut DO vel $2a$ ad OC, vel b. Quare $VT = \frac{2a^2}{b}$. Et $x^2 + VT . x = a^2$; hoc eſt $CT^2 + VT \times TC$, ſive $VC \times CT = TR^2$. Si igitur capiatur TZ æqualis illi VC, rectangulum $ZT \times TC$ quadrato ex TR æquale erit; junctâque ZR, angulus ZRC erit rectus. Punctum igitur R erit ad ſemicirculum, diametro CZ conſtitutum. Et ſi CZ in puncto X media dividatur, juncta XR utrique XC, XZ æqualis erit. Triangulum igitur XRZ iſoſceles erit, et anguli XRZ, XZR erunt inter ſe æquales. Sed propter æquales CV, TZ, erunt CT, VZ inter ſe æquales. Unde propter æquales etiam XC, XZ, erunt XT, XV inter ſe æquales. Quare VX ſemiſſis erit rectæ VT. Sed et DQ ſemiſſis rectæ DO. Quare VX eſt ad VT ut DQ ad DO. Sed propter triangula COD, RTV inter ſe ſimilia, anguloſque eorum ad D et V, O et T ſingulatim inter ſe æquales; erit VT ad VR ut DO ad DC. Ex æquo igitur VX erit ad VR ut DQ ad DC. Triangula igitur XVR, QDC inter ſe ſimilia, et anguli XRV, DCQ inter ſe æquales erunt. Rurſum propter angulos ZRC, RTZ rectos, angulus RZT angulo CRT, ac propterea angulo CSD, æqualis erit. Sed et angulus RVT angulo CDO. Hoc eſt $RZV + VRZ = CSD + DCS$. Quare et VRZ, DCS inter ſe æquales. Totus igitur XRZ, ex illis XRV, VRZ compoſitus, toti QCS, ex illis DCQ, DCS compoſito, æqualis erit. Sed XRZ oſtenſus eſt æqualis illi XZR, cui etiam CSD, ſive QSC. Anguli igitur QCS, QSC inter ſe æquales. Quare et rectæ QC, QS inter ſe æquales. Q. E. D.

Cor. II. Hinc fruſtum Coni recti tenuiſſimum, cui ſecundum axis ſui directionem progrediendum eſt, minimum impedimenti à renixu materiæ circumfuſæ percipiet, ſi angulus ad verticem Coni, à quo fruſtum fuerit reciſum, rectus fuerit. Hoc eſt ſi latera Coni angulos ſemirectos cum baſium diametris faciant.

Nam ſi fruſtum Coni recti, FCBG, tale ſit, cui, ſecundum axem progredienti, renixus materiæ circumfuſæ minimum impedimenti afferat, erunt QS, QC inter ſe æquales, et anguli QSC, QCS inter ſe æquales. Et evaneſcente fruſti altitudine OD, rectarum QS, QC, angulorumque QSC, QCS inter ſe æqualitas uſque manebit. At verò altitudine illâ OD in nullam tandem redactâ, angulus QCO in nihilum abierit, et angulus QCS in totum OCS ultimò creverit. Fient igitur anguli OCS, OSC ultimò inter ſe æquales. Quapropter, cùm rectus ſit angulus ad O, illorum OSC, OCS uterque ſemirectus erit. Q. E. D.

([e]) Nimirum ſi tale ſit Solidum, converſione Curvæ NFG circum axem AB genitum, quod, ſecundum axem illum progrediendo, minus impedimenti ex renixu materiæ circumfuſæ percipiat, quàm aliud quodcunque Solidum rotundum, quod cùm eundem habeat axem, eandem axis longitudinem, eoſdemque circulos extremos, pari cum velocitate ſecundum axis directionem feratur:

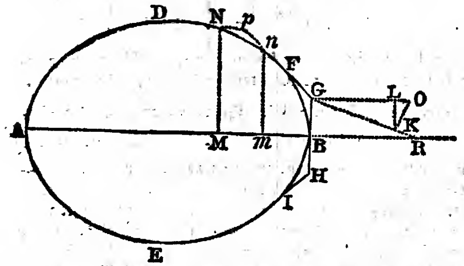
ſi

PROP. XXXV. PROB. VII.

Si Medium Rarum ex particulis quàm minimis quiescentibus, æqualibus, & ad æquales ab invicem distantias liberè dispositis constet: invenire resistentiam Globi in hoc medio uniformiter progredientis.

Cas. 1. Cylindrus, eâdem diametro & altitudine descriptus, progredi intelligatur, eâdem velocitate, secundum longitudinem axis sui, in eodem Medio. Et ponamus, quòd particulæ Medii, in quas Globus vel Cylindrus incidit, vi reflexionis quàm maximâ resiliant. Et cùm resistentia Globi (per Propositionem novissimam)

si tale inquam, sit Solidum conversione Curvæ NFG circa axem ABG genitum, superficies ejus convexa vim renixûs omni parte minùs percipiet, quàm aliûs cujusvis Solidi convexa superficies, quâ parte circulis eisdem hinc inde intercepta est. Nempe hoc dico. Sint MN, mn duæ quælibet Curvæ NFG ordinatæ. Per puncta N, n, ducatur Curvæ quævis Npn, à Curvâ NFG diversa. Superficies convexa, quam, conversione sui circa axem AB, arcus Nn generaverit, vim renixûs minùs sentiet, quàm alia illa superficies convexa, quam arcus Npn unà conversus generaverit. Nam si aliter se res habeat, omninò Solidum, conversione figuræ $NpnFG$ genitum, vim renixûs minùs, vel non magis, percipiet, quàm illud, quod unum ex omnibus quàm minimè eam percipere posuimus. Quod est absurdum. Superficies igitur, quam Curvæ NFG arcus Nn generaverit, vim renixûs una ex omnibus, quæ circulis quorum radii sunt MN, mn intercipiantur, quàm minimè percipiet: idque in omni circulorum illorum distantiâ, magna illa parvave fuerit. Accedat igitur Ordinata mn illam MN, ut distantia Mm, sensim evanescens in nihilum ultimò abeat. Corpuscula omnia, quæ superficiei ab arcu evanescente Nn genitæ ultimò impingunt, vi æquali eam feriunt, cùm omnium similes ultimò sint obliquitates. Quare vis, quam superficies illa evanescens ultimò percipiet, erit ut corpusculorum numerus et singulorum vis conjunctim. Agatur per G recta GO cum axe AB parallela. Et capiatur GO datæ cujusvis longitudinis. A puncto O in rectam GR deducatur ad perpendiculum recta OK; et à puncto K in rectam GO ad perpendiculum deducatur KL. Cùm angulus OGK sit obliquitas, quâ corpuscula materiæ fluidæ Solidi superficiei in loco N impingunt, erit vis uniuscujusque, ibi loci impingentis, ad vim quâ pollerent singula ad perpendiculum incursantia, ut recta LO ad datam GO (Not. [a].) Numerus autem eorum, quæ superficiei, evanescente arcu Nn genitæ, impingunt, est ultimò ut circuitus circuli cujus radius MN; hoc est, ut recta ipsa MN. Vis igitur, quam superficies illa evanescens ultimò percipiet, erit ut rectangulum $MN \times LO$. Cùm igitur superficies illa una ex omnibus, quæ circulis quorum radii MN, mn intercipiantur, vim renixûs quàm minimè semper percipiat; ad naturam Curvæ NFG definiendam, illud disquirendum est, quænam ejus figura esse oporteat, ut in omni datâ magnitudine rectæ MN, rectangulum $MN \times LO$ minimum sit. At verò minimum fiet rectangulum illud, exsistente LO minimâ. Est autem LO ad OG ut OK^2 ad OG^2. Et propter angulos ad K et B rectos, angulosque OGK, GRB inter se æquales, triangula OGK, GRB erunt inter se similia, et OK^2 erit ad OG^2 ut GB^2 ad GR^2. Quare LO erit ad OG ut GB^2 ad GR^2. Solidum igitur $LO \times GR^2$ dato Solido $OG \times GB^2$ æquale. Ac proinde minimâ exsistente LO erit GR maxima. Sed maximâ exsistente GR propter datam GB, erit BR quoque maxima. Quare minimâ exsistente LO, erit BR maxima. Et si litera a rectam quandam magnitudine stabilem designet, minimo exsistente rectangulo $MN \times LO$, rectangulum $a \times BR$ maximum erit. Ac proinde rectangulorum illorum differentia maxima vel minima, prout excessus penes



mam) sit duplo minor quàm resistentia Cylindri, & Globus sit ad Cylindrum ut duo ad tria; & Cylindrus, incidendo perpendiculariter in particulas ipsasque quàm maximè reflectendo, duplam sui ipsius velocitatem ipsis communicet: Cylindrus, quo tempore dimidiam longitudinem axis sui uniformiter progrediendo describit, communicabit motum particulis, qui sit ad totum Cylindri motum ut densitas Medii ad densitatem Cylindri; & Globus, quo tempore totam longitudinem diametri suæ uniformiter progrediendo describit, communicabit motum eundem particulis; & quo tempore duas tertias partes diametri suæ describit, communicabit motum particulis, qui sit ad totum Globi motum ut densitas Medii ad densitatem Globi. Et propterea Globus resistentiam patitur,

nes hoc vel illud fuerit. Hoc est spatium $a \times BR - MN \times LO$ maximum, vel $MN \times LO - a \times BR$ minimum. Illud igitur nos disquirere oportet, quænam Curvæ NFG figura efficiat, ut rectangulorum illorum differentia maxima vel minima fit. Hunc in finem ponatur $a \times \dot{\overline{BR}} - MN \times \dot{\overline{LO}} = 0$. Erit igitur MN ad a ut $\dot{\overline{BR}}$ ad $\dot{\overline{LO}}$. Sed propter Solidum $LO \times GR^2$ magnitudine datum, Solida $\dot{\overline{LO}} \times GR^2$, $\dot{\overline{2GR}} . GR . LO$ inter se æqualia erunt. Unde $\dot{\overline{LO}}$ erit ad $\dot{\overline{GR}}$ ut $2LO$ ad GR. Rursum propter quadratum ex GR duobus è GB, BR æquale, quorum illud è GB datum est; erunt rectangula $GR \times \dot{\overline{GR}}$, $BR \times \dot{\overline{BR}}$ inter se æqualia. Quare $\dot{\overline{GR}}$ erit ad $\dot{\overline{BR}}$ ut BR ad GR. Cùm igitur sit $\dot{\overline{LO}} : \dot{\overline{GR}} = 2LO : GR = 2LO \times BR : BR \times GR$; et $\dot{\overline{GR}} : \dot{\overline{BR}} = BR : GR = BR \times GR : GR^2$; ex æquo erit $\dot{\overline{LO}}$ ad $\dot{\overline{BR}}$ ut $2LO \times BR$ ad GR^2. At vero a erat ad MN ut $\dot{\overline{LO}}$ ad $\dot{\overline{BR}}$. Quare a erit ad MN ut $2LO \times BR$ ad GR^2. Ut verò hoc semper obtineat in omni magnitudine rectæ MN, manente magnitudine rectæ a; illa a haud pro arbitrio, sed certæ sumenda erit longitudinis. Quæ qualis esse debeat, exploremus. Puta MN in locum B transferri, ut sit $MN = BG$. Talis igitur sumenda est a, quæ sit ad BG ut $2LO \times BR$ ad GR^2. At vero ordinata BG ad Curvam NFG necesse est angulo semirecto inclinata sit. Aliter enim Solidum, conversione ejus Curvæ circa axem AB genitum, & ad circulum, cujus radius BG, terminatum, minimè illud erit, quod, secundum axis AB directionem progrediendo, minimum impedimenti à renixu materiæ circumfusæ percipiet. (Vide Not. [d], Cor.) Sed tale illud Solidum posuimus. Ordinata igitur BG angulo semirecto ad Curvam inclinata est. Angulus igitur BGR, congruente MN cum BG, fit semirectus. Rectæ igitur GB, BR fient inter se æquales, et quadratum ex GR duplum erit quadratum ex GB. Talis igitur sumenda erit a, quæ sit ad BG ut $2LO \times GB$ ad $2GB^2$, hoc est ut LO ad GB. Igitur sumenda erit illa a æqualis rectæ LO, qualis utique illa fit, quando angulus BGR est semirectus. Tunc verò, propter triangula GOK, RGB semper inter se similia, angulus KOG semirectus, et LO semissis erit rectæ GO. Quare a sumenda erit datæ GO semissis. Et si talis sumatur a, erit semper a ad MN ut $2LO \times BR$ ad GR^2. Hoc est $\frac{1}{2}GO$ erit ad MN ut $2LO \times BR$ ad GR^2. Invertendo MN ad $\frac{1}{2}GO$ ut GR^2 ad $2LO \times BR$. Quare $MN \times GR$ erit ad $\frac{1}{2}GO \times GR$ ut GR^2 ad $2LO \times BR$. Permutando MN erit ad GR ut $\frac{1}{2}GO \times GR$ ad $2LO \times BR$, sive ut $GR \times GO$ ad $4BR \times LO$. Habebit igitur MN ad GR rationem eam, quæ componitur è rationibus rectæ GR ad $4BR$ rectæque GO ad LO. Sed ratio rectæ GO ad LO eadem est, quæ quadrati ex GR ad quadratum ex GB. Id enim suprà nos ostendimus. Ratio igitur rectæ MN ad rectam GR componitur è rationibus rectæ GR ad $4BR$, quadratique ex GR ad quadratum ex GB. Sed ex eisdem composita est ratio Cubi ex GR ad Solidum $4BR \times GB^2$. Quare $MN : OR = GR^3 : 4BR \times GB^2$, sicut Newtonus pronunciavit. Q. E. D.

Reconditissimi Problematis, quod viros ingenio præstantissimos, Fatium, Craigium, Hospitalium, Bernouillium, aliosque exercuit, si quid aut lucis aut elegantiæ præ aliis nostra fortè enodatio habeat, illud omne summo viro Maclaurino referendum est. Qui, si non eandem, simillimam certè in eximio suo Opere De Fluxionibus hujus Problematis resolutionem attulit. *(Vide Treatise of Fluxions by Colin Maclaurin, § 606 & 607.)*

quæ fit ad vim, quâ totus ejus motus vel auferri possit, vel generari, quo tempore duas tertias partes diametri suæ uniformiter progrediendo describit, ut densitas Medii ad densitatem Globi.

Cas. 2. Ponamus quòd particulæ Medii in Globum vel Cylindrum incidentes non reflectantur; & Cylindrus, incidendo perpendiculariter in particulas, simplicem suam velocitatem ipsis communicabit, ideoque resistentiam patitur duplo minorem quàm in priore casu; & resistentia Globi erit etiam duplo minor quàm priùs.

Cas. 3. Ponamus quòd particulæ Medii vi reflexionis neque maximâ neque nullâ, sed mediocri aliquâ resiliant à Globo; & resistentia Globi erit in eâdem ratione mediocri inter resistentiam in primo casu & resistentiam in secundo. Q. E. I.

Corol. 1. Hinc si Globus & particulæ sint infinitè dura, & vi omni elasticâ, & propterea etiam vi omni reflexionis, destituta: resistentia Globi erit ad vim, quâ totus ejus motus vel auferri possit, vel generari, quo tempore globus quatuor tertias partes diametri suæ describit, ut densitas Medii ad densitatem Globi.

Corol. 2. Resistentia Globi, cæteris paribus, est in duplicatâ ratione velocitatis.

Corol. 3. Resistentia Globi, cæteris paribus, est in duplicatâ ratione diametri.

Corol. 4. Resistentia Globi, cæteris paribus, est ut densitas Medii.

Corol. 5. Resistentia Globi est in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatis & duplicatâ ratione diametri & ratione densitatis Medii (f).

Corol. 6. Et motus Globi, cum ejus resistentiâ, sic exponi potest. Sit AB tempus, quo Globus, per resistentiam suam uniformiter

(f) Vis renixus dicatur R. Diameter globi d. Velocitas globi C. Tempus, quo velocitate C spatium $\frac{4}{3}d$ confecerit, dicatur T. Vis, quâ, tempore T, motus globi, celeritate C lati, vel generari vel extingui possit, dicatur V. Densitas materiæ fluidæ dicatur D, globi Δ.

Jam ex hac Propositione $R : V = D : \Delta$. Quare $R = \frac{V \times D}{\Delta}$. Sed V erit ut $\frac{d^3 \times \Delta \times C}{T}$. Et T erit ut $\frac{\frac{4}{3}d}{C}$. Quare V erit ut $\frac{d^3 \times \Delta \times C^2}{\frac{4}{3}d}$, hoc est ut $d^2 \times \Delta \times C^2$. Hinc autem R $(= \frac{V \times D}{\Delta})$ erit ut $d^2 \times C^2 \times D$. Quod est Corollarium Quintum Newtoni.

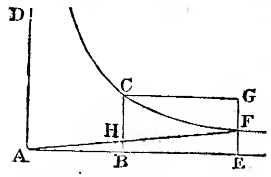
Datis autem d, et C, erit R ut D: quod est Quartum Newtoni Corollarium.

Et datis D et C, erit R ut d^2: quod Tertium est Newtoni Corollarium.

Et datis d et D erit R ut C^2: quod est Secundum Newtoni Corollarium.

(g) Modò illud intelligatur, quod satis apertum est, rectam CB ad BH rationem habere duplicatam

miter continuatam, totum suum motum amittere potest. Ad AB erigantur perpendicula AD, BC. Sitque BC motus ille totus, & per punctum C, Asymptotis AD, AB, describatur Hyperbola CF.



Producatur AB ad punctum quodvis E. Erigatur perpendiculum EF, hyperbolæ occurrens in F. Compleatur parallelogrammum CBEG, & agatur AF ipsi BC occurrens in H. Et si Globus, tempore quovis BE, motu suo primo BC uniformiter continuato, in Medio non resistente, describat spatium CBEG per aream parallelogrammi expositum; idem, in Medio resistente, describet spatium CBEF per aream hyperbolæ expositum, & motus ejus in fine temporis illius exponetur per hyperbolæ ordinatam EF, amissâ motûs ejus parte FG. Et resistentia ejus in fine temporis ejusdem exponetur per longitudinem BH, amissâ resistentiæ parte CH. Patent hæc omnia per Corol. 1 & 3. Prop. V. Lib. II (g).

Corol. 7. Hinc si Globus, tempore T, per resistentiam R uniformiter continuatam, amittat motum suum totum M: idem Globus, tempore t, in Medio resistente, per resistentiam R in duplicatâ velocitatis ratione decrescentem, amittet motûs sui M partem $\frac{tM}{T+t}$, manente parte $\frac{TM}{T+t}$; & describet spatium, quod sit ad spatium motu uniformi M, eodem tempore t, descriptum, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585092994 est ad numerum $\frac{t}{T}$: propterea quòd area hyperbolica BCFE est ad rectangulum BCGE in hâc proportione (h).

Scholium.

catam ejus, quam eadem CB habet ad EF. Namque propter hyperbolam erit CB ad EF ut AE ad AB. Et propter rectas EF, BH inter se parallelas, erit AE ad AB ut EF, BH. Quare erit CB ad EF ut EF ad BH.

(h) Nempe si AB dicatur T; CB, M; BF, t; erit EF, pars motûs reliqua, $= \frac{AB \times BC}{AE} = \frac{TM}{T \times t}$. Unde FG, pars motûs amissa, $= M - \frac{TM}{T \times t} = \frac{tM}{T \times t}$.

Rursum, si pro Modulo logarithmorum ex hyperbolâ CF, ponatur 1, et B pro Modulo Briggiano, erit CBEF ad logarithmum numeri $\frac{T \times t}{T}$ Briggianum ut 1 ad B. Unde CBEF $=$ Log. $\frac{T \times t}{T} \times \frac{1}{B}$. Sed $\frac{1}{B} = 2{,}302585092994$, vid. Cotes. Harmon. Mens. Prop. II. Quare CBEF $=$

De Motu Corporum

Scholium.

In hâc Propofitione expofui refiftentiam & retardationem Projectilium Sphæricorum in Mediis non continuis; & oftendi, quòd hæc refiftentia fit ad vim, quâ totus Globi motus vel tolli poffit, vel generari, quo tempore Globus duas tertias diametri fuæ partes velocitate uniformiter continuatâ defcribat, ut denfitas Medii ad denfitatem Globi, fi modò Globus & particulæ Medii fint fummè elaftica, & vi maximâ reflectendi polleant: quòdque hæc vis fit duplo minor, ubi Globus & particulæ Medii funt infinitè dura, & vi reflectendi prorfus deftituta. In Mediis autem Continuis, qualia funt Aqua, Oleum calidum, & Argentum Vivum, in quibus Globus non incidit immediatè in omnes Fluidi particulas refiftentiam generantes, fed premit tantùm proximas particulas, & hæ premunt alias, & hæ alias; refiftentia eft adhuc duplo minor. Globus utique, in hujufmodi Mediis fluidiffimis, refiftentiam patitur, quæ eft ad vim, quâ totus ejus motus vel tolli poffit, vel generari, quo tempore, motu illo uniformiter continuato, partes octo tertias diametri fuæ defcribat, ut denfitas Medii ad denfitatem Globi. Id quod in fequentibus conabimur oftendere.

PROP. XXXVI. PROB. VIII.

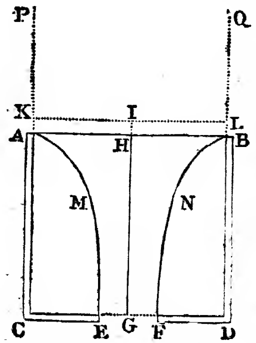
Aquæ de vafe Cylindrico, per foramen in fundo factum, effluentis definire motum (i).

Sit ACDB vas Cylindricum; AB, ejus orificium fuperius; CD fundum horizonti parallelum; EF, foramen circulare in medio fundi; G centrum foraminis; & GH, axis cylindri horizonti perpendicularis. Et finge Cylindrum glaciei APQB ejufdem effe latitudinis cum cavitate vafis, & axem eundem habere, & uniformi cum motu perpetuò defcendere; & partes ejus, quàm primùm attingunt fuperficiem AB, liquefcere, &, in aquam converfas, gravitate fuâ defluere in vas, & cataractam vel columnam aquæ ABNFEM cadendo formare, & per foramen EF tranfire, idemque adæquatè

Log. $\frac{T \times t}{T} \times 2{,}302585092994$. Rectangulum autem $BG = tM$. Sed propter $AB \times BC$, five $TM, = 1$ erit $M = \frac{1}{T}$. Quare $BG = \frac{t}{T}$. Quare $CBEF : BG = \text{Log.}\ \frac{T \times t}{T} \times 2{,}302585092994 : \frac{t}{T}$.

implere.

Liber Secundus.



implere. Ea verò fit uniformis velocitas Glaciei defcendentis, ut & Aquæ contiguæ in circulo AB, quam aqua, cadendo & cafu fuo defcribendo altitudinem IH, acquirere poteft; & jaceant IH & HG in directum, & per punctum I ducatur recta KL horizonti parallela, & lateribus Glaciei occurrens in K & L. Et velocitas aquæ, effluentis per foramen EF, ea erit, quam aqua, cadendo ab I & cafu fuo defcribendo altitudinem IG, acquirere poteft. Ideoque, per Theoremata *Galilæi*, erit IG ad IH in duplicatâ ratione velocitatis aquæ per foramen effluentis ad velocitatem aquæ in circulo AB; hoc eft, in duplicatâ ratione circuli AB ad circulum EF; nam hi circuli funt reciprocè ut velocitates aquarum quæ per ipfos, eodem tempore & æquali quantitate, adæquatè tranfeunt. De velocitate aquæ horizontem verfus hîc agitur. Et motus horizonti parallelus, quo partes aquæ cadentis ad invicem accedunt, cùm non oriatur à gravitate, nec motum horizonti perpendicularem à gravitate oriundum mutet, hîc non confideratur. Supponimus quidem, quòd partes aquæ aliquantulum cohærent, &, per cohæfionem fuam, inter cadendum accedant ad invicem per motus horizonti parallelos; ut unicam tantùm efforment cataractam & non in plures cataractas dividantur: fed motum horizonti parallelum, à cohæfione illâ oriundum, hîc non confideramus.

Caf. 1. Concipe jam cavitatem totam in vafe, in circuitu aquæ cadentis ABNFEM, glacie plenam effe, ut aqua per glaciem, tanquam per infundibulum, tranfeat. Et fi aqua glaciem tantùm non tangat; vel, quod perinde eft, fi tangat, & per glaciem, propter fummam ejus polituram, quàm liberrimè & fine omni refiftentiâ labatur; hæc defluet per foramen EF eâdem velocitate ac priùs, & pondus totum columnæ aquæ ABNFEM impendetur in defluxum ejus generandum uti priùs, & fundum vafis fuftinebit pondus glaciei columnam ambientis.

(i) Locum hunc de motu Aquarum, quæ è vafe cylindraceo, tenui foramine pertufo, profluant, multis tractârunt Jurinus in Actis Philofophicis, Maclaurinus in præclaro fuo Opere de Fluxionibus, D. Bernouillius in Hydrodynamicâ, et Polenus.

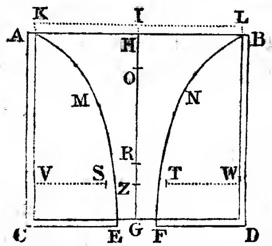
Liquefcat

Liqueſcat jam glacies in vaſe; & effluxus aquæ, quoad velocitatem, idem manebit ac prius. Non minor erit, quia glacies in aquam reſoluta conabitur deſcendere: non major, quia glacies in aquam reſoluta non poteſt deſcendere, niſi impediendo deſcenſum aquæ alterius deſcenſui ſuo æqualem. Eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.

Sed foramen in fundo vaſis, propter obliquos motus particularum aquæ effluentis, paulo majus eſſe debet quàm prius. Nam particulæ aquæ jam non tranſeunt omnes per foramen perpendiculariter; ſed à lateribus vaſis undique confluentes & in foramen convergentes, obliquis tranſeunt motibus; & curſum ſuum deorſum flectentes in venam aquæ exilientis conſpirant, quæ exilior eſt paulo infra foramen quàm in ipſo foramine; exiſtente ejus diametro ad diametrum foraminis ut 5 ad 6, vel $5\frac{1}{2}$ ad $6\frac{1}{2}$ quàm proximè, ſi modò diametros rectè dimenſus ſum. Parabam utique laminam planam, pertenuem, in medio perforatam; exiſtente circularis foraminis diametro partium quinque octavarum digiti. Et ne vena aquæ exilientis cadendo acceleraretur, & acceleratione redderetur anguſtior, hanc laminam non fundo ſed lateri vaſis affixi; ſic ut vena illa egrederetur ſecundum lineam horizonti parallelam. Dein ubi vas aquâ plenum eſſet, aperui foramen, ut aqua efflueret; & venæ diameter, ad diſtantiam quaſi dimidii digiti à foramine, quàm accuratiſſimè menſurata prodiit partium viginti & unius quadrageſimarum digiti. Erat igitur diameter foraminis hujus circularis ad diametrum venæ ut 25 ad 21 quamproximè. Aqua igitur, tranſeundo per foramen, convergit undique; & poſtquam effluxit ex vaſe, tenuior redditur convergendo; & per attenuationem acceleratur, donec ad diſtantiam ſemiſſis digiti à foramine pervenerit, & ad diſtantiam illam tenuior & celerior ſit, quàm in ipſo foramine, in ratione 25×25 ad 21×21, ſeu 17 ad 12, quamproximè; id eſt in ſubduplicatâ ratione binarii ad unitatem circiter. Per experimenta verò conſtat, quòd quantitas aquæ, quæ, per foramen circulare in fundo vaſis factum, dato tempore effluit, ea ſit, quæ cum velocitate prædictâ, non per foramen illud, ſed per foramen circulare, cujus diameter eſt ad diametrum foraminis illius ut 21 ad 25, eodem tempore effluere debet. Ideoque aqua illa effluens velocitatem habet

bet deorſum, in ipſo foramine, quam grave cadendo, & caſu ſuo deſcribendo dimidiam altitudinem aquæ in vaſe ſtagnantis, acquirere poteſt quamproximè. Sed poſtquam exivit ex vaſe, acceleratur convergendo, donec ad diſtantiam à foramine diametro foraminis propè æqualem pervenerit, & velocitatem acquiſiverit majorem in ratione ſubduplicatâ binarii ad unitatem circiter; quam utique grave cadendo, & caſu ſuo deſcribendo totam altitudinem aquæ in vaſe ſtagnantis, acquirere poteſt quamproximè.

In ſequentibus igitur diameter venæ deſignetur per foramen illud minus, quod vocavimus EF. Et plano foraminis EF parallelum duci intelligatur planum aliud ſuperius, VW, ad diſtantiam diametro foraminis æqualem circiter, & foramine majore ST pertuſum; per quod utique vena cadat, quæ adæquatè impleat foramen inferius, EF, atque ideo cujus diameter ſit ad diametrum foraminis inferioris ut 25 ad 21 circiter. Sic enim vena per foramen inferius perpendiculariter tranſibit; & quantitas aquæ effluentis, pro magnitudine foraminis hujus, ea erit quam ſolutio Problematis poſtulat quamproximè. Spatium verò, quod planis duobus & venâ cadente clauditur, pro fundo vaſis haberi poteſt. Sed ut ſolutio Problematis ſimplicior ſit & magis mathematica,



præſtat adhibere planum ſolum inferius pro fundo vaſis, & fingere quòd Aqua, quæ per Glaciem, ceu per infundibulum, defluebat, & è vaſe per foramen EF in plano inferiore factum egrediebatur, motum ſuum perpetuò ſervet, & Glacies quietem ſuam. In ſequentibus igitur ſit ST diameter foraminis circularis, centro Z deſcripti, per quod cataracta effluit ex vaſe, ubi aqua tota in vaſe fluida eſt. Et ſit EF diameter foraminis, per quod cataracta cadendo adæquatè tranſit, ſive Aqua exeat ex vaſe per foramen illud ſuperius ST, ſive cadat per medium Glaciei in vaſe tanquam per infundibulum. Et ſit diameter foraminis ſuperioris ST ad diametrum inferioris EF ut 25 ad 21 circiter, & diſtantia perpendicularis inter plana foraminum æqualis ſit diametro foraminis minoris EF. Et velocitas aquæ, è vaſe per foramen ST exeuntis, ea erit in ipſo foramine deorſum, quam corpus cadendo à dimidio

dimidio altitudinis IZ acquirere poteſt: velocitas autem cataractæ utriuſque cadentis ea erit in foramine EF, quam corpus cadendo ab altitudine totâ IG acquiret.

Caſ. 2. Si foramen EF non ſit in medio fundi vaſis, ſed fundum alibi perforetur: aqua effluet eâdem cum velocitate ac priùs, ſi modò eadem ſit foraminis magnitudo. Nam grave majori quidem tempore deſcendit ad eandem profunditatem per lineam obliquam, quàm per lineam perpendicularem; ſed deſcendendo eandem velocitatem acquirit in utroque caſu, ut *Galilæus* demonſtravit.

Caſ. 3. Eadem eſt aquæ velocitas effluentis per foramen in latere vaſis. Nam ſi foramen parvum ſit, ut intervallum inter ſuperficies AB & KL quoad ſenſum evaneſcat, & vena aquæ horizontaliter exilientis figuram Parabolicam efformet: ex latere recto hujus Parabolæ colligetur, quòd velocitas aquæ effluentis ea ſit, quàm corpus ab aquæ, in vaſe ſtagnantis, altitudine HG, vel IG, cadendo acquirere potuiſſet. Facto utique experimento inveni, quòd ſi altitudo aquæ ſtagnantis ſupra foramen eſſet viginti digitorum, & altitudo foraminis ſupra planum horizonti parallelum eſſet quoque viginti digitorum, vena aquæ proſilientis incideret in planum illud ad diſtantiam digitorum 37 circiter à perpendiculo, quod in planum illud à foramine demittebatur, captam. Nam ſine reſiſtentiâ, vena incidere debuiſſet in planum illud ad diſtantiam digitorum 40, exiſtente venæ Parabolicæ latere recto digitorum 80.

Caſ. 4. Quinetiam aqua effluens, ſi ſurſum feratur, eâdem egreditur cum velocitate. Aſcendit enim aquæ exilientis vena parva motu perpendiculari ad aquæ, in vaſe ſtagnantis, altitudinem GH, vel GI; niſi quatenus aſcenſus ejus ab Aeris reſiſtentiâ aliquantulum impediatur; ac proinde eâ effluit cum velocitate, quam, ab altitudine illâ cadendo, acquirere potuiſſet. Aquæ ſtagnantis particula unaquæque undique premitur æqualiter (per Prop. XIX. Lib. 2.) &, preſſioni cedendo, æquali impetu in omnes partes fertur; ſive deſcendat per foramen in fundo vaſis, ſive horizontaliter effluat per foramen in ejus latere, ſive egrediatur in canalem, & inde aſcendat per foramen parvum in ſuperiore canalis parte factum. Et velocitatem, quâ aqua effluit, eam eſſe, quam in

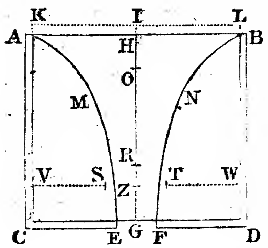
in hâc Propoſitione aſſignavimus, non ſolùm ratione colligitur, ſed etiam per experimenta notiſſima jam deſcripta manifeſtum eſt.

Caſ. 5. Eadem eſt aquæ effluentis velocitas, ſive figura foraminis ſit circularis, ſive quadrata, vel triangularis, aut alia quæcunque circulari æqualis. Nam velocitas aquæ effluentis non pendet à figurâ foraminis, ſed oritur ab ejus altitudine infra planum KL.

Caſ. 6. Si vaſis ABDC pars inferior in aquam ſtagnantem immergatur, & altitudo aquæ ſtagnantis ſupra fundum vaſis ſit GR: velocitas, quâcum aqua quæ in vaſe eſt, effluet per foramen EF in aquam ſtagnantem, ea erit, quam aqua cadendo, & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IR, acquirere poteſt. Nam pondus aquæ omnis in vaſe, quæ inferior eſt ſuperficie aquæ ſtagnantis, ſuſtinebitur in æquilibrio per pondus aquæ ſtagnantis, ideoque motum aquæ deſcendentis in vaſe minimè accelerabit. Patebit etiam & hic caſus per experimenta, menſurando ſcilicet tempora quibus aqua effluit.

Corol. 1. Hinc ſi aquæ altitudo, CA, producatur ad K, ut ſit AK ad CK in duplicatâ ratione areæ foraminis, in quâvis fundi parte facti, ad aream circuli AB: velocitas aquæ effluentis æqualis erit velocitati, quam aqua cadendo, & caſu ſuo deſcribendo altitudinem KC, acquirere poteſt.

Corol. 2. Et vis, quâ totus aquæ exilientis motus generari poteſt, æqualis eſt ponderi Cylindricæ columnæ aquæ, cujus baſis eſt foramen EF, & altitudo 2GI vel 2CK. Nam aqua exiliens, quo tempore hanc columnam æquat, pondere ſuo ab altitudine GI cadendo velocitatem ſuam, quâ exilit, acquirere poteſt.



Corol. 3. Pondus aquæ totius in vaſe ABDC eſt ad ponderis partem, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut ſumma circulorum AB & EF ad duplum circulum EF. Sit enim IO media proportionalis inter IH & IG; & aqua per foramen EF egrediens, quo tempore gutta, cadendo ab I, deſcribere poſſet altitudinem IG, æqualis erit Cylindro cujus baſis eſt circulus EF & altitudo eſt 2IG; id eſt, Cylindro cujus baſis eſt circulus AB, & altitudo eſt 2IO: nam

nam circulus EF eſt ad circulum AB in ſubduplicatâ ratione altitudinis IH ad altitudinem IG, hoc eſt, in ſimplici ratione mediæ proportionalis IO ad altitudinem IG: & quo tempore gutta, cadendo ab I, deſcribere poteſt altitudinem IH, aqua egrediens æqualis erit Cylindro, cujus baſis eſt circulus AB, & altitudo eſt 2IH: & quo tempore gutta, cadendo ab I per H ad G, deſcribit altitudinum differentiam HG, aqua egrediens, id eſt, aqua tota in Solido ABNFEM, æqualis erit differentiæ Cylindrorum; id eſt, Cylindro cujus baſis eſt AB, & altitudo 2HO. Et propterea aqua tota in vaſe ABDC eſt ad aquam totam cadentem in Solido ABNFEM ut HG ad 2HO, id eſt, ut HO+OG ad 2HO, ſeu IH+IO ad 2IH. Sed pondus aquæ totius, in Solido ABNFEM, in aquæ defluxum impenditur: ac proinde pondus aquæ totius in vaſe eſt ad ponderis partem quæ in defluxum aquæ impenditur, ut IH+IO ad 2IH; atque ideo ut ſumma circulorum EF & AB ad duplum circulum EF.

Corol. 4. Et hinc pondus aquæ totius in vaſe ABDC eſt ad ponderis partem alteram, quam fundum vaſis ſuſtinet, ut ſumma circulorum AB & EF ad differentiam eorundem circulorum.

Corol. 5. Et ponderis pars, quam fundum vaſis ſuſtinet, eſt ad ponderis partem alteram, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut differentia circulorum AB & EF ad duplum circulum minorem EF, ſive ut area fundi ad duplum foramen.

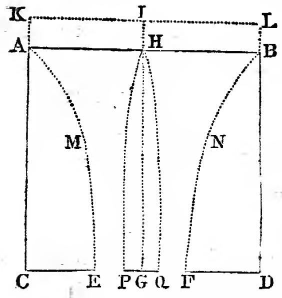
Corol. 6. Ponderis autem pars, quâ ſolâ fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad ſummam circulorum AB & EF; ſive ut circulus AB ad exceſſum dupli circuli AB ſupra fundum. Nam ponderis pars, qua ſolâ fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius in vaſe, ut differentia circulorum AB & EF ad ſummam eorundem circulorum, per Cor. 4: & pondus aquæ totius in vaſe eſt ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad differentiam circulorum AB & EF. Itaque ex æquo perturbatè, ponderis pars, quâ ſolâ fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad ſummam circulorum AB & EF, vel exceſſum dupli circuli AB ſupra fundum (k).

Corol. 7. Si in medio foraminis EF locetur circellus PQ, centro

(k) Sextum hoc Corollarium à Coteſio eſt.

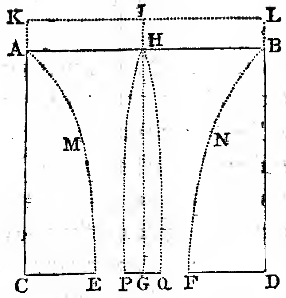
G de-

G deſcriptus, & horizonti parallelus: pondus aquæ, quam circellus ille ſuſtinet, majus eſt pondere tertiæ partis Cylindri aquæ, cujus baſis eſt circellus ille, & altitudo eſt GH. Sit enim ABNFEM cataracta, vel columna aquæ cadentis axem habens GH ut ſuprà;



& congelari intelligatur aqua omnis in vaſe, tam in circuitu cataractæ quàm ſupra circellum, cujus fluiditas ad promptiſſimum & celerrimum aquæ deſcenſum non requiritur. Et ſit PHQ columna aquæ ſupra circellum congelata, verticem habens H, & altitudinem GH. Et finge cataractam hancce pondere ſuo toto cadere, & non incumbere in PHQ, nec eandem premere, ſed liberè & ſine frictione præterlabi; niſi fortè in ipſo Glaciei vertice, quo cataracta, ipſo cadendi initio, incipiat eſſe cava. Et quemadmodum aqua in circuitu cataractæ congelata, AMEC, BNFD, convexa eſt in ſuperficie internâ, AME, BNF, verſus cataractam cadentem, ſic etiam hæc columna PHQ convexa erit verſus cataractam; & propterea major Cono, cujus baſis eſt circellus ille PQ, & altitudo GH; id eſt, major tertiâ parte Cylindri eâdem baſe & altitudine deſcripti. Suſtinet autem circellus ille pondus hujus columnæ; id eſt, pondus, quod pondere Coni, ſeu tertiæ partis Cylindri illius, majus eſt.

Corol. 8. Pondus aquæ quam circellus valdè parvus PQ ſuſtinet, minor eſſe videtur pondere duarum tertiarum partium Cylindri aquæ, cujus baſis eſt circellus ille, & altitudo eſt HG. Nam ſtantibus jam poſitis, deſcribi intelligatur dimidium Sphæroidis, cujus baſis eſt circellus ille, & ſemiaxis ſive altitudo eſt HG. Et hæc figura æqualis erit duabus tertiis partibus Cylindri illius, & comprehendet columnam aquæ congelatæ PHQ, cujus pondus circellus ille ſuſtinet. Nam ut motus aquæ ſit maximè directus, columnæ illius ſuperficies externa concurret cum baſi, PQ, in angulo nonnihil acuto; propterea quòd aqua, cadendo, perpetuò acceleratur, &, propter accelerationem, fit tenuior; & cùm angulus ille ſit recto minor, hæc columna, ad inferiores ejus partes, jacebit intra dimidium Sphæroidis. Eadem verò ſurſum acuta erit, ſeu cuſpidata; ne horizontalis motus aquæ, ad verticem Sphæroidis, ſit infinitè



infinitè velocior quàm ejus motus horizontem versus. Et quo minor est circellus PQ, eo acutior erit vertex columnæ; &, circello in infinitum diminuto, angulus PHQ in infinitum diminuetur, & propterea columna jacebit intra dimidium Sphæroidis. Est igitur columna illa minor dimidio Sphæroidis, seu duabus tertiis partibus Cylindri, cujus basis est circellus ille, & altitudo GH. Sustinet autem circellus vim aquæ ponderi hujus columnæ æqualem, cùm pondus aquæ ambientis in defluxum ejus impendatur.

Corol. 9. Pondus aquæ, quam circellus valdè parvus, PQ, sustinet, æquale est ponderi Cylindri aquæ, cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}GH$ quamproximè. Nam pondus hocce est medium arithmeticum inter pondera Coni & Hemisphæroidis prædictæ. At si circellus ille non sit valdè parvus, sed augeatur, donec æquet foramen EF; hic sustinebit pondus aquæ totius sibi perpendiculariter imminentis, id est, pondus cylindri aquæ, cujus basis est circellus ille & altitudo est GH.

Corol. 10. Et (quantùm sentio) (l) pondus, quod circellus sustinet, est semper ad pondus Cylindri aquæ, cujus basis est circellus ille, & altitudo est $\frac{1}{2}GH$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$, sive ut circulus EF ad excessum circuli hujus supra semissem circelli PQ quamproximè.

LEMMA

(l) —*quantum sentio.*] Nimirum proportio ponderum, quam in hoc Corollario Newtonus constituit, ita obtinebit, si is sit motus aquæ per rimam annularem, quam circulus PQ, in medio foramine EF collocatus, circa se relinquit, quo per eandem rimam è vase cylindraceo ea profueret, quod basin haberet circulum EF, altitudinem rectæ GH æqualem. Quod sic ostendimus.

Tantilla ponatur circuli PQ superficies, ut foraminis totius EF pars sit multesima. Sustinebit igitur vim, quæ ponderi Cylindri aquei, cujus basis circulus ille PQ, altitudo dimidia recta GH, æqualis erit. Manente circulo PQ, contrahatur sensim foramen EF, quo datam circuli PQ magnitudinem paulatim accedat. Sit V linea recta eâ lege mutabilis, ut in omni magnitudine foraminis EF, illa V ad datam quandam P rationem habeat, quam vis, quâ premitur circulus PQ, ad pondus Cylindri aquei, cujus basis PQ altitudo $\frac{1}{2}GH$. Dico V esse semper ad P ut EF^2 ad $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$, modò is sit aquarum, per rimam EPQF profluentium, motus, quo per eandem rimam è vase cylindraceo, cujus basis EF, altitudo GH, prorumperent. Aquâ enim per rimam illam è tali vase prosiliente, vis quâ fundus ejus vasis premitur, erit ad pondus Cylindri aquei, qui in eodem vase fundum ad perpendiculum insistit, ut EF^2 ad $EF^2 + EF^2 - PQ^2$, hoc est ut EF^2 ad $2EF^2 - PQ^2$ (per Cor. 6.) Jam verò cùm V sit ad P ut vis, quâ aquæ premant circulum PQ, ad pondus Cylindri aquei $PQ \times \frac{1}{2}GH$; cùm præterea pondus hujus Cylindri sit ad pondus Cylindri aquei, cujus basis circu-

LEMMA IV.

Cylindri, qui secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia ex auctâ vel diminutâ ejus longitudine non mutatur; ideoque eadem est cum resistentiâ Circuli eâdem diametro descripti, & eâdem velocitate secundum lineam rectam, plano ipsius perpendicularem, progredientis.

Nam latera Cylindri motui ejus minimè opponuntur: & Cylindrus, longitudine ejus in infinitum diminutâ, in Circulum vertitur.

PROP. XXXVII. THEOR. XXIX.

Cylindri, qui in Fluido compresso infinito, & non elastico, secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia, quæ oritur à magnitudine sectionis transversæ, est ad vim, quâ totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas Medii ad densitatem Cylindri quamproximè.

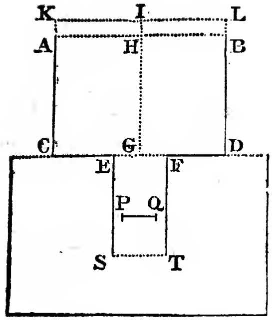
Nam si vas ABDC fundo suo, CD, superficiem aquæ stagnantis tangat, & aqua ex hoc vase per canalem cylindricum EFTS, horizonti perpendicularem, in aquam stagnantem effluat, locetur autem circellus PQ horizonti parallelus ubivis in medio canalis, & producatur CA ad K, ut sit AK ad CK in duplicatâ ratione, quam habet excessus orificii canalis EF supra circellum PQ ad circulum

lus idem PQ altitudo tota recta GH, ut 1 ad 2: erit V ad 2P ut vis, quâ aquæ premunt circulum PQ, ad pondus Cylindri aquei qui in vase cylindraceo, quale posuimus, circulum PQ ad perpendiculum insistit; hoc est ut EF^2 ad $2EF^2 - PQ^2$. Est autem $2EF^2 - PQ^2$ ad $EF^2 - \frac{1}{2}PQ$ ut 2 ad 1, hoc est ut 2P ad P. Cùm igitur sit $V : 2P = EF^2 : 2EF^2 - PQ^2$. Et $2P : P = 2EF^2 - PQ^2 : EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$; ex æquo erit $V : P = EF^2 : EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$. Q. E. D.

Habes, ni fallor, firmissimam hujus Corollarii probationem, modò vera sint ea quæ in novem superioribus et in ipsâ Propositione XXXVI. allegata sunt, atque illud præterea concesseris, motum aquarum, è vase cylindraceo amplissimo, ACDB, per rimam tenuissimam, EFQP, profluentium, eundem fore, quo ex angustissimo ejusdem altitudinis, quod basem circulum EF haberet, per eandem rimam fluerent. Illud autem Newtonus cùm per experimenta non satis exploratum haberet, idcirco istud suum *quantum sentio*, ut opinor, interposuit. Cæterùm hujus Corollarii rationes in sexto positas esse, è literis quibusdam Cotesii ad Newtonum primùm intellexi. In quibus Cotesius, postquam sextum illud Corollarium exposuerit, hæc subjungit. "Hoc Corollarium lucem aliquam tuo in Corollario decimo *quantum sentio* offundere possit."

Sed ne quid dissimulem, cum iis suffragium fero, qui hanc Propositionem XXXVI^m. cum decem quæ ei comitantur, Corollariis, suspectam habent.

De Motu Corporum



AB: manifeſtum eſt (per Caſ. 5. Caſ. 6. & Cor. 1. Prop. XXXVI.) quòd velocitas aquæ, tranſeuntis per ſpatium annulare inter circellum & latera vaſis, ea erit, quam aqua cadendo, & caſu ſuo deſcribendo altitudinem KC, vel IG, acquirere poteſt.

Et (per Corol. 10. Prop. XXXVI.) ſi vaſis latitudo ſit infinita, ut lineola HI evaneſcat & altitudines IG, HG æquentur: vis aquæ defluentis in circellum erit ad pondus Cylindri, cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $\frac{1}{2}$IG, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ quàm proximè. Nam vis aquæ, uniformi motu defluentis per totum canalem, eadem erit in circellum PQ, in quâcunque canalis parte locatum.

Claudantur jam canalis orificia EF, ST, & aſcendat circellus in Fluido undique compreſſo, &, aſcenſu ſuo, cogat aquam ſuperiorem deſcendere per ſpatium annulare inter circellum & latera canalis: & velocitas circelli aſcendentis erit ad velocitatem aquæ deſcendentis ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum PQ; & velocitas circelli aſcendentis ad ſummam velocitatum, hoc eſt, ad velocitatem relativam aquæ deſcendentis, quâ præterfluit circellum aſcendentem, ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum EF, ſive ut $EFq - PQq$ ad EFq. Sit illa velocitas relativa æqualis velocitati, quâ ſuprà oſtenſum eſt aquam tranſire per idem ſpatium annulare, dum circellus interea immotus manet; id eſt, velocitati, quam aqua, cadendo, & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IG, acquirere poteſt: & vis aquæ in circellum aſcendentem eadem erit ac priùs (per Legum Corol. V.) id eſt, reſiſtentia circelli aſcendentis erit ad pondus Cylindri aquæ, cujus baſis eſt circellus ille

(m) Hæc demonſtratio à Coteſio tòta eſt. Cùm verò tota poſita eſt in Propoſitione ſuperiore, cujus doctrinam multi ſuſpectam habuere, et in Corollario ejus decimo, quod vel ipſe Newtonus non niſi dubitanter allegavit, rem Phyſicis ut opinor haud ingratam fecero, ſi Viri Clariſſimi Henrici Pembertoni Propoſitiones duas, quæ in manus fortè noſtras pervenerunt, in lucem emiſero. Quarum ope quæ Newtono in hâc Propoſitione tradita ſunt, de vi renixûs, quâ liquores compreſſi ad motus corporum reſtinguendos polleant, ea ſubtiliſſimis quidem, eiſdem verò quàm maximè perſpicuis, rationibus confirmantur; nullâ ſuſpectæ Propoſitionis XXXVI. ratione habitâ. Sanè quæ ſuper quæſtione graviſſimâ, et è difficillimis unâ, quæ in Phyſicis tractari ſolent, tanto viro tam feliciter ſunt elucubrata, apud nos premere & abſcondere piaculum eſſet.

HEN-

Liber Secundus.

ille & altitudo eſt $\frac{1}{2}$IG, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ quamproximè. Velocitas autem circelli erit ad velocitatem, quam aqua, cadendo, & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IG, acquirit, ut $EFq - PQq$ ad EFq.

Augeatur amplitudo canalis in infinitum: & rationes illæ inter $EFq - PQq$ & EFq, interque EFq & $EFq - \frac{1}{2}PQq$ accedent ultimò ad rationes æqualitatis. Et propterea velocitas circelli ea nunc erit, quam aqua, cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IG, acquirere poteſt; reſiſtentia verò ejus æqualis evadet ponderi Cylindri, cujus baſis eſt circellus ille & altitudo dimidium eſt altitudinis IG, à quâ Cylindrus cadere debet, ut velocitatem circelli aſcendentis acquirat; & hâc velocitate Cylindrus, tempore cadendi, quadruplum longitudinis ſuæ deſcribet. Reſiſtentia autem Cylindri, hâc velocitate ſecundum longitudinem ſuam progredientis, eadem eſt cum reſiſtentiâ circelli (per Lemma IV.) ideoque æqualis eſt vi, quâ motus ejus, interea dum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, generari poteſt quamproximè.

Si longitudo Cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus ut & tempus, quo quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, augebitur vel minuetur in eâdem ratione; ideoque vis illa, quâ motus auctus vel diminutus, tempore pariter aucto vel diminuto, generari vel tolli poſſit, non mutabitur; ac proinde etiamnum æqualis eſt reſiſtentiæ Cylindri, nam & hæc quoque immutata manet per Lemma IV.

Si denſitas Cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus, ut & vis, quâ motus eodem tempore generari vel tolli poteſt, in eâdem ratione augebitur vel minuetur. Reſiſtentia itaque Cylindri cujuſcunque erit ad vim quâ totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, ut denſitas Medii ad denſitatem Cylindri quamproximè. Q.E.D. (m)

Fluidum

HENRICI PEMBERTONI

DE VI RENIXUS IN LIQUORIBUS COMPRESSIS PROPOSITIONES.

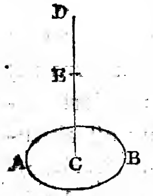
PROPOSITIO PRIMA. THEOREMA.

Aquâ, vel alio quovis Liquore, dato quovis foramine cum velocitate quâlibet æquabili prorumpente, quantitas motûs in liquore illo, qui dato quovis tempore effluxerit, ejus æqualis erit, quam vis gravitatis eodem tempore generaverit, in mole quâdam ejuſdem liquoris ſive Cylindraceâ ſive Priſmaticâ, quæ baſem

illud

Fluidum autem comprimi debet, ut ſit continuum: continuum verò eſſe debet, & non elaſticum, ut preſſio omnis, quæ ab ejus compreſſione

illud ipſum foramen habeat, quo liquor prorumpit, altitudinem verò ejus altitudinis duplam, à quâ ſi grave cadat velocitatem adeptum erit æquabilis illius, quâ liquor profluit, æqualem.



Sit AB foramen illud quo Liquor profluit; CD ſpatium quod corpus, rectâ progrediendo, eâ cum velocitate quâ liquor fertur, dato tempore T confecerit. Ponatur CE altitudini æqualis, à quâ ſi grave cadat, velocitatem eam, quæ profluentis eſt liquoris, adeptum erit. Ac primùm, datum tempus T illud ipſum ſit, quo corpus, rectâ cadendo, ſpatium CE confecerit. Erit igitur longitudo CD illius CE dupla. At verò Liquor omnis, qui dato tempore, T, foramine AB profluxerit, Cylindri vel Priſmatis, qui pro baſe foramen illud AB habeat, altitudinem ipſam CD, mole ſuâ æqualis erit; hoc eſt Cylindri vel Priſmatis qui baſem habeat AB, altitudinem duplam rectæ CE. Et velocitas profluendi eadem eſt, quam vis gravitatis tempore caſûs recti per CE, hoc eſt dato tempore T, generaverit. Motus igitur Cylindri ejus vel Priſmatis, iſtâ cum velocitate profluentis, is erit, quem in eodem Cylindro vel Priſmate vis gravitatis, eodem tempore T, generaverit. Nimirum cùm tantundem fuerit materiæ motæ eademque velocitas.

Jam verò tempus datum T, aliud ſit ab illo, quo corpus grave, caſu recto, ſpatium CE confecerit. Nihilominus illud omne liquoris, quod foramine AB, dato tempore T, profluxerit, Cylindri vel Priſmatis qui baſem AB, altitudinem illam CD habeat, mole ſuâ æquale erit. Et illud omne quod tempore caſûs recti per CE profluxerit, mole itidem ſuâ, Cylindri vel Priſmatis qui baſem habeat AB, altitudinem 2CE, æquale erit. Unde illud omne liquoris, quod dato tempore T profluxerit, ad illud omne quod profluxerit tempore caſûs recti per CE, rationem habebit quam CD ad duplam CE. Sed et tempus datum T ad tempus caſûs recti per CE rationem habet quam CD ad 2CE; nimirum cùm illa CD, 2CE ſint ſpatia temporibus illis, pari velocitatis gradu, æquabiliter confecta. Velocitates autem, quas vis gravitatis temporibus diverſis generat, ſunt ſemper inter ſe ut tempora, quibus generantur. Velocitas igitur, quam vis gravitatis dato tempore T generaverit, ad velocitatem quam tempore caſûs recti per CE generaverit, hoc eſt ad liquoris profluendi velocitatem, rationem habebit quam CD ad 2CE. Cùm igitur liquoris illud omne, quod foramine AB dato tempore T profluxerit, ad illud omne quod ejuſdem liquoris Cylindrus vel Priſma in ſe contineret, cujus baſis AB, altitudo dupla illius, à quâ grave cadendó liquoris profluentis velocitatem adeptum eſſet; cùm inquam moles illa liquoris, dato tempore T profuſa, ad hanc alteram ejuſdem liquoris molem rationem habeat, quam CD ad 2CE, hoc eſt quam velocitas dato tempore T à gravitate generanda ad ipſam profluendi velocitatem; motus utique liquoris, qui dato tempore T profluxerit, illius æqualis erit, quem vis gravitatis dato tempore T in mole illâ alterâ Cylindraceâ vel Priſmaticâ generaret. Nimirum propter materiæ quantitates velocitatum rationibus contrariè reſpondentes. Q. E. D.

Cor. 1. Vis quâ liquor foramine dato AB prorumpat, æqualis erit ponderi molis cujuſdam ejuſdem liquoris, ſive cylindraceæ ſive priſmaticæ, quæ baſem AB, altitudinem verò ejus altitudinis duplam habeat, à quâ ſi grave cadat velocitatem adeptum erit æquabilis illius, quâ liquor profluit, æqualem. Namque cùm æquales ſemper ſint motus, quos vis ponderis hujus Cylindri vel Priſmatis, viſque, quâ liquor per foramen propellitur, eiſdem temporibus generaverint, vires utique genetrices inter ſe æquales erunt.

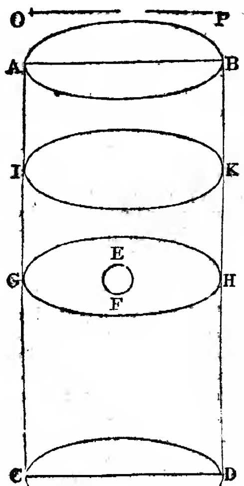
Cor. 2. Motus varii, quos liquor, ſi dato foramine variis cum velocitatibus profluxerit, temporibus æqualibus generaverit, ii rationem inter ſe velocitatum duplicatam gerent. Namque motus illi ſunt iidem, quos vis gravitatis, dato tempore profluendi, in Cylindris vel Priſmatis liquoris profluentis generaverit, qui pro baſi foramen datum communiter omnes habeant, altitudines earum ſingulatim duplas, à quibus gravia ſi cadant velocitates adepta erunt earum, quibuſcum liquor profluere intelligitur, æquales. Sed motus, quos vis gravitatis in corporibus diverſis dato tempore generat, quantitatum materiæ in eiſdem rationem gerunt; quæ corporum ipſorum ratio erit, ſi ex ſimili materiâ conſtant. Corpora autem illa, Cylindracea vel Priſmatica, ex ſimili materiâ conſtant, et altitudinum inter ſe rationem gerunt. Quare motus de quibus agitur, erunt inter ſe ſicut Cylindrorum iſtorum vel Priſmatum altitudines. Altitudines autem illæ, ſecundum Doctrinam Galilæi, duplicatam velocitatum rationem gerunt. Quare et motus de quibus agitur duplicatam inter ſe velocitatum rationem ſervant.

PROPO-

compreſſione oritur, propagetur in inſtanti, &c, in omnes moti corporis partes æqualiter agendo, reſiſtentiam non mutet. Preſſio

PROPOSITIO II. PROBLEMA.

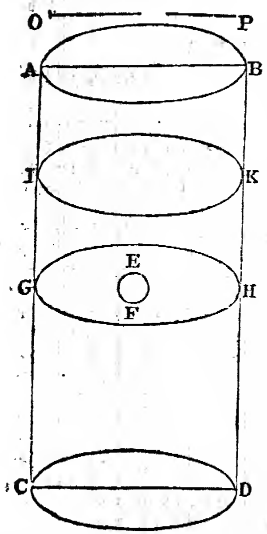
Invenire vim renixûs in Liquore quovis Compreſſo, ad motum corporis Cylindracei reſtinguendum, quod ſecundum axis ſui directionem per liquorem illum progrediatur.



Puta iſtiuſmodi Liquorem aliquem per canalem cylindraceum ACDB, cum velocitate æquabili, ſecundum directionem axis Cylindri ferri. Tum in hoc canali ponatur circulus quidam EF, tali ſitu ut cum baſibus canalis parallelus ſit. His poſitis, impetus liquoris G in hunc circulum videamus quiſnam erit.

Nempe Liquor, qui, dum nullus erat in canali circulus, omni parte æquabiliter progrediebatur, nunc incitatiùs feretur inter latera canalis et circulum, quàm ubi circulum nondum attigerit: eâ quidem ratione, quâ canalis baſis ſpatium illud inter latera canalis et circulum exſuperaverit. Quare ſi canalis plano OH per circulum ſecetur, alioque IK quod cum priore parallelum ſit, ab eâ parte unde curſus ſit liquoris; velocitas liquoris in ſpatio GEHF ad velocitatem ejus in plano IK rationem habebit eam, quam circulus IK ad ſpatium GEHF. Atqui major illa liquoris velocitas, inter circulum et latera canalis, argumento eſt, partem liquoris illam, quæ circulum præterlabitur, vi aliquâ à partibus ulterioribus propelli. Unde hæ viciſſim ab illâ repellentur. Unde ſequetur, liquorem inter circulum & latera canalis velociùs, ante circulum, ut in plano IK, tardiùs ferri, quàm ſi circulus in canali nullus eſſet; licet ab eâdem vi externâ, ſive adſit circulus, ſive ille abſit, moles liquida incitetur. Quin et major liquoris in ſpatio GEHF velocitas ad minorem ejus in plano IK velocitatem eam neceſſe eſt rationem habeat, quæ efficiat, ut decrementum motûs, dato tempore genitum, in liquore qui per circulum IK profluxerit, æquale ſit incremento motûs, eodem tempore genito, in liquore illo qui per ſpatium GEFH evaſerit. Verùm hunc in finem velocitas quæ, abſente circulo, liquoris fuerit, ea velocitatum quando adſit circulus, in plano IK, & in ſpatio GEHF, inæqualium, proportione media eſſe debet. Ita enim, quoniam velocitas in ſpatio GEHF ad velocitatem in plano IK, quando adſit circulus, rationem habet quam circulus IK ad ſpatium illud GEHF; circulus utique IK ad ſpatium GEHF rationem habebit duplicatam ejus, quam velocitas liquoris in ſpatio GEHF ad primariam ejus, qualis abſente circulo ea fuerit, velocitatem; necnon duplicatam ejus quam velocitas hæc liquoris primaria, ad imminutam ejus, adveniente circulo EF, in plano IK velocitatem. Circulus igitur IK erit ad ſpatium GEHF, ut motus, dato quovis tempore in liquore illo genitus, qui, circulo EF in medio canali poſito, per ſpatium GEHF evaſerit, ad motum eodem tempore generandum in liquore, qui, abſente circulo, cum primariâ ſuâ velocitate per idem ſpatium GEHF profluxiſſet. (Prop. I. Cor. 2.) Sed ut circulus IK ad ſpatium GEHF, ita erit motus dato tempore in liquore illo omni generandus, qui cum primariâ velocitate per circulum IK profluxiſſet, ad motum, eodem tempore, in eâ liquoris ejus parte generandum, quæ, cum eâdem velocitate, per ſpatium GEHF profluxiſſet. Motus igitur, dato tempore genitus, in liquore illo, qui per ſpatium inter circulum EF, in medio canali poſitum, et latera canalis evaſerit, ei æqualis erit, qui, abſente circulo EF, in liquore, cum primariâ ſuâ velocitate per circulum IK profluente, eodem tempore generatus eſſet. (El. v. 9.) Rurſum cùm circulus IK ad ſpatium GEHF rationem habeat duplicatam ejus, quam velocitas liquoris primaria ad imminutam ejus in plano IK velocitatem (id enim antè oſtenſum fuit) eam utique habebit circulus ille IK ad ſpatium GEHF quam motus, dato tempore in liquore generandus, qui cum primariâ velocitate, abſente circulo EF, per circulum IK profluxiſſet, ad motum eodem tempore genitum in liquore illo, qui, circulo EF in medio canali poſito, per eundem circulum IK tardiùs profluxerit. (Prop. I. Cor. 2.) Sed ut circulus IK ad ſpatium GEHF, ita erit motus dato tempore in liquore illo omni generandus, qui, circulo EF abſente, per circulum IK cum primariâ velocitate profluxiſſet, ad motum eodem tempore in eâ liquoris ejus parte generandum,

fio utique, quæ à motu corporis oritur, impenditur in motum partium



dum, quæ cum eâdem velocitate per ſpatium GEHF profluxiſſet. Motus igitur, dato tempore genitus, in liquore, qui, circulo EF in medio canali poſito, per circulum totum IK cum imminutâ velocitate profluxerit, æqualis erit ei, qui, circulo EF abſente, eodem tempore in liquore genitus eſſet cum primariâ ſuâ velocitate per ſpatium GEHF profluente. (El. v. 9.) Ex hiſce verò ſequitur, quantum motûs liquori in circulo IK deceſſerit, circulo utique EF in medio canali poſito, tantundem ei in ſpatio GEHF, inter circulum EF et latera canalis, reſtitui. Etenim quando motus in toto circulo IK in eum minuerit, qui, ſi abeſſet circulus EF, in ſpatio minore GEHF eſſet, tum motus in minore illo ſpatio GEHF in eum increverit, qui antè in toto circulo IK fuerat.

Jam ſit baſis canalis, ſive circulus IK, ad ſpatium GEHF ut M^2 ad N^2. Sit etiam O ad P ut velocitas liquoris primaria ad minorem eam liquoris per circulum IK profluentis, quando adſit circulus EF in medio canali. Erit igitur P ad O ut N ad M, et P ad $O-P$ ut N ad $M-N$, ſive ut $N\times\overline{M+N}$ ad M^2-N^2. Solidum igitur $P\times\overline{M^2-N^2}$ Solido $N\times\overline{M+N}\times\overline{O-P}$ æquale erit; et $\overline{M^2-N^2}\times P$ erit ad $M^2\times\overline{O-P}$ ut $N\times\overline{M+N}\times\overline{O-P}$ ad $M^2\times\overline{O-P}$; hoc eſt ut $N\times\overline{M+N}$ ad M^2, ſive ut $M\times N+N^2$ ad M^2. Hinc omnis illa liquoris moles, cui circulus EF, in medio canali poſitus, tranſitum per IK dato quovis tempore negaverit; hæc ad molem illam, quæ, ut obſiſtat circulus EF, parte tamen quâvis plani IK circulo EF æquali, eodem tempore profluxerit: moles, inquam, liquoris, cui circulus EF, in medio canali poſitus, per IK tranſitum negaverit, ad hanc alteram molem rationem habebit quam M^2 ad $M\times N+N^2$; ſive eam, quam baſis canalis ad illud habet quo circulum EF ipſa baſis exſuperat, unà cum illo quod hujus exſuperantiæ et ipſius baſis proportione medium eſt. Namque prior moles ad alteram rationem habebit, quæ componitur è ratione velocitatis, in plano IK extinctæ, ad velocitatem in illo plano ſuperſtitem (hoc eſt è ratione $O-P$ ad P), cum ratione baſis canalis ad circulum EF; hoc eſt cum ratione ipſius M^2 ad M^2-N^2. Verùm ex eiſdem rationibus compoſita eſt ratio ſolidi $M^2\times\overline{O-P}$ ad $\overline{M^2-N^2}\times P$; ſive quadrati ex M ad ſpatium $MN+N^2$.

Hæc erit Circuli immobilis efficientia ad ſiſtendum Liquoris curſum. Deinceps diſquiramus, quænam Liquoris futura ſit ad impediendum Circuli motum, ſi ille ſecundum axem canalis propellatur.

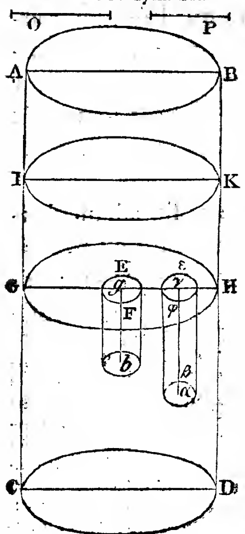
Quoniam ea erat Circuli EF immobilis efficientia, quâ ſe ad liquoris curſum objiciendo, molem ejus, quæ dato tempore per canalis circulum quemvis IK proflueret, minorem redderet; ſi circulus ille EF vim omnem molis ejus liquidæ ſuſtinuiſſet, cujus corpuſcula ad perpendiculum ei illidebantur, omnem utique eorum corpuſculorum motum extinxiſſet, ſimul atque eà in eum impingerentur. Unde liquoris moles, cui circulus iſte tranſitum per IK dato quovis tempore negâſſet, ea fuiſſet, quæ parte quâvis circuli IK ipſi EF æquali, eo tempore, proflueret. Unde circulus ipſe EF vim ſuſtinuiſſet ejus æqualem, quâ liquor aliquis, ejus ſimilis quem in canali ponimus, tali foramine prorumpat; ſive eam, quæ ponderi columnæ cujuſdam ejus liquoris cylindraceæ æqualis eſſet, quæ baſem haberet circulum EF, altitudinem verò duplam illius, à quâ ſi grave cadat velocitatem adeptum erit æquabilis illius æqualem, quâcum liquor in Canali per IK profluebat. (Prop. I. Cor. 1.) Verùm minor erat liquoris moles, cui circulus EF tranſitum negabat; ſiquidem M^2 minus fuerit quàm $MN+N^2$, modò circulus EF præ latitudine canalis perexiguus ſit. Liquor igitur, qui in circulum EF illidebatur, eâ duntaxat velocitatis ſuæ parte eum urgebat, cujus extinctione minor illa moles liquida, cui circulus EF tranſitum negabat, retinenda et curſu ſiſtenda erat. Et cùm vis liquoris alicujus profluentis velocitatum profluendi rationem duplicatam ſervet (Prop. I. Cor. 2.) vis, quam circulus ille EF immotus ſuſtinebat, ad pondus columnæ liquoris, cujus diximus, cylindraceæ rationem habuerit ejus duplicatam, quam baſis Canalis ad illud quo baſis circulum EF exſuperet, unà cum illo quod ejus exſuperantiæ et ipſius baſis proportione medium ſit.

Claudatur jam canalis; & in liquore undique compreſſo et ſtagnante, puta circulum EF, ſecundum directionem axis canalis cylindracei ACDB, verſus IK incitari. Circulus, movendo, Liquori aliter immoto motum dabit; qui talis erit, ut velocitas liquoris, circulo cedentis, quâcum inter circulum & latera canalis feretur, ad circuli ipſius velocitatem rationem habeat, quam area circuli ad ſpatium GEHF. Quapropter hæ velocitates ſimul ſumptæ, ſive velocitas illa omnis, quâcum liquor et circulus ſe mutuò præterlabuntur, ad ſolam circuli velocitatem, ſive ad eam quâcum partes liquoris ulteriores ad circulum admoventur, rationem habebit quam tota baſis Canalis ad ſpatium GEHF. Hinc motus liquoris, Circuli ratione, idem prorſus erit, qui antè erat; quando, Circulo immoto, Liquor propio motu in eum impetum faciebat. Igitur Circulus eam percipiet vim renixûs, quæ æqualis erit ponderi columnæ cujuſdam Liquoris cylindraceæ, quæ baſem habeat circulum EF, altitudinem verò, quæ ad duplam illius, à quâ ſi grave cadat velocitatem circuli adeptum erit, rationem habeat duplicatam ejus, quæ eſt circuli GH ad ſpatium GEHF unà cum illo, quod circuli GH et ſpatii GEHF proportione medium eſt. Atqui ratio illa duplicata, ſi amplitudo canalis infinitè augeatur, ultimò unitatis ad quaternarium erit. Et vis, quam Circulus percipiet, æqualis fiet ponderi cylindraceæ cujuſdam Liquoris columnæ, quæ baſem Circulum ipſum habeat, altitudinem verò ejus altitudinis dimidiam, à quâ ſi grave cadat velocitatem circuli adeptum erit.

partium Fluidi generandum, & reſiſtentiam creat. Preſſio autem quæ

Univerſè vis renixûs in Circulum ea erit, quæ ad pondus cylindraceæ cujuſdam liquoris columnæ, cujus baſis circulus ipſe, altitudo dimidia ejus à quâ ſi grave cadat velocitatem circuli adeptum erit, rationem habeat ejus rationis duplicatam, quam dupla baſis canalis habet ad illud quo baſis illa circulum exſuperet, unà cum illo quod exſuperantiæ illius & ipſius baſis proportione medium ſit."

Hæc ferè Pembertonus; niſi quòd nonnulla, quæ nimis breviter eum dixiſſe exiſtimavimus, nos, Latinè convertentes quæ ille Anglicè ſcripſerat, explicatiùs dicere conati ſumus. Ex his autem illud facilè comprobari poſſit, quod Newtonus in Propoſitione ſuâ XXXVII. conſtituere voluit, de vi renixûs quâ pollerent Liquores Compreſſi, quorum moles infinitæ eſſent, ad motum corporis cujuſvis Cylindracei reſtinguendum, quod ſecundum axis ſui directionem in tali liquore progrederetur. Ea nempe illa vis renixûs erit, quæ ad vim aliam, quæ totum corporis Cylindracei motum vel generare vel extinguere poſſet, tempore ejus æquali, quo velocitate ſuâ æquabili quadruplam longitudinem ſuam Cylindrus ille conficeret, rationem habebit quam Liquoris denſitas ad denſitatem materiæ in Cylindro.

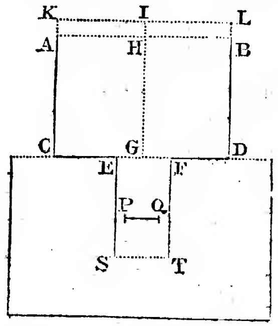


Intelligatur è quâvis materiâ Cylindrus baſe circulo $\iota\varphi$, axe $\gamma\alpha$, qui in liquore aliquo infinito, maximè compreſſo, ſecundum directionem axis ſui $\gamma\alpha$ progrediatur. Sit D ad Δ ut denſitas liquoris ad denſitatem materiæ, quâ Cylindrus $\iota\varphi\gamma\alpha$ factus eſt. Significet litera V datam quandam vim, quæ motum omnem Cylindri illius vel generare vel tollere poſſet, tempore ejus æquali, quo velocitate ſuâ æquabili longitudinem $4\gamma\alpha$ Cylindrus ille conficeret. Deſignet litera R vim renixûs in liquore, ad motum corporis $\iota\varphi\gamma\alpha$ reſtinguendum. Dico talem eſſe R, quæ ſit ad V ut D ad Δ. Capiatur enim $\gamma\beta$ dimidia ejus altitudinis, à quâ ſi grave cadat velocitatem adeptum erit ejus, quâcum cylindrus $\iota\varphi\gamma\alpha$ progreditur, æqualem. Baſe circulo EF, ipſius $\iota\varphi$ æquali, altitudine gb ipſius $\gamma\beta$ æquali, intelligatur Cylindrus è materiâ quâdam, cui denſitas eadem quæ Liquoris ſit. Hic Cylindrus, pari cum altero illo, $\iota\varphi\gamma\alpha$, velocitate, ſecundum axis ſui directionem in liquore progrediatur. Motus cylindri totius $\iota\varphi\gamma\alpha$ ad motum in eâ ejus parte, cujus longitudo $\gamma\beta$, rationem habet quam $\gamma\alpha$ ad $\gamma\beta$. Eandem verò tempus, quo cylindrus ille longitudinem $4\gamma\alpha$, ad tempus, quo longitudinem $4\gamma\beta$ conficeret, habet. Vis igitur V, quæ motum cylindri totius vel generare vel extinguere poſſit, tempore ejus æquali, quo cylindrus ille longitudinem $4\gamma\alpha$ conficeret; eadem, quo tempore cylindrus longitudinem $4\gamma\beta$ conficeret, motum ejus partis, cujus longitudo eſt $\gamma\beta$, vel generare vel extinguere poſſet. Jam verò vis R, cùm ex iis quæ nos cum Pembertono oſtendimus, ponderi Cylindri EFgb æqualis ſit, cùmque pondus cylindri EFgb motum ejus cylindri totum vel generare

De Motu Corporum

quæ oritur à compressione Fluidi, utcunque fortis sit, si propagetur in instanti, nullum generat motum in partibus Fluidi Continui, nullam omninò inducit motûs mutationem; ideoque resistentiam nec auget nec minuit. Certè actio Fluidi, quæ ab ejus compressione oritur, fortior esse non potest in partes posticas corporis moti quàm in ejus partes anticas, ideoque resistentiam in hâc Propositione descriptam minuere non potest: & fortior non erit in partes anticas quàm in posticas, si modò propagatio ejus infinitè velocior sit, quàm motus corporis pressi. Infinitè autem velocior erit, & propagabitur in instanti, si modò Fluidum sit Continuum, & non Elasticum.

Corol. 1. Cylindrorum, qui secundum longitudines suas in Mediis continuis infinitis uniformiter progrediuntur, resistentiæ sunt in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatum & duplicatâ ratione diametrorum & ratione densitatis Mediorum (n).



Corol. 2. Si amplitudo canalis non augeatur in infinitum, sed Cylindrus in Medio quiescente incluso secundum longitudinem suam progrediatur, & interea axis ejus cum axe canalis coincidat: resistentia ejus erit ad vim, quâ totus ejus motus, quo tempore quadruplum longitudinis suæ describit, vel generari possit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ semel, & ratione EFq ad $EFq - PQq$ bis (o), & ratione densitatis Medii ad densitatem Cylindri.

Corol. 3. Iisdem positis, & quòd longitudo L sit ad quadruplum longitudinis Cylindri in ratione quæ componitur ex ratione $EFq - \frac{1}{2}PQq$ ad EFq semel, & ratione $EFq - PQq$ ad EFq bis: resistentia

nerare vel tollere posset, tempore ejus æquali, quo cylindrus velocitate suâ æquabili quadruplum suæ longitudinis conficeret; siquidem velocitas cylindri æquabilis ea est, quam corpus grave, rectâ cadendo per spatium $2gb$, adeptum erit; hæc cùm ita sint, vis R talis erit, quæ motum omnem cylindri $EFgb$, tempore ejus æquali quo longitudinem $4gb$ ille conficeret, generare vel tollere posset. Jam verò cùm æquales sint Cylindrorum, $EFgb$, $\epsilon\phi\gamma\beta$, progrediendi velocitates, cùm longitudines etiam gb, $\gamma\beta$ inter se æquales sint, idcirco æqualia erunt tempora, quibus Cylindri illi longitudines æquales, $4gb$, $4\gamma\beta$, conficiant. Vires autem R, V erunt inter se, ut motus quos, temporibus illis æqualibus, generare vel extinguere possent; hoc est ut motus Cylindrorum æqualium, $EFgb$, $\epsilon\phi\gamma\beta$, pari cum velocitate progredientium; sive ut densitates materiæ

7

Liber Secundus.

sistentia Cylindri erit ad vim, quâ totus ejus motus, interea dum longitudinem L describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas Medii ad densitatem Cylindri.

Scholium.

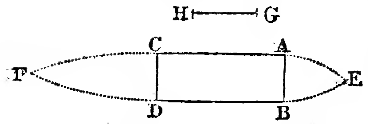
In hâc Propositione Resistentiam investigavimus, quæ oritur à solâ magnitudine transversæ sectionis Cylindri, neglectâ resistentiæ parte, quæ ab obliquitate motuum oriri possit. Nam quemadmodum in casu primo Propositionis XXXVI. obliquitas motuum, quibus partes aquæ in vase undique convergebant in foramen EF, impedivit effluxum aquæ illius per foramen: sic in hâc Propositione, obliquitas motuum, quibus partes aquæ ab anteriore Cylindri termino pressæ, cedunt pressioni & undique divergunt, retardat eorum transitum per loca in circuitu termini illius antecedentis versus posteriores partes Cylindri; efficitque ut Fluidum ad majorem distantiam commoveatur, & resistentiam auget, idque in eâ ferè ratione, quâ effluxum aquæ è vase diminuit, id est, in ratione duplicatâ 25 ad 21 circiter. Et quemadmodum, in Propositionis illius casu primo, effecimus ut partes aquæ perpendiculariter, & maximâ copiâ transirent per foramen EF, ponendo, quòd omnis aqua in vase, quæ in circuitu cataractæ congelata fuerat, & cujus motus obliquus erat & inutilis, maneret sine motu: sic in hâc Propositione, ut obliquitas motuum tollatur, & partes aquæ, motu maximè directo & brevissimo cedentes, facillimum præbeant transitum Cylindro, & sola maneat resistentia, quæ oritur à magnitudine sectionis transversæ, quæque diminui non potest nisi diminuendo diametrum Cylindri; concipiendum est, quòd partes Fluidi, quarum motus sunt obliqui & inutiles & resistentiam creant, quiescant inter se ad utrumque Cylindri terminum, & cohæreant & Cylindro jungantur. [Sit ABCD rectangu-

riæ in Cylindris illis. Sed densitas materiæ in Cylindro $EFgb$ densitati Liquoris posita est æqualis; sive ei, quæ ad densitatem materiæ in Cylindro $\epsilon\phi\gamma\beta$ rationem habeat quam D ad Δ. Vis igitur R talis erit quæ ad vim V rationem habebit quam D ad Δ. Q. E. D.

(n) Hujus demonstratio eadem ferè quæ Corollarii 5. Prop. XXXV.

(o) Pro hâc ratione compositâ, in hoc & proximo etiam Corollario, substituenda est duplicata ejus quam habet $2.EF^2$ ad $\overline{EF^2 - PQ^2} + EF\sqrt{\overline{EF^2 - PQ^2}}$, ut ex iis quæ cum Pembertono ostendimus manifestum est. Cæterùm ratio Pembertoni duplicata à compositâ illâ, quam Newtonus posuit, haud multum abibit, nisi magnus fuerit circulus PQ ratione basis canalis.

Fff 2 lum,



lum, & ſint AE & BE arcus duo Parabolici, axe AB deſcripti, latere autem recto quod ſit ad ſpatium HG, deſcribendum à Cylindro cadente, dum velocitatem ſuam acquirit, ut HG ad $\frac{1}{2}$AB. Sint etiam CF & DF arcus alii duo Parabolici, axe CD & latere recto, quod ſit prioris lateris recti quadruplum, deſcripti] (P); & convolutione figuræ circum axem EF generetur Solidum; cujus media pars ABDC ſit Cylindrus de quo agimus, & partes extremæ, ABE & CDF, contineant partes Fluidi inter ſe quieſcentes, & in corpora duo rigida concretas, quæ Cylindro utrinque, tanquam caput & cauda, adhæreant. Et Solidi EACFDB, ſecundum longitudinem axis ſui FE in partes verſus E progredientis, reſiſtentia, ea erit quamproximè, quam in hâc Propoſitione deſcripſimus; id eſt, quæ rationem illam habet ad vim, quâ totus Cylindri motus, interea dum longitudo 4AC motu illo uniformiter continuato deſcribatur, vel tolli poſſit vel generari, quam denſitas Fluidi habet ad denſitatem Cylindri quamproximè. Et hâc vi reſiſtentia minor eſſe non poteſt quàm in ratione 2 ad 3, per Corol. 7. Prop. XXXVI.

LEMMA V.

Si Cylindrus, Sphæra & Sphærois, quorum latitudines ſunt æquales, in medio canalis cylindrici ita locentur ſucceſſivè, ut eorum axes cum axe canalis coincidant: hæc corpora fluxum aquæ per canalem æqualiter impedient.

Nam ſpatia inter Canalem & Cylindrum, Sphæram, & Sphæroidem, per quæ aqua tranſit, ſunt æqualia: & aqua per æqualia ſpatia æqualiter tranſit.

Hæc ita ſe habent ex hypotheſi, quòd aqua omnis ſupra Cylindrum Sphæram vel Sphæroidem congelatur, cujus fluiditas ad celerrimum aquæ tranſitum non requiritur, ut in Corol. 7. Prop. XXXVI. explicui.

LEMMA

(P) A Coteſio ſunt quæ uncis incluſimus. Eorum rationes in Corollariis Propoſitionis XXXVI. ſeptimo

LEMMA VI.

Iiſdem poſitis, corpora prædicta æqualiter urgentur ab aquâ per canalem fluente.

Patet per Lemma V. & Motûs Legem tertiam. Aqua utique & corpora in ſe mutuò æqualiter agunt.

LEMMA VII.

Si aqua quieſcat in canali, & hæc corpora in partes contrarias æquali velocitate per canalem ferantur: æquales erunt eorum reſiſtentiæ inter ſe.

Conſtat ex Lemmate ſuperiore, nam motus relativi iidem inter ſe manent.

Scholium.

Eadem eſt ratio corporum omnium convexorum & rotundorum, quorum axes cum axe canalis coincidunt. Differentia aliqua ex majore vel minore frictione oriri poteſt; ſed in his Lemmatis corpora eſſe politiſſima ſupponimus, & Medii tenacitatem & frictionem eſſe nullam; & quòd partes Fluidi, quæ, motibus ſuis obliquis & ſuperfluis, fluxum aquæ per canalem perturbare, impedire, & retardare poſſunt, quieſcant inter ſe tanquam gelu conſtrictæ, & corporibus ad ipſorum partes anticas & poſticas adhæreant, perinde ut in Scholio Propoſitionis præcedentis expoſui. Agitur enim in ſequentibus de reſiſtentiâ omnium minimâ, quam corpora rotunda, datis maximis ſectionibus tranſverſis deſcripta, habere poſſunt.

Corpora Fluidis innatantia, ubi moventur in directum, efficiunt ut Fluidum ad partem anticam aſcendat, ad poſticam ſubſidat, præſertim ſi figurâ ſint obtuſâ; & inde reſiſtentiam paulo majorem ſentiunt, quàm ſi capite & caudâ ſint acutis. Et corpora in Fluidis Elaſticis mota, ſi antè & pòſt obtuſa ſint, Fluidum paulo magis condenſant ad anticam partem, & paulo magis re-

ſeptimo et octavo poni nemo non intelligit: infido ſanè ſolo, ut mea fert opinio.

laxant

laxant ad posticam; & inde resistentiam paulo majorem sentiunt, quàm si capite & caudâ sint acutis. Sed nos in his Lemmatis & Propositionibus non agimus de Fluidis Elasticis, sed de non Elasticis; non de insidentibus Fluido, sed de altè immersis. Et ubi resistentia corporum in Fluidis non Elasticis innotescit, augenda erit hæc resistentia aliquantulum, tam in Fluidis Elasticis, qualis est Aer, quàm in superficiebus Fluidorum stagnantium, qualia sunt Maria & Paludes.

PROP. XXXVIII. THEOR. XXX.

Globi, in Fluido compresso, infinito, & non elastico uniformiter progredientis, resistentia est ad vim, quâ totus ejus motus, quo tempore octo tertias partes diametri suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas Fluidi ad densitatem Globi quamproximè.

Nam Globus est ad Cylindrum circumscriptum ut duo ad tria; & propterea vis illa, quæ tollere possit motum omnem Cylindri interea dum Cylindrus describat longitudinem quatuor diametrorum, Globi motum omnem tollet, interea dum Globus describat duas tertias partes hujus longitudinis, id est, octo tertias partes diametri propriæ. Resistentia autem Cylindri est ad hanc vim quamproximè ut densitas Fluidi ad densitatem Cylindri vel Globi per Prop. XXXVII. & resistentia Globi æqualis est resistentiæ Cylindri per Lem. V, VI, VII. Q. E. D.

Corol. 1. Globorum, in Mediis compressis infinitis, resistentiæ sunt in ratione, quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatis, & duplicatâ ratione diametri, & ratione densitatis Mediorum.

Corol. 2. Velocitas maxima quâcum Globus, vi ponderis sui comparativi, in Fluido resistente potest descendere, ea est, quam acquirere

(q) DESIGNANTE literâ *d* diametrum Globi, designet litera s spatium quod conficeret, quo tempore motus ejus, ex renixu liquoris circumfusi, parte dimidiâ minuerit. Jam in figurâ Cor. 6. Prop. XXXV. quando EF semissis est rectæ BC, erit et AB semissis rectæ AE. Unde designante *t* tempus illud, per BE expositum, quo Globi motus parte dimidiâ minor factus fuerit, literâ verò T tempus expositum per AB, quo vis renixûs, qualis initio motûs erat, omnem globi motum extingueret, erit nimirum $T + t$, sive AF, $= 2T$ sive 2.AB; et $T = t$. Quare (per Cor. 7. Prop. XXXV.) spatium s ad spatium illud quod Globus, cum motu illo quem initio habuit, tempore *t* æquabiliter confecisset, rationem habebit quam numerus, qui factus fuerit è logarithmo binarii Briggiano in numerum 2,30258 + multiplicato, ad unitatem habet. Sed spatium illud quod Globus, cum motu quem initio habuit tempore *t* æquabiliter confecisset, huic $\frac{8}{3}d$ æquale. Nam propter æquales AB,

acquire potest Globus idem, eodem pondere, sine resistentiâ cadendo, & casu suo describendo spatium, quod sit ad quatuor tertias partes diametri suæ ut densitas Globi ad densitatem Fluidi. Nam Globus tempore casûs sui, cum velocitate cadendo acquisitâ, describet spatium quod erit ad octo tertias diametri suæ, ut densitas Globi ad densitatem Fluidi; & vis ponderis motum hunc generans, erit ad vim quæ motum eundem generare possit, quo tempore Globus octo tertias diametri suæ eâdem velocitate describit, ut densitas Fluidi ad densitatem Globi: ideoque per hanc Propositionem, vis ponderis æqualis erit vi resistentiæ, & propterea Globum accelerare non potest.

Corol. 3. Datâ & densitate Globi, & velocitate ejus sub initio motûs, ut & densitate Fluidi compressi quiescentis, in quâ Globus movetur; datur ad omne tempus & velocitas Globi, & ejus resistentia, & spatium ab eo descriptum, per Corol. 7. Prop. XXXV.

Corol. 4. Globus in Fluido compresso quiescente ejusdem secum densitatis movendo, dimidiam motûs sui partem priùs amittet, quàm longitudinem duarum ipsius diametrorum descripserit, per idem Corol. 7 (q).

PROP. XXXIX. THEOR. XXXI.

Globi per Fluidum, in canali cylindrico clausum & compressum, uniformiter progredientis, resistentia est ad vim, quâ totus ejus motus, interea dum octo tertias partes diametri suæ describit, vel generari possit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad excessum hujus orificii supra dimidium circuli maximi Globi, & ratione duplicatâ orificii canalis ad excessum hujus orificii supra circulum maximum Globi (r), & ratione densitatis Fluidi ad densitatem Globi quamproximè.

AE, BE (fig. Cor. 6. Prop. XXXV.) erunt rectangula AB × EC, BG inter se æqualia. Sed BG est ad AB × BC ut spatium, quod globus cum motu suo primario, BC, tempore *t*, vel BE, confecisset, ad spatium quod confecisset tempore T vel AB, quo vis aliqua, æqualis ejus quæ initio fuit liquoris circumfusi vis renixûs, motum omnem BC extingueret. Quare hæc spatia inter se æqualia erunt. Horum verò posterius, propter æqualem materiæ in Globo et Liquoris circumfusi densitatem, spatio $\frac{8}{3}d$ æquale erit (per Prop. XXXVIII.) Quare et prius eidem $\frac{8}{3}d$ æquale. Quapropter $s : \frac{8}{3}d = \overline{\log. 2} \times 2{,}30258 : 1$. Hinc $s = d \times 1{,}848$. Ergo spatium s minus quàm $2d$.

(r) Pro ratione ex duabus hisce compositâ, ratio duplicata, quæ in Corollariis Prop. XXXVII. secundo tertioque substituebatur, eadem hìc substituenda est.

Patet

Patet per Corol. 2. Prop. XXXVII. procedit verò demonstratio quemadmodum in Propositione præcedente.

Scholium.

In Propositionibus duabus novissimis (perinde ut in Lem. V.) suppono quòd aqua omnis congelatur quæ Globum præcedit, & cujus fluiditas auget resistentiam Globi. Si aqua illa omnis liquescat, augebitur resistentia aliquantulum. Sed augmentum illud in his Propositionibus parvum erit, & negligi potest; propterea quòd convexa superficies Globi totum ferè officium glaciei faciat.

PROP. XL. PROB. IX.

Globi, in Medio fluidissimo compresso progredientis, invenire resistentiam per Phænomena.

Sit A pondus Globi in Vacuo; B, pondus ejus in Medio resistente; D, diameter Globi; F spatium, quod sit ad $\frac{4}{3}$ D ut densitas Globi ad densitatem Medii, id est, ut A ad A − B; G, tempus, quo Globus, pondere B sine resistentiâ cadendo, describit spatium F; & H, velocitas quam globus hocce casu suo acquirit. Et erit H velocitas maxima

(s) Designet litera V velocitatem quam Globus, per liquorem compressum cadendo, tempore P adeptus fuerit.

In figurâ Propositionis nonæ hujus Libri sit AP ad AC ut V ad H. Per punctum T, hyperbolæ AVZ, ducatur recta $\Pi\tau$ cum rectâ AC parallela; quæ cum hyperbolâ AVZ iterum in τ conveniat, cum asymptotâ DC in Π. Tribus rectis $\Pi\tau$, AC, ΠT continua erit proportionis convenientia. (Hamilton. Conic. Lib. I. Prop. XXXVII.) Quare $\Pi\tau$ erit ad ΠT ut $\Pi\tau^2$ ad AC^2. Convertendo $\Pi\tau$ ad τT ut $\Pi\tau^2$ ad $\Pi\tau^2 - AC^2$. Sed τT est ad τX ut 2 ad 1. Quare $\Pi\tau$ erit ad τX ut $2\Pi\tau^2$ ad $\Pi\tau^2 - AC^2$. Et dividendo ΠX ad $X\tau$ vel XT ut $\Pi\tau^2 + AC^2$ ad $\Pi\tau^2 - AC^2$. Sed propter rectas ΠX, CA parallelas, erit ΠX ad $X\tau$ ut AC ad AP, id est ut H ad V. Quare H erit ad V ut $\Pi\tau^2 + AC^2$ ad $\Pi\tau^2 - AC^2$. Jam sit N quantitas quæ sit ad unitatem ut $\Pi\tau^2$ ad AC^2. Erit igitur N + 1 ad N − 1 ut $\Pi\tau^2 + AC^2$ ad $\Pi\tau^2 - AC^2$. Quare $H : V = N + 1 : N - 1$. Et $V = \frac{N-1}{N+1} H$.

Designet litera β Modulum systematis logarithmorum Briggiani. Sector hyperbolicus ADT est ad triangulum ADC ut logarithmus quivis rationis, quam AC habet ad $\Pi\tau$, ad Modulum systematis sui. (Cotes. Harmon. Mens. Part I. Prop. IV.) Sed sector ADT ad triangulum ADC rationem habet quam P ad G. (Prop. IX. hujus Libri Cor. 5.) Erit igitur P ad G ut Logarithmus quivis rationis, quam AC habet ad $\Pi\tau$, ad Modulum systematis sui. Quare 2P erit ad G ut Logarithmus quivis rationis ejus, quam AC^2 habet ad $\Pi\tau^2$, sive ejus quam 1 habet ad N, ad Modulum systematis sui. Unde $2P : G =$ Log. Brigg. $N : \beta$. Et $\frac{2P}{G} \times \beta =$ Log. Brigg. N. Sed $\beta = 0{,}4342944819$, (Cotes. Harmon. Mens. Pars I. Prop. II. Cor.) Quare N est quantitas illa cujus Logarithmus est $\frac{2P}{G} \times 0{,}4342944819$.

Et

maxima quâcum globus, pondere suo B, in Medio resistente potest descendere, per Corol. 2. Prop. XXXVIII. & Resistentia, quam Globus eâ cum velocitate descendens patitur, æqualis erit ejus ponderi B: Resistentia verò, quam patitur in aliâ quâcunque velocitate, erit ad pondus B in duplicatâ ratione velocitatis hujus ad velocitatem illam maximam H, per Corol. 1. Prop. XXXVIII.

Hæc est Resistentia, quæ oritur ab inertiâ materiæ Fluidi. Ea verò quæ oritur ab Elasticitate, Tenacitate, & Frictione partium ejus, sic investigabitur.

Demittatur Globus, ut pondere suo B in Fluido descendat; & sit P tempus cadendi, idque in minutis secundis si tempus G in minutis secundis habeatur. Inveniatur numerus absolutus, N, qui congruit logarithmo $0{,}4342944819\,\frac{2P}{G}$, sitque L logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$: & velocitas cadendo acquisita erit $\frac{N-1}{N+1}H$, altitudo autem descripta erit $\frac{2PF}{G} - 1{,}3862943611F + 4{,}605170186LF$. Si Fluidum satis profundum sit, negligi potest terminus $4{,}605170186LF$; & erit $\frac{2PF}{G} - 1{,}3862943611F$ altitudo descripta quamproximè. Patent hæc per Libri Secundi Propositionem Nonam & ejus Corollaria; ex hypothesi quòd Globus nullam aliam patiatur resistentiam, nisi quæ oritur ab inertiâ materiæ (s).

Si

Et velocitas tempore P partu à Newtono recte definita est. Videamus de spatio quod casu conficitur: quod dicatur A. Spatium verò quod corpus aliquod cum velocitate H, eodem tempore P, æquabiliter conficeret, dicatur S. In figurâ Propositionis nonæ ponitur AB pars quarta rectæ AC. Unde rectangulum AB × AC trianguli ADC dimidium erit. Area autem hyperbolica ABNK est ad rectangulum AB × AC ut Logarithmus quivis rationis ejus, quam CK habet ad AC, ad Modulum systematis sui. (Cotes. Harmon. Mens. Part I. Prop. IV.) Quare area ABNK erit ad $\frac{1}{2}$ADC, sive 2ABNK ad ADC, ut Logarithmus quivis rationis ejus, quam CK habet ad AC, ad Modulum systematis sui. Ponuntur autem tres illæ AC, AP, AK proportione convenientes. Quare $AC : AK = AC^2 : AP^2$. Et convertendo $AC : CK = AC^2 : AC^2 - AP^2$. Sed $AC^2 : AC^2 - AP^2 = H^2 : H^2 - V^2 =$

$$H^2 : H^2 - \frac{\overline{N-1}|^2}{\overline{N+1}|^2} H^2 = 1 : 1 - \frac{\overline{N-1}|^2}{\overline{N+1}|^2} = 1 : \frac{\overline{N+1}|^2 - \overline{N-1}|^2}{\overline{N+1}|^2} = 1 : \frac{4N}{\overline{N+1}|^2} = \overline{N+1}|^2 : 4N.$$

Igitur $CK : AC = 4N : \overline{N+1}|^2$. Et 2ABNK erit ad ADC ut Logarithmus quivis rationis ejus, quam 4N habet ad $\overline{N+1}|^2$, ad Modulum systematis sui; sive ut Log. Brigg. $\frac{\overline{N+1}|^2}{4N}$ ad β. Sed ex iis quæ suprà ostensa sunt, ADC est ad sectorem $2ADT = (G : 2P =)\ \beta :$ Log. Brigg. N.

Cùm igitur sit $2ABNK : ADC =$ Log. Brigg. $\frac{\overline{N+1}|^2}{4N} : \beta$; et $ADC : 2ADT = \beta :$ Log. Brigg. N.

Ex æquo erit $ABNK : ADT =$ Log. Brigg. $\frac{\overline{N+1}|^2}{4N}$: Log. Brigg. N. Sed (per Cor. 1. Prop. IX.)

ABNK : ADT

Si verò aliam insuper resistentiam patiatur, descensus erit tardior, & ex retardatione innotescet quantitas hujus resistentiæ.

Ut corporis, in Fluido cadentis, velocitas & descensus faciliùs innotescant, composui Tabulam sequentem, cujus columna pri-

Tempora P	Velocitates cadentis in Fluido.	Spatia cadendo descripta in Fluido.	Spatia motu maximo descripta.	Spatia cadendo descripta in Vacuo.
0,001 G	$99999\frac{29}{30}$	0,000001 F	0,002 F	0,000001 F
0,01 G	999967	0,0001 F	0,02 F	0,0001 F
0,1 G	9966799	0,0099834 F	0,2 F	0,01 F
0,2 G	19737532	0,0397361 F	0,4 F	0,04 F
0,3 G	29131261	0,0886815 F	0,6 F	0,09 F
0,4 G	37994896	0,1559070 F	0,8 F	0,16 F
0,5 G	46211716	0,2402290 F	1,0 F	0,25 F
0,6 G	53704957	0,3402706 F	1,2 F	0,36 F
0,7 G	60436778	0,4545405 F	1,4 F	0,49 F
0,8 G	66403677	0,5815071 F	1,6 F	0,64 F
0,9 G	71629787	0,7196609 F	1,8 F	0,81 F
1 G	76159416	0,8675617 F	2 F	1 F
2 G	96402758	2,6500055 F	4 F	4 F
3 G	99505475	4,6186570 F	6 F	9 F
4 G	99932930	6,6143765 F	8 F	16 F
5 G	99990920	8,6137964 F	10 F	25 F
6 G	99998771	10,6137179 F	12 F	36 F
7 G	99999834	12,6137073 F	14 F	49 F
8 G	99999980	14,6137059 F	16 F	64 F
9 G	99999997	16,6137057 F	18 F	81 F
10 G	$99999999\frac{3}{5}$	18,6137056 F	20 F	100 F

ma denotat Tempora descensûs; secunda exhibet Velocitates cadendo acquisitas, existente velocitate maximâ 100000000; tertia exhibet

ADNK : ADT $=$ A : S. Quare A : S $=$ Log. Brigg. $\frac{\overline{N+1}|^2}{4N}$: Log. Brigg. N. Et A $\times$ Log. Brigg. N $=$ S $\times$ Log. Brigg. $\frac{\overline{N+1}|^2}{4N}$. Jam verò cum S, & 2F, sint spatia illa, quæ corpora, cum velocitate H æquabiliter progredientia, temporibus P & G, conficerent, erit S : 2F $=$ P : G, et S $= \frac{2PF}{G}$.

Unde rursum A $\times$ Log. Brigg. N $=$ 2PF $\times$ Log. Brigg. $\frac{\overline{N+1}|^2}{4N} = \frac{2PF}{G} \times$ Log. Brigg. $\frac{\overline{N+1}|^2 \times N}{4NN} = \frac{2PF}{G} \times \overline{2L + \text{Log. Brigg. } N - \text{Log. Brigg. } 4}$. Hoc est, cùm ostensus sit Log. Brigg. N $= \frac{2P}{G} \times \beta$, erit A $\times \frac{2P}{G}\beta = \frac{2P}{G} \times \overline{F \times 2L + F \times \frac{2P}{G}\beta - F \times \text{Log. Brigg. } 4}$. Quare A $= \frac{2PF}{G} + F \times \frac{2L}{\beta} - \frac{F \text{ Log. Brigg. } 4}{\beta}$.

3

Sed

hibet Spatia temporibus illis cadendo descripta, existente 2F spatio, quod corpus, tempore G, cum velocitate maximâ describit; & quarta exhibet Spatia, iisdem temporibus, cum velocitate maximâ descripta. Numeri in quartâ columnâ sunt $\frac{2P}{G}$; & subducendo numerum 1,3862944 − 4,6051702L, inveniuntur numeri in tertiâ columnâ; & multiplicandi sunt hi numeri per spatium F, ut habeantur spatia cadendo descripta. Quinta his insuper adjecta est columna, quæ continet spatia descripta, iisdem temporibus, à corpore, vi ponderis sui comparativi B, in Vacuo cadente.

Scholium.

Ut Resistentias Fluidorum investigarem per Experimenta, paravi vas ligneum quadratum, longitudine & latitudine internâ digitorum novem pedis *Londinensis*, profunditate pedum novem cum semisse, idemque implevi Aquâ Pluviali; & Globis ex cerâ & plumbo incluso formatis, notavi tempora descensûs Globorum, existente descensûs altitudine 112 digitorum pedis. Pes solidus cubicus *Londinensis* continet 76 libras *Romanas* Aquæ Pluvialis, & pedis hujus digitus solidus continet $\frac{19}{36}$ uncias libræ hujus, seu grana $253\frac{1}{3}$; & globus aqueus diametro digiti unius descriptus continet grana 132,645 in Medio Aeris, vel grana 132,8 in Vacuo; & globus quilibet alius est ut excessus ponderis ejus in Vacuo supra pondus ejus in Aquâ.

Exper. 1. Globus, cujus pondus erat $156\frac{1}{4}$ granorum in Aere

Sed $\beta = 0{,}4342944819$.
Et Log. Brigg. 4 $= 0{,}6020599913$.
Quare $\frac{2}{\beta} = 4{,}605170186$.
Et $\frac{\text{Log. Brigg. } 4}{\beta} = 1{,}386294361 1$.

Unde A, sive altitudo casu recto tempore P confecta, ea erit $\frac{2PF}{G} - 1{,}3862943611\,F + 4{,}605170186\,LF$; omninò qualis à Newtono definita est.

Quòd si permagna sit altitudo A, ut AP in figurâ Prop. IX. rectæ AC propemodum æqualis fiat, permagnum erit quadratum ex IIT ratione quadrati ex AC; unde numerus N permagnus, et $\frac{N+1}{N}$ tate vix major erit. Ejus igitur Logarithmus L in nihilum propemodum abierit, & membrum $\frac{F \times 2L}{\beta}$ negligere licebit, sicut Newtonus statuit.

&

& 77 granorum in Aquâ, altitudinem totam, digitorum 112, tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcripſit. Et experimento repetito, Globus iterum cecidit eodem tempore minutorum quatuor ſecundorum.

Pondus globi in Vacuo eſt $156\frac{13}{38}$ *gran.* & exceſſus hujus ponderis ſupra pondus globi in Aquâ eſt $79\frac{13}{38}$ *gran.* Unde prodit globi diameter 0,84224 partium digiti. Eſt autem ut exceſſus ille ad pondus globi in Vacuo, ita denſitas aquæ ad denſitatem globi; & ita partes octo tertiæ diametri globi (viz. 2,24597 *dig.*) ad ſpatium 2F, quod perinde erit 4,4256 *dig.* Globus tempore minuti unius ſecundi, toto ſuo pondere granorum $156\frac{13}{38}$, cadendo in Vacuo deſcribet digitos $193\frac{1}{3}$; & pondere granorum 77, eodem tempore, ſine reſiſtentiâ cadendo in Aquâ deſcribet digitos 95,219; & tempore G, quod ſit ad minutum unum ſecundum in ſubduplicatâ ratione ſpatii F ſeu 2,2128 *dig.* ad 95,219 *dig.* deſcribet 2,2128 *dig.* & velocitatem maximam H acquiret quâcum poteſt in Aquâ deſcendere. Eſt igitur tempus G $0'',15244$. Et hoc tempore G, cum velocitate illâ maximâ H, globus deſcribet ſpatium, 2F, digitorum 4,4256; ideoque tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcribet ſpatium digitorum 116,1245. Subducatur ſpatium 1,3862944F ſeu 3,0676 *dig.* & manebit ſpatium 113,0569 digitorum, quod globus cadendo in Aquâ, in vaſe ampliſſimo, tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcribet. Hoc ſpatium, ob anguſtiam vaſis lignei prædicti, minui debet in ratione quæ componitur ex ſubduplicatâ ratione orificii vaſis ad exceſſum orificii hujus ſupra ſemicirculum maximum globi, & ex ſimplici ratione orificii ejuſdem ad exceſſum ejus ſupra circulum maximum globi; id eſt, in ratione 1 ad 0,9914. Quo facto, habebitur ſpatium 112,08 digitorum, quod globus, cadendo in Aquâ, in hoc vaſe ligneo, tempore minutorum quatuor ſecundorum per Theoriam deſcribere debuit quamproximè. Deſcripſit verò digitos 112 per Experimentum.

Exper. 2. Tres globi æquales, quorum pondera ſeorſim erant $76\frac{1}{3}$ granorum in Aere & $5\frac{1}{16}$ granorum in Aquâ, ſucceſſivè demittebantur; & unuſquiſque cecidit in Aquâ tempore minutorum ſecundorum quindecim, caſu ſuo deſcribens altitudinem digitorum 112.

Computum ineundo prodeunt Pondus globi in Vacuo $76\frac{5}{12}$ *gran.* Exceſſus hujus ponderis ſupra pondus in Aquâ $71\frac{17}{48}$ *gran.* Diameter globi 0,81296 *dig.* Octo Tertiæ partes hujus diametri 2,16789 *dig.* Spatium 2F 2,3217 *dig.* Spatium, quod globus pondere $5\frac{1}{16}$ *gran.* tempore $1''$ ſine reſiſtentiâ cadendo deſcribat, 12,808 *dig.* & Tempus G $0'',301056$. Globus igitur, velocitate maximâ, quâcum poteſt in Aquâ vi ponderis $5\frac{1}{16}$ *gran.* deſcendere, tempore $0'',301056$ deſcribet ſpatium 2,3217 *dig.* & tempore $15''$ ſpatium 115,678 *dig.* Subducatur ſpatium 1,3862944F ſeu 1,609 *dig.* & manebit ſpatium 114,069 *dig.* quod proinde globus eodem tempore, in vaſe latiſſimo cadendo, deſcribere debet. Propter anguſtiam vaſis noſtri detrahi debet ſpatium 0,895 *dig.* circiter. Et ſic manebit ſpatium 113,174 *dig.* quod globus cadendo in hoc vaſe, tempore $15''$ deſcribere debuit per Theoriam quamproximè. Deſcripſit vero digitos 112 per Experimentum. Differentia eſt inſenſibilis.

Exper. 3. Globi tres æquales, quorum pondera ſeorſim erant 121 *gran.* in Aere & 1 *gran.* in Aquâ, ſucceſſivè demittebantur; & cadebant in Aquâ temporibus $46''$, $47''$, & $50''$, deſcribentes altitudinem digitorum 112.

Per Theoriam hi globi cadere debuerunt tempore $40''$ circiter. Quòd tardiùs ceciderunt, utrum minori proportioni reſiſtentiæ, quæ à vi inertiæ in tardis motibus oritur, ad reſiſtentiam quæ oritur ab aliis cauſis, tribuendum ſit; an potiùs bullulis nonnullis globo adhærentibus, vel rarefactioni ceræ ad calorem vel tempeſtatis vel manûs globum demittentis, vel etiam erroribus inſenſibilibus in ponderandis globis in aquâ, incertum eſſe puto. Ideoque pondus globi in Aquâ debet eſſe plurium granorum, ut Experimentum certum & fide dignum reddatur.

Exper. 4. Experimenta hactenus deſcripta cepi, ut inveſtigarem Reſiſtentias Fluidorum, antequam Theoria, in Propoſitionibus proximè præcedentibus expoſita, mihi innoteſceret. Poſtea, ut Theoriam inventam examinarem, paravi vas ligneum latitudine internâ digitorum $8\frac{2}{3}$, profunditate pedum quindecim cum triente.

te. Deinde ex cerâ & plumbo incluso globos quatuor formavi, singulos pondere $139\frac{1}{4}$ granorum in Aere & $7\frac{1}{8}$ granorum in Aquâ. Et hos demisi, ut tempora cadendi in Aquâ per Pendulum, ad semi-minuta secunda oscillans, mensurarem. Globi, ubi ponderabantur & postea cadebant, frigidi erant & aliquamdiu frigidi manserant; quia calor ceram rarefacit, & per rarefactionem diminuit pondus globi in Aquâ, & cera rarefacta non statim ad densitatem pristinam per frigus reducitur. Antequam caderent, immergebantur penitus in aquam; ne pondere partis alicujus, ex aquâ extantis, descensus eorum sub initio accelleraretur. Et ubi penitus immersi quiescebant, demittebantur quàm cautissimè, ne impulsum aliquem à manu demittente acciperent. Ceciderunt autem successivè temporibus oscillationum $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50, & 51, describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum. Sed tempestas jam paulo frigidior erat, quàm cùm globi ponderabantur, ideoque iteravi experimentum alio die, & globi ceciderunt temporibus oscillationum 49, $49\frac{1}{2}$, 50 & 53; ac tertio, temporibus oscillationum $49\frac{1}{2}$, 50, 51 & 53. Et experimento sæpiùs capto, globi ceciderunt maximâ ex parte temporibus oscillationum $49\frac{1}{2}$ & 50. Ubi tardiùs cecidere, suspicor eosdem retardatos fuisse impingendo in latera vasis.

Jam computum per Theoriam ineundo, prodeunt Pondus globi in Vacuo $139\frac{2}{5}$ granorum: Excessus hujus ponderis supra pondus globi in Aquâ $132\frac{11}{40}$ *gran.* Diameter globi 0,99868 *dig.* Octo tertiæ partes diametri 2,66315 *dig.* Spatium 2F 2,8066 *dig.* Spatium, quod globus pondere $7\frac{1}{8}$ granorum, tempore minuti unius secundi, sine resistentiâ cadendo describit, 9,88164 *dig.* Et tempus G $0''$,376843. Globus igitur, velocitate maximâ, quâcum potest in Aquâ vi ponderis $7\frac{1}{8}$ granorum descendere, tempore $0''$,376843 describit spatium 2,8066 digitorum, & tempore $1''$ spatium 7,4466 digitorum, & tempore $25''$, seu oscillationum 50, spatium 186,1915 *dig.* Subducatur spatium 1,386294 F, seu 1,9454 *dig.* & manebit spatium 184,2461 *dig.* quod globus eodem tempore in vase latissimo describet. Ob angustiam vasis nostri, minuatur hoc spatium in ratione quæ componitur ex subduplicatâ ratione orificii vasis ad excessum hujus orificii supra semicirculum maximum globi, & simplici ratione ejusdem orificii ad excessum ejus supra circulum maximum globi; & habebitur spatium 181,86 digitorum, quod globus in hoc vase, tempore oscillationum 50, describere debuit per Theoriam quamproximè. Descripsit verò spatium 182 digitorum tempore oscillationum $49\frac{1}{2}$, vel 50, per Experimentum.

Exper. 5. Globi quatuor, pondere $154\frac{3}{8}$ *gran.* in Aere & $21\frac{1}{2}$ *gran.* in Aquâ, sæpè demissi cadebant tempore oscillationum $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ & 30; & nonnunquam 31, 32 & 33, describentes altitdinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 29 quamproximè.

Exper. 6. Globi quinque, pondere $212\frac{3}{8}$ *gran.* in Aere & $79\frac{1}{2}$ in Aquâ, sæpè demissi cadebant tempore oscillationum 15, $15\frac{1}{2}$, 16, 17 & 18, describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 15 quamproximè.

Exper. 7. Globi quatuor, pondere $293\frac{3}{8}$ *gran.* in Aere & $35\frac{7}{8}$ *gran.* in Aquâ, sæpè demissi cadebant tempore oscillationum $29\frac{1}{2}$, 30, $30\frac{1}{2}$, 31, 32 & 33, describentes altitudinem pedum quindecim & digiti unius cum semisse.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 28 quamproximè.

Causam investigando cur globorum, ejusdem ponderis & magnitudinis, aliqui citiùs alii tardiùs caderent, in hanc incidi; quod globi, ubi primum demittebantur & cadere incipiebant, oscillarent circum centra; latere illo, quod fortè gravius esset, primùm descendente, & motum oscillatorium generante. Nam per oscillationes suas globus majorem motum communicat aquæ, quàm si sine oscillationibus descenderet; & communicando, amittit partem motûs proprii quo descendere deberet: & pro majore vel minore oscillatione, magis vel minùs retardatur. Quinetiam globus recedit semper à latere suo quod per oscillationem descendit; &, recedendo, appropinquat lateribus vasis, & in latera nonnunquam impingitur. Et hæc oscillatio in globis gravioribus fortior est,

De Motu Corporum

est, & in majoribus aquam magis agitat. Quapropter, ut oscillatio globorum minor redderetur, globos novos ex cerâ & plumbo construxi, infigendo plumbum in latus aliquod globi prope superficiem ejus; & globum ita demisi, ut latus gravius, quoad fieri potuit, esset infimum ab initio descensûs. Sic oscillationes factæ sunt multo minores quàm priùs, & globi temporibus minùs inæqualibus ceciderunt, ut in experimentis sequentibus.

Exper. 8. Globi quatuor, pondere granorum 139 in Aere & $6\frac{1}{2}$ in Aquâ, sæpè demissi ceciderunt temporibus oscillationum non plurium quàm 52, non pauciorum quàm 50, & maximâ ex parte tempore oscillationum 51 circiter, describentes altitudinem digitorum 182.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 52 circiter.

Exper. 9. Globi quatuor, pondere granorum $273\frac{1}{4}$ in Aere & $140\frac{3}{4}$ in Aquâ, sæpiùs demissi ceciderunt temporibus oscillationum non pauciorum quàm 12, non plurium quàm 13, describentes altitudinem digitorum 182.

Per Theoriam verò hi globi cadere debuerunt tempore oscillationum $11\frac{1}{3}$ quamproximè.

Exper. 10. Globi quatuor, pondere granorum 384 in Aere & $119\frac{1}{2}$ in Aquâ, sæpè demissi cadebant temporibus oscillationum $17\frac{3}{4}$, 18, $18\frac{1}{2}$ & 19, describentes altitudinem digitorum $181\frac{1}{2}$. Et ubi ceciderunt tempore oscillationum 19, nonnunquam audivi impulsum eorum in latera vasis antequam ad fundum pervenerunt.

Per Theoriam verò cadere debuerunt tempore oscillationum $15\frac{5}{9}$ quamproximè.

Exper. 11. Globi tres æquales, pondere granorum 48 in Aere & $3\frac{29}{32}$ in Aquâ, sæpè demissi ceciderunt temporibus oscillationum $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 & 46, & maximâ ex parte 44 & 45, describentes altitudinem digitorum $182\frac{1}{2}$ quamproximè.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum $46\frac{5}{9}$ circiter.

Exper. 12. Globi tres æquales, pondere granorum 141 in Aere & $4\frac{3}{8}$ in Aquâ, aliquoties demissi, ceciderunt temporibus oscillationum 61, 62, 63, 64 & 65, describentes altitudinem digitorum 182.

Liber Secundus.

Et per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum $64\frac{1}{2}$ quamproximè.

Per hæc Experimenta manifestum est, quòd, ubi globi tardè ceciderunt, ut in experimentis secundis, quartis, quintis, octavis, undecimis ac duodecimis, tempora cadendi rectè exhibentur per Theoriam: at ubi globi velociùs ceciderunt, ut in experimentis sextis, nonis ac decimis, resistentia paulo major extitit quàm in duplicatâ ratione velocitatis. Nam globi, inter cadendum, oscillant aliquantulum; & hæc oscillatio in globis levioribus & tardiùs cadentibus, ob motûs languorem, citò cessat; in gravioribus autem & majoribus, ob motûs fortitudinem diutiùs durat, & non nisi post plures oscillationes ab aquâ ambiente cohiberi potest. Quinetiam globi, quo velociores sunt, eo minùs premuntur à Fluido ad posticas suas partes; & si velocitas perpetuò augeatur, spatium vacuum tandem à tergo relinquent, nisi compressio Fluidi simul augeatur. Debet autem compressio Fluidi (per Prop. XXXII. & XXXIII.) augeri in duplicatâ ratione velocitatis, ut resistentia sit in eâdem duplicatâ ratione. Quoniam hoc non fit, globi velociores paulo minùs premuntur à tergo, & defectu pressionis hujus, resistentia eorum fit paulo major quàm in duplicatâ ratione velocitatis.

Congruit igitur Theoria cum Phænomenis corporum cadentium in Aquâ. Reliquum est ut examinemus Phænomena cadentium in Aere.

Exper. 13. A culmine Ecclesiæ Sancti *Pauli*, in urbe *Londini*, mense Junio 1710, Globi duo vitrei simul demittebantur; unus Argenti Vivi plenus, alter Aeris; & cadendo describebant altitudinem pedum *Londinensium* 220. Tabula lignea ad unum ejus terminum polis ferreis suspendebatur, ad alterum pessulo ligneo incumbebat; & globi duo, huic Tabulæ impositi, simul demittebantur, subtrahendo pessulum ope fili ferrei, ad terram usque demissi, ut Tabula, polis ferreis solummodo innixa, super iisdem devolveretur; &, eodem temporis momento, Pendulum ad minuta secunda oscillans, per filum illud ferreum tractum, demitteretur,

teretur, & oſcillare inciperet. Diametri & Pondera globorum, ac Tempora cadendi exhibentur in Tabulâ ſequente.

Globorum Mercurio plenorum			Globorum Aere plenorum.		
Pondera	Diametri	Tempora cadendi.	Pondera	Diametri	Tempora cadendi.
908 gran.	0,8 digit.	4″	510 gran.	5,1 digit.	8″$\frac{1}{2}$
983	0,8	4 −	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4 +	515	5,0	8$\frac{1}{4}$
808	0,75	4	483	5,0	8$\frac{1}{2}$
784	0,75	4 +	641	5,2	8

Cæterùm Tempora obſervata corrigi debent. Nam globi mercuriales (per Theoriam *Galilæi*) minutis quatuor ſecundis deſcribent pedes *Londinenſes* 257, & pedes 220 minutis tantùm 3″ 42‴. Tabula lignea utique, detracto peſſulo, tardiùs devolvebatur quàm par erat, & tardâ ſuâ devolutione impediebat deſcenſum globorum ſub initio. Nam globi incumbebant Tabulæ prope medium ejus, & paulo quidem propriores erant axi ejus quàm peſſulo. Et hinc tempora cadendi prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter, & jam corrigi debent detrahendo illa minuta, præſertim in globis majoribus, qui Tabulæ devolventi paulo diutiùs incumbebant propter magnitudinem diametrorum. Quo facto tempora, quibus globi ſex majores cecidere, evadent 8″ 12‴, 7″ 42‴, 7″ 42‴, 7″ 57‴, 8″ 12‴, & 7″ 42‴.

Globorum igitur Aere plenorum quintus, diametro digitorum quinque, pondere granorum 483 conſtructus, cecidit tempore 8″ 12‴, deſcribendo altitudinem pedum 220. Pondus Aquæ huic globo æqualis eſt 16600 granorum; & pondus Aeris eidem æqualis eſt $\frac{16600}{860}$ *gran.* ſeu $19\frac{3}{10}$ *gran.* ideoque pondus globi in Vacuo eſt $502\frac{3}{10}$ *gran.* & hoc pondus eſt ad pondus Aeris globo æqualis, ut $502\frac{3}{10}$ ad $19\frac{3}{10}$, & ita ſunt 2F ad octo tertias partes diametri globi; id eſt, ad $13\frac{1}{3}$ digitos. Unde 2F prodeunt 28 *ped.* 11 *dig.* Globus cadendo in Vacuo, toto ſuo pondere $502\frac{3}{10}$ granorum, tempore minuti unius ſecundi deſcribit digitos $193\frac{1}{3}$ ut ſuprà, & pondere 483 *gran.* deſcribit digitos 185,905, & eodem tempore 483 *gran.* etiam in Vacuo deſcribit ſpatium F ſeu 14 *ped.* $5\frac{1}{2}$ *dig.* tempore

([1]) — *ope ſphæræ ligneæ concavæ ambientis*] Sic habent Editionis tertiæ exemplaria, quotquot in chartâ minore ſunt expreſſa. Nos damus quæ in chartis majoribus leguntur. Quod ideo monendum

1

tempore 57‴ 58⁗, & velocitatem maximam acquirit quâcum poſſit in Aere deſcendere. Hâc velocitate globus, tempore 8″ 12‴, deſcribet ſpatium pedum 245 & digitorum $5\frac{1}{3}$. Aufer 1,3863F ſeu 20 *ped.* $0\frac{1}{2}$ *dig.* & manebunt 225 *ped.* 5 *dig.* Hoc ſpatium igitur globus, tempore 8″ 12‴, cadendo deſcribere debuit per Theoriam. Deſcripſit verò ſpatium 220 pedum per Experimentum. Differentia inſenſibilis eſt.

Similibus computis ad reliquos etiam globos Aere plenos applicatis, confeci Tabulam ſequentem.

Globorum pondera.	Diametri.	Tempora cadendi ab altitudine pedum 220.	Spatia deſcribenda per Theoriam.		Exceſſus.	
510 gran.	5,1 digit.	8″ 12‴	226 ped.	11 dig.	6 ped.	11 dig.
642	5,2	7 42	230	9	10	9
599	5,1	7 42	227	10	7	10
515	5	7 57	224	5	4	5
483	5	8 12	225	5	5	5
641	5,2	7 42	230	7	10	7

Exper. 14. Anno 1719, menſe Julio, D. Deſaguliers hujuſmodi Experimenta iterum cepit; formando veſicas porcorum in orbem ſphæricum, ope ſphæræ ligneæ concavæ ([1]), quam madefactæ implere cogebantur inflando aerem; & haſce, arefactas & exemptas, demittendo ab altiore loco in templi ejuſdem turri rotundâ fornicatâ, nempe ab altitudine pedum 272; &, eodem temporis momento, demittendo etiam globum plumbeum, cujus pondus erat duarum librarum Romanarum circiter. Et interea aliqui ſtantes in ſupremâ parte templi, ubi globi demittebantur, notabant tempora tota cadendi, & alii ſtantes in terrâ notabant differentiam temporum inter caſum globi plumbei & caſum veſicæ. Tempora autem menſurabantur Pendulis ad dimidia minuta ſecunda oſcillantibus. Et eorum, qui in terrâ ſtabant, unus habebat horologium cum elatere ad ſingula minuta ſecunda quater vibrante; alius habebat machinam aliam, affabrè conſtructam, cum Pendulo etiam ad ſingula minuta ſecunda quater vibrante. Et ſimilem machinam habebat unus eorum, qui ſtabant in ſummitate

monendum duximus, nequis, cui ad manum fortè ſit exemplar duntaxat è minoribus, aut fidem noſtram aut diligentiam in otioſâ iſtâ voce *ambientis* deſideret.

tate templi. Et hæc inſtrumenta ita formabantur, ut motus eorum, pro lubitu, vel inciperent vel ſiſterentur. Globus autem plumbeus cadebat tempore minutorum ſecundorum quatuor cum quadrante circiter. Et addendo hoc tempus ad prædictam temporis differentiam, colligebatur tempus totum, quo veſica cecidit. Tempora, quibus veſicæ quinque poſt caſum globi plumbei primâ vice ceciderunt, erant $14\frac{3}{4}''$, $12\frac{3}{4}''$, $14\frac{5}{8}''$, $17\frac{3}{4}''$, & $16\frac{7}{8}''$, & ſecundâ vice $14''\frac{1}{2}$, $14\frac{1}{4}''$, $14''$, $19''$, & $16\frac{3}{4}''$. Addantur $4\frac{1}{4}''$, tempus utique quo globus plumbeus cecidit, & tempora tota, quibus veſicæ quinque ceciderunt, erant primâ vice $19''$, $17''$, $18\frac{7}{8}$, $22'$, & $21\frac{1}{8}''$; & ſecundâ vice, $18\frac{3}{4}''$, $18\frac{1}{2}''$, $18\frac{1}{4}''$, $23\frac{1}{4}''$, & $21''$. Tempora autem in ſummitate templi notata, erant primâ vice $19\frac{3}{8}''$, $17\frac{1}{4}''$, $18\frac{3}{4}''$, $22\frac{1}{8}''$, & $21\frac{5}{8}''$; & ſecundâ vice $19''$, $18\frac{5}{8}''$, $18\frac{3}{8}''$, $24''$, & $21\frac{1}{4}''$. Cæterùm veſicæ non ſemper rectâ cadebant, ſed nonnunquam volitabant, & hinc inde oſcillabantur inter cadendum. Et his motibus tempora cadendi prorogata ſunt & aucta, nonnunquam dimidio minuti unius ſecundi, nonnunquam minuto ſecundo toto. Cadebant autem rectiùs veſica ſecunda & quarta primâ vice; & prima ac tertia ſecundâ vice. Veſica quinta rugoſa erat, & per rugas ſuas nonnihil retardabatur. Diametros veſicarum deducebam ex earum circumferentiis, filo tenuiſſimo bis circundato, menſuratis. Et Theoriam contuli cum Experimentis in Tabulâ ſequente; aſſumendo denſitatem Aëris eſſe ad denſitatem Aquæ Pluvialis ut 1 ad 860, & computando ſpatia, quæ globi per Theoriam deſcribere debuerunt cadendo.

Veſicarum pondera.	Diametri.	Tempora cadendi ab altitudine pedum 272.	Spatia iiſdem temporibus deſcribenda per Theoriam.		Differentia inter Theor. & Exper.	
128 gran.	5,28 dig.	19″	271 ped.	11 dig.	— 0 ped.	1 dig.
156	5,19	17	272	$0\frac{1}{2}$	+ 0	$0\frac{1}{2}$
$137\frac{1}{2}$	5,3	$18\frac{1}{2}$	272	7	+ 0	7
97	5,26	22	277	4	+ 5	4
$99\frac{1}{8}$	5	$21\frac{1}{8}$	282	0	+ 10	0

Globorum, igitur tam in Aëre quàm in Aquâ motorum, Reſiſtentia propè omnis per Theoriam noſtram rectè exhibetur, ac denſitati Fluidorum, paribus globorum velocitatibus ac magnitudinibus, proportionalis eſt.

In Scholio, quod Sectioni Sextæ ſubjunctum eſt, oſtendimus, per Experimenta Pendulorum, quòd Globorum æqualium & æquivelocium, in Aëre, Aquâ, & Argento Vivo motorum, reſiſtentiæ ſunt ut Fluidorum denſitates. Idem hîc oſtendimus magis accuratè per Experimenta corporum cadentium in Aëre & Aquâ. Nam Pendula ſingulis oſcillationibus motum cient in Fluido motui Penduli redeuntis ſemper contrarium; & reſiſtentia ab hoc motu oriunda, ut & reſiſtentia fili, quo Pendulum ſuſpendebatur, totam Penduli reſiſtentiam majorem reddiderunt, quàm reſiſtentia quæ per Experimenta corporum cadentium prodiit. Etenim per experimenta Pendulorum in Scholio illo expoſita, Globus ejuſdem denſitatis cum Aquâ, deſcribendo longitudinem ſemidiametri ſuæ in Aëre, amittere deberet motûs ſui partem $\frac{1}{3342}$. At per Theoriam, in hâc ſeptimâ ſectione expoſitam & Experimentis cadentium comfirmatam, Globus idem, deſcribendo longitudinem eandem, amittere deberet motûs ſui partem tantùm $\frac{1}{4586}$; poſito, quòd denſitas Aquæ ſit ad denſitatem Aëris ut 860 ad 1. Reſiſtentiæ igitur per experimenta Pendulorum majores prodiere (ob cauſas jam deſcriptas) quàm per experimenta Globorum cadentium; idque in ratione 4 ad 3 circiter. Attamen cùm Pendulorum, in Aëre, Aquâ & Argento Vivo oſcillantium reſiſtentiæ à cauſis ſimilibus ſimiliter augeantur, proportio reſiſtentiarum in his Mediis, tam per experimenta Pendulorum, quàm per experimenta corporum cadentium, ſatis rectè exhibebitur. Et inde concludi poteſt, quòd corporum, in Fluidis quibuſcunque fluidiſſimis motorum, Reſiſtentiæ, cæteris paribus, ſunt ut denſitates Fluidorum.

His ita ſtabilitis, dicere jam licet quamnam motûs ſui partem Globus quilibet, in Fluido quocunque projectus, dato tempore amittet quamproximè. Sit D diameter globi; & V velocitas ejus ſub initio motûs; & T tempus, quo globus velocitate V in Vacuo deſcribet ſpatium, quod ſit ad ſpatium $\frac{8}{3}D$ ut denſitas Globi ad denſitatem Fluidi: & globus in Fluido illo projectus, tempore quovis alio t, amittet velocitatis ſuæ partem $\frac{tV}{T+t}$, manente parte $\frac{TV}{T+t}$; & deſcribet ſpatium, quod ſit ad ſpatium uniformi velocitate V eodem tempore deſcriptum in Vacuo, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585093 eſt ad numerum

$\frac{t}{T}$, per Corol. 7. Prop. xxxv. In motibus tardis Reſiſtentia poteſt eſſe paulo minor, propterea quòd figura Globi paulo aptior ſit ad motum, quàm figura Cylindri eâdem diametro deſcripti. In motibus velocibus Reſiſtentia poteſt eſſe paulo major, propterea quòd Elaſticitas & Compreſſio Fluidi non augeantur in duplicatâ ratione velocitatis. Sed hujuſmodi minutias hîc non expendo.

Et quamvis Aër, Aqua, Argentum Vivum & ſimilia Fluida, per diviſionem partium in infinitum, ſubtiliarentur & fierent Media infinitè fluida; tamen globis projectis haud minùs reſiſterent. Nam reſiſtentia, de quâ agitur in Propoſitionibus præcedentibus, oritur ab inertiâ materiæ; & inertia materiæ corporibus eſſentialis eſt, & quantitati materiæ ſemper proportionalis. Per diviſionem partium Fluidi, reſiſtentia, quæ oritur à Tenacitate & Frictione partium, diminui quidem poteſt: ſed quantitas materiæ per diviſionem partium ejus non minuitur; &, manente quantitate materiæ, manet ejus vis inertiæ, cui Reſiſtentia, de quâ hîc agitur, ſemper proportionalis eſt. Ut hæc Reſiſtentia diminuatur, diminui debet quantitas materiæ in ſpatiis, per quæ corpora moventur. Et propterea ſpatia cœleſtia, per quæ globi Planetarum & Cometarum in partes omnes liberrimè, & ſine omni motûs diminutione ſenſibili, perpetuò moventur, Fluido omni corporeo deſtituuntur, ſi fortè vapores longè tenuiſſimos, & trajectos lucis radios excipias.

Projectilia utique motum cient in Fluidis progrediendo, & hic motus oritur ab exceſſu preſſionis Fluidi, ad Projectilis partes anticas, ſupra preſſionem ad ejus partes poſticas; & non minor eſſe poteſt in Mediis infinitè fluidis quàm in Aere, Aquâ & Argento Vivo pro denſitate materiæ in ſingulis. Hic autem preſſionis exceſſus, pro quantitate ſuâ, non tantum motum ciet in Fluido, ſed etiam agit in Projectile ad motum ejus retardandum: & propterea Reſiſtentia, in omni Fluido, eſt ut motus in Fluido à Projectili excitatus; nec minor eſſe poteſt in Æthere ſubtiliſſimo pro denſitate ætheris, quàm in Aëre, Aquâ & Argento Vivo pro denſitatibus horum Fluidorum.

SECTIO

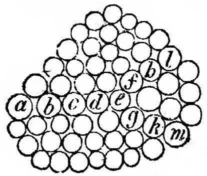
SECTIO VIII.

De Motu per Fluida propagato.

PROP. XLI. THEOR. XXXII.

Preſſio non propagatur per Fluidum ſecundum lineas rectas, niſi ubi particulæ Fluidi in directum jacent.

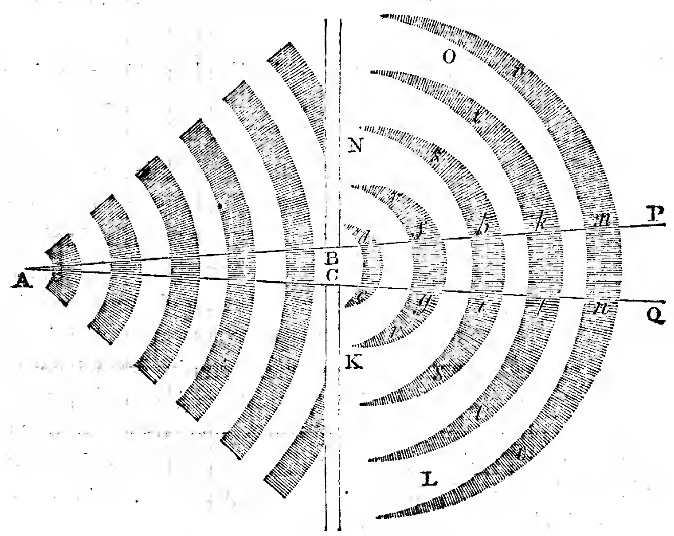
Si jaceant particulæ a, b, c, d, e in lineâ rectâ, poteſt quidem preſſio directè propagari ab a ad e; at particula e urgebit particulas obliquè poſitas, f & g, obliquè; & particulæ illæ, f & g, non ſuſtinebunt preſſionem illatam, niſi fulciantur à particulis ulterioribus, h & k; quatenus autem fulciuntur, premunt particulas fulcientes; & hæ non ſuſtinebunt preſſionem, niſi fulciantur ab ulterioribus, l & m, eaſque premant; & ſic deinceps in infinitum. Preſſio igitur, quàm primùm propagatur ad particulas, quæ non in directum jacent, divaricare incipiet, & obliquè propagabitur in infinitum; & poſtquam incipit obliquè propagari, ſi inciderit in particulas ulteriores, quæ non in directum jacent, iterum divaricabit; idque toties, quoties in particulas non accuratè in directum jacentes inciderit. Q. E. D.



Corol. Si preſſionis, à dato puncto per Fluidum propagatæ, pars aliqua obſtaculo intercipiatur; pars reliqua, quæ non intercipitur, divaricabit in ſpatia ponè obſtaculum. Id quod ſic etiam demonſtrari poteſt. A puncto A (*vid. fig. p.* 432) propagetur preſſio quaquaverſum, idque ſi fieri poteſt ſecundum lineas rectas, & obſtaculo NBCK perforato in BC, intercipiatur ea omnis, præter partem coniformem APQ, quæ per foramen circulare BC tranſit. Planis tranſverſis, de, fg, hi, diſtinguatur conus APQ in fruſta; & interea dum conus ABC, preſſionem propagando, urget fruſtum conicum ulterius $degf$ in ſuperficie de, & hoc fruſtum urget fruſtum proximum $fgih$ in ſuperficie fg, & fruſtum illud urget fruſtum tertium, & ſic deinceps in infinitum; manifeſtum eſt (per motûs Legem tertiam) quòd fruſtum primum $defg$, reactione fruſti ſecundi $fghi$, tantum urgebitur & premetur in ſuperficie fg, quantum urget & premit fruſtum illud ſecundum. Fruſtum igitur $degf$

inter

inter conum A*de* & fruftum *fbig* comprimitur utrinque, & propterea (per Corol. 6. Prop. XIX.) figuram fuam fervare nequit, nifi vi eâdem comprimatur undique. Eodem igitur impetu, quo premitur in fuperficiebus *de*, *fg*, conabitur cedere ad latera *df*, *eg*; ibique (cùm rigidum non fit, fed omnimodo fluidum) ex-



curret ac dilatabitur, nifi Fluidum ambiens adfit, quo conatus ifte cohibeatur. Proinde conatu excurrendi premet tam Fluidum ambiens ad latera *df*, *eg* quàm fruftum *fghi* eodem impetu; & propterea preffio non minùs propagabitur à lateribus *df*, *eg* in fpatia NO, KL hinc inde, quàm propagatur à fuperficie *fg* verfus PQ. Q. E. D.

PROP. XXV. THEOR. XX.

Motus omnis per Fluidum propagatus divergit à recto tramite in fpatia immota.

Caf. 1. Propagetur motus à puncto A per foramen BC, pergatque, fi fieri poteft, in fpatio conico BCQP, fecundum lineas rectas divergentes à puncto A. Et ponamus primò, quòd motus ifte fit undarum in fuperficie ftagnantis Aquæ. Sintque *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. undarum fingularum partes altiffimæ, vallibus totidem intermediis ab invicem diftinctæ. Igitur quoniam aqua in undarum jugis altior eft, quàm in Fluidi partibus immotis LK, NO, defluet eadem de jugorum terminis *e*, *g*, *i*, *l*, &c. *d*, *f*, *h*, *k*, &c. hinc inde verfus KL & NO: & quoniam in undarum vallibus depreffior eft, quàm in Fluidi partibus immotis KL, NO; defluet eadem de partibus illis immotis in undarum valles. Defluxu priore undarum Juga, pofteriore Valles, hinc inde dilatantur, & propagantur verfus KL & NO. Et quoniam motus undarum ab A verfus PQ fit per continuum defluxum jugorum in valles proximos, ideoque celerior non eft quàm pro celeritate defcenfûs; & defcenfus aquæ hinc inde verfus KL & NO eâdem velocitate peragi debet; propagabitur dilatatio undarum hinc inde verfus KL & NO eâdem velocitate, quâ undæ ipfæ ab A verfus PQ rectâ progrediuntur. Proindeque fpatium totum hinc inde verfus KL & NO ab undis dilatatis *rfgr*, *shis*, *tklt*, *vmnv*, &c. occupabitur. Q. E. D. Hæc ita fe habere quilibet in Aquâ ftagnante experiri poteft.

Caf. 2. Ponamus jam, quòd *de*, *fg*, *hi*, *kl*, *mn* defignent pulfus à puncto A, per Medium Elafticum, fucceffivè propagatos. Pulfus propagari concipe per fucceffivas condenfationes & rarefactiones Medii, fic ut pulfûs cujufque pars denfiffima fphæricam occupet fuperficiem circa centrum A defcriptam, & inter pulfus fucceffivos æqualia intercedant intervalla. Defignet autem lineæ *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. denfiffimas pulfuum partes, per foramen BC propagatas. Et quoniam Medium ibi denfius eft, quàm in fpatiis hinc inde verfus KL & NO, dilatabit fefe tam verfus fpatia illa KL, NO utrinque fita, quàm verfus pulfuum rariora intervalla; eoque pacto rarius femper evadens è regione intervallorum, ac denfius è regione pulfuum, participabit eorundem motum. Et quoniam pulfuum progreffivus motus oritur à perpetuâ relaxatione partium denfiorum verfus antecedentia intervalla rariora; & pulfus eâdem ferè celeritate fefe in Medii partes quiefcentes KL, NO hinc inde relaxare debent; pulfus illi eâdem ferè celeritate fefe dilatabunt undique in fpatia immota KL, NO, quâ propagantur directè à centro A; ideoque fpatium totum KLON occupabunt. Q. E. D. Hoc experimur in Sonis, qui vel monte interpofito audiuntur, vel in cubiculum per feneftram admiffi fefe in omnes

cubiculi

cubiculi partes dilatant, inque angulis omnibus audiuntur, non tam reflexi à parietibus oppositis, quàm à fenestrâ directè propagati, quantùm ex sensu judicare licet.

Cas. 3. Ponamus denique, quòd motus cujuscunque generis propagetur ab A per foramen BC: & quoniam propagatio ista non fit, nisi quatenus partes Medii centro A propiores urgent commoventque partes ulteriores; & partes quæ urgentur fluidæ sunt, ideoque recedunt quaquaversum in regiones ubi minùs premuntur: recedent eædem versus Medii partes omnes quiescentes, tam laterales KL & NO, quàm anteriores PQ; eoque pacto motus omnis, quàm primùm per foramen BC transiit, dilatari incipiet, & inde tanquam à principio & centro, in partes omnes directè propagari. Q. E. D.

PROP. XLIII. THEOR. XXXIV.

Corpus omne tremulum in Medio Elastico propagabit motum pulsuum undique in directum; in Medio verò non Elastico motum circularem excitabit.

Cas. 1. Nam partes corporis tremuli, vicibus alternis eundo & redeundo, itu suo urgebunt & propellent partes Medii sibi proximas, & urgendo compriment easdem & condensabunt; dein, reditu suo, finent partes compressas recedere & sese expandere. Igitur partes Medii corpori tremulo proximæ ibunt & redibunt per vices, ad instar partium corporis illius tremuli: & quâ ratione partes corporis hujus agitabant hasce Medii partes, hæ, similibus tremoribus agitatæ, agitabunt partes sibi proximas; eæque similiter agitatæ agitabunt ulteriores, & sic deinceps in infinitum. Et quemadmodum Medii partes primæ eundo condensantur, & redeundo relaxantur, sic partes reliquæ, quoties eunt, condensabuntur, & quoties redeunt, sese expandent [a]. Et propterea non omnes ibunt & simul redibunt (sic enim determinatas ab invicem distantias servando, non rarefierent & condensarentur per vices) sed accedendo ab invicem ubi condensantur, & recedendo ubi rarefiunt, aliquæ earum ibunt, dum aliæ redeunt; idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes & eundo

[a] Cave sic intelligas, quasi partes Liquoris, dum progrediantur, magis usque se condensent, dum redeant, rarescant; id enim neutiquam verum est. Sed illud modò vult Newtonus, partes Liquoris

do condensatæ, ob motum suum progressivum, quo feriunt obstacula, sunt pulsus; & propterea pulsus successivi à corpore omni tremulo in directum propagabuntur; idque æqualibus circiter ab invicem distantiis, ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus, tremoribus suis singulis, singulos pulsus excitat. Et quanquam corporis tremuli partes eant & redeant secundum plagam aliquam certam & determinatam, tamen pulsus inde per Medium propagati sese dilatabunt ad latera, per Propositionem præcedentem; & à corpore illo tremulo, tanquam centro communi, secundum superficies propemodùm sphæricas & concentricas, undique propagabuntur. Cujus rei exemplum aliquod habemus in Undis; quæ, si digito tremulo excitentur, non solùm pergent hinc inde secundum plagam motûs digiti, sed, in modum circulorum concentricorum, digitum statim cingent & undique propagabuntur. Nam Gravitas undarum supplet locum vis Elasticæ.

Cas. 2. Quòd si Medium non sit Elasticum: quoniam ejus partes, à corporis tremuli partibus vibratis pressæ, condensari nequeunt, propagabitur motus, in instanti, ad partes ubi Medium facillimè cedit; hoc est, ad partes quas corpus tremulum alioqui vacuas à tergo relinqueret. Idem est casus cum casu corporis in Medio quocunque projecti. Medium, cedendo projectilibus, non recedit in infinitum; sed, in circulum eundo, pergit ad spatia, quæ corpus relinquit à tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quamcunque, Medium cedendo perget per circulum ad partes quas corpus relinquit; & quoties corpus regreditur ad locum priorem, Medium inde repelletur, & ad locum suum priorem redibit. Et quamvis corpus tremulum non sit firmum, sed modis omnibus flexile, si tamen magnitudine datum maneat, quoniam tremoribus suis nequit Medium ubivis urgere, quin alibi eidem simul cedat; efficiet ut Medium, recedendo à partibus ubi premitur, pergat semper in orbem ad partes quæ eidem cedunt. Q. E. D.

Corol. Hallucinantur igitur qui credunt agitationem partium Flammæ ad pressionem, per Medium ambiens, secundum lineas rectas

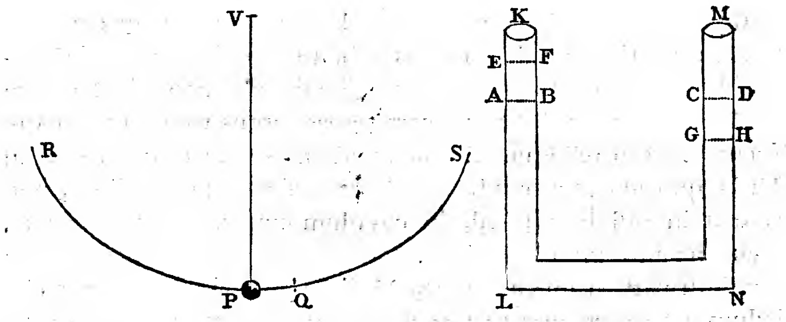
Liquoris euntes magis densas, redeuntes rariores esse, quàm si tota moles liquida, ab omni vi externâ immunis, stagnaret, et uniformem ubique densitatem servaret. *Pemberton.*

rectas propagandam conducere. Debebit ejuſmodi preſſio non ab agitatione ſolâ partium flammæ, ſed à totius dilatatione derivari.

PROP. XLIV. THEOR. XXXV.

Si aqua in Canalis cruribus erectis, KL, MN, *vicibus alternis aſcendat & deſcendat; conſtruatur autem Pendulum, cujus longitudo, inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis, æquetur ſemiſſi longitudinis aquæ in Canali: dico, quòd Aqua aſcendet & deſcendet iiſdem temporibus, quibus Pendulum oſcillatur.*

Longitudinem aquæ menſuro ſecundum axes canalis & crurum, eandem ſummæ horum axium æquando; & reſiſtentiam aquæ, quæ oritur ab attritu canalis, hîc non conſidero. Deſignent igitur AB, CD mediocrem altitudinem aquæ in crure utro-



que; & ubi aqua in crure KL aſcendit ad altitudinem EF, deſcenderit aqua in crure MN ad altitudinem GH. Sit autem P corpus pendulum; VP filum; V punctum ſuſpenſionis; RPQS Cyclois, quam Pendulum deſcribat; P ejus punctum infimum; PQ arcus altitudini AE æqualis. Vis, quâ motus aquæ alternis vicibus acceleratur & retardatur, eſt exceſſus ponderis aquæ in alterutro crure ſupra pondus in altero: ideoque, ubi aqua in crure KL aſcendit ad EF, & in crure altero deſcendit ad GH, vis illa eſt pondus duplicatum aquæ EABF; & propterea eſt ad pondus aquæ totius ut AE, ſeu PQ, ad VP, ſeu PR. Vis etiam, quâ pondus P, in loco quovis Q, acceleratur & retardatur in Cycloide (per Corol. Prop.

Prop. LI.) (b) eſt ad ejus pondus totum, ut ejus diſtantia PQ à loco infimo P, ad Cycloidis longitudinem PR. Quare Aquæ & Penduli, æqualia ſpatia AE, PQ deſcribentium, vires motrices ſunt ut pondera movenda; ideoque, ſi Aqua & Pendulum in principio quieſcunt, vires illæ movebunt eadem æqualiter temporibus æqualibus, efficientque ut motu reciproco ſimul eant & redeant. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur aquæ aſcendentis & deſcendentis, ſive motus intenſior ſit ſive remiſſior, vices omnes ſunt Iſochronæ.

Corol. 2. Si longitudo aquæ totius in canali ſit pedum *Pariſienſium* $6\frac{1}{9}$: aqua tempore minuti unius ſecundi deſcendet, & tempore minuti alterius ſecundi aſcendet; & ſic deinceps vicibus alternis in infinitum. Nam Pendulum pedum $3\frac{1}{18}$ longitudinis tempore minuti unius ſecundi oſcillatur.

Corol. 3. Auctâ autem vel diminutâ longitudine aquæ, augetur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione ſubduplicatâ.

PROP. XLVI. THEOR. XXXVI.

Undarum velocitas eſt in ſubduplicatâ ratione latitudinum.

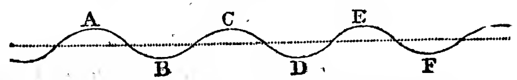
Conſequitur ex conſtructione Propoſitionis ſequentis.

PROP. XLVI. PROB. XII.

Invenire velocitatem Undarum.

Conſtituatur Pendulum cujus longitudo, inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis, æquetur latitudini Undarum: & quo tempore Pendulum illud oſcillationes ſingulas peragit, eodem Undæ progrediendo latitudinem ſuam propemodum conficient.

Undarum latitudinem voco menſuram tranſverſam, quæ vel vallibus imis, vel ſummis culminibus interjacet. Deſignet ABCDEF ſuperficiem aquæ ſtagnantis, undis ſucceſſivis aſcenden-



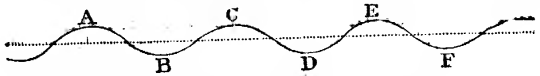
tem ac deſcendentem; ſintque A, C, E, &c. undarum culmina, &

(b) Libri Primi.

B,

De Motu Corporum

B, D, F, &c. valles intermediæ. Et quoniam motus undarum fit per aquæ successivum ascensum & descensum, sic ut ejus partes A, C, E, &c. quæ nunc altissimæ sunt, mox fiant infimæ; & vis motrix, quâ partes altissimæ descendunt & infimæ ascendunt, est



pondus aquæ elevatæ; alternus ille ascensus & descensus analogus erit motui reciproco aquæ in Canali, easdemque temporis leges observabit: & propterea (per Prop. XLIV.) si distantiæ inter undarum loca altissima A, C, E & infima B, D, F æquentur duplæ Penduli longitudini (c); partes altissimæ A, C, E, tempore oscillationis unius evadent infimæ, & tempore oscillationis alterius denuò ascendent. Igitur inter transitum undarum singularum tempus erit oscillationum duarum; hoc est, unda describet latitudinem suam, quo tempore Pendulum illud bis oscillatur; sed eodem tempore Pendulum, cujus longitudo quadrupla est, ideoque æquat undarum latitudinem, oscillabitur semel. Q. E. I.

Corol. 1. Igitur Undæ, quæ pedes *Parisienses* $3\frac{1}{18}$ latæ sunt, tempore minuti unius secundi progrediendo latitudinem suam conficient; ideoque tempore minuti unius primi percurrent pedes $183\frac{1}{3}$, & horæ spatio pedes 11000 quamproximè.

Corol. 2. Et Undarum majorum vel minorum velocitas augebitur vel diminuetur in subduplicatâ ratione latitudinis.

Hæc ita se habent, ex hypothesi quòd partes aquæ rectâ ascendunt vel rectâ descendunt; sed ascensus & descensus ille veriùs fit per circulum, ideoque tempus, hâc Propositione, non nisi quamproximè definitum esse affirmo.

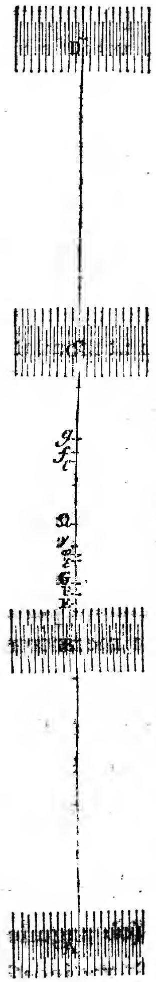
PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

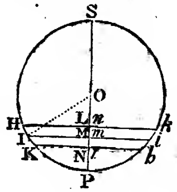
Pulsibus per Fluidum propagatis, singulæ Fluidi particulæ, motu reciproco brevissimo euntes & redeuntes, accelerantur semper & retardantur pro lege oscillantis Penduli.

Designet AB, BC, CD, &c. pulsuum successivorum æquales distantias; ABC, plagam motûs pulsuum ab A versus B propagati; E,

(c) Id est, si distantia loci cujusque altissimi A, vel C, vel E, ab infimorum proximo B, vel D, vel

Liber Secundus.





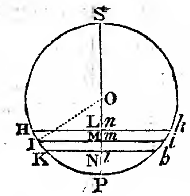
E, F, G, puncta tria physica Medii quiescentis, in rectâ AC ad æquales ab invicem distantias sita; *Ee*, *Ff*, *Gg*, spatia æqualia perbrevia, per quæ puncta illa, motu reciproco, singulis vibrationibus eunt & redeunt; $\varepsilon, \phi, \gamma$, loca quævis intermedia eorundem punctorum; & EF, FG, lineolas physicas, seu Medii partes lineares, punctis illis interjectas, & successivè translatas in loca $\varepsilon\phi$, $\phi\gamma$ & *ef*, *fg*. Rectæ *Ee* æqualis ducatur recta PS. Bisecetur eadem in O, centroque O & intervallo OP describatur circulus SIP*i*. Per hujus circumferentiam totam, cum partibus suis, exponatur tempus totum vibrationis unius, cum ipsius partibus proportionalibus; sic ut completo tempore quovis PH vel PHS*h*, si demittatur ad PS perpendiculum HL vel *hl*, & capiatur Eε æqualis PL vel P*l*, punctum physicum E reperiatur in ε. Hâc lege punctum quodvis E, eundo ab E per ε ad *e*, & inde redeundo per ε ad E, iisdem accelerationis ac retardationis gradibus vibrationes singulas peraget, cum oscillante Pendulo. Probandum est, quòd singula Medii puncta physica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur Medium tali motu, à causâ quâcunque, cieri; & videamus, quid inde sequatur.

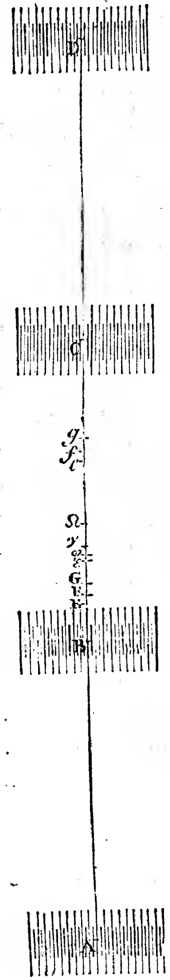
In circumferentiâ PHS*h* capiantur æquales arcus HI, IK, vel *hi*, *ik*; eam habentes rationem ad circumferentiam totam, quam habent æquales rectæ EF, FG ad pulsuum intervallum totum BC. Et demissis perpendiculis IM, KN, vel *im*, *kn*, quoniam puncta E, F, G motibus similibus successivè agitantur, & vibrationes suas integras, ex itu & reditu compositas, interea peragunt, dum pulsus transfertur à B ad C; si PH, vel PHS*h*, sit tempus ab initio motûs puncti E, erit PI, vel PHS*i*, tempus ab initio motûs puncti F; & PK, vel PHS*k*, tempus ab initio motûs puncti G; & propterea

F æquetur duplæ Penduli longitudini.

terea

4





terea $E\varepsilon$, $F\phi$, $G\gamma$ erunt ipſis PL, PM, PN in itu punctorum, vel ipſis P*l*, P*m*, P*n* in punctorum reditu, æquales reſpectivè. Unde $\varepsilon\gamma$, ſeu $EG+G\gamma-E\varepsilon$, in itu punctorum æqualis erit $EG-LN$, in reditu autem æqualis $EG+ln$. Sed $\varepsilon\gamma$ latitudo eſt ſeu expanſio partis Medii EG in loco $\varepsilon\gamma$; & propterea expanſio partis illius in itu eſt ad ejus expanſionem mediocrem, ut $EG-LN$ ad EG; in reditu autem ut $EG+ln$, ſeu $EG+LN$, ad EG. Quare, cùm ſit LN ad HK ut IM ad radium OP, & KH ad EG ut circumferentia PHS*b*P ad BC, id eſt, ſi ponatur V pro radio circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo pulſuum BC, ut OP ad V; & ex æquo LN ad EG ut IM ad V: erit expanſio partis EG, punctive phyſici F, in loco $\varepsilon\gamma$ ad expanſionem mediocrem, quam pars illa habet in loco ſuo primo EG, ut $V-IM$ ad V in itu, utque $V+im$ ad V in reditu. Unde vis elaſtica puncti F in loco $\varepsilon\gamma$ eſt ad vim ejus elaſticam mediocrem in loco EG, ut $\frac{1}{V-IM}$ ad $\frac{1}{V}$ in itu, in reditu verò ut $\frac{1}{V+im}$ ad $\frac{1}{V}$. Et eodem argumento vires elaſticæ punctorum phyſicorum E & G in itu, ſunt ut $\frac{1}{V-HL}$ & $\frac{1}{V-KN}$ ad $\frac{1}{V}$; & virium differentia ad Medii vim elaſticam mediocrem, ut

$$\frac{HL-KN}{VV-V\times HL-V\times KN+HL\times KN} \text{ ad } \frac{1}{V}.$$

Hoc eſt, ut $\frac{HL-KN}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$, ſive ut $HL-KN$ ad V, ſi modò (ob anguſtos limites vibrationum) ſupponamus HL & KN indefinitè minores eſſe quantitate V. Quare cùm quantitas V detur, differentia virium eſt ut $HL-KN$, hoc eſt (ob proportionales $HL-KN$ ad HK, & OM ad OI vel OP, dataſque HK & OP) ut OM; id eſt, ſi F*f* biſecetur in Ω, ut $\Omega\phi$. Et eodem argumento differentia virium elaſticarum punctorum phyſicorum ε & γ, in reditu lineolæ phyſicæ $\varepsilon\gamma$ eſt ut $\Omega\phi$. Sed differentia illa (id eſt, exceſſus vis elaſticæ puncti ε ſupra vim elaſticam puncti γ) eſt vis, quâ interjecta Medii lineola phyſica, $\varepsilon\gamma$, acceleratur in itu, & retardatur in reditu; & propterea vis acceleratrix lineolæ phyſicæ $\varepsilon\gamma$, eſt ut ipſius diſtantia à medio vibrationis loco Ω. Proinde tempus (per Prop. XXXVIII. Lib. I.) rectè exponitur per arcum PI; & Medii pars linearis $\varepsilon\gamma$ lege præſcriptâ movetur, id eſt, lege oſcillantis Penduli: eſtque par ratio partium omnium linearium ex quibus Medium totum componitur. Q. E. D ([d]).

Corol. Hinc patet quòd numerus pulſuum propagatorum idem ſit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multiplicatur in eorum progreſſu. Nam lineola phyſica $\varepsilon\gamma$, quamprimùm ad locum ſuum primum redierit, quieſcet; neque deinceps movebitur, niſi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulſuum qui à corpore tremulo propagantur, motu novo cieatur. Quieſcet igitur, quamprimùm pulſus à corpore tremulo propagari deſinunt.

([d]) Poſuit nimirum Newtonus Liquorem aliquem Elaſticum tali motu, à quâcunque demum cauſâ, agitari, quo ſingula ejus corpuſcula vias rectas breviſſimas eant redeantque, motu ad legem corporis penduli, in Cycloide oſcillantis, attemperato. Tum illud agit, ut exploret, quibuſnam viribus acceleratricibus corpuſcula ejus Liquoris urgeri debeant, ad motum qualem poſuit præſtandum. Eas verò tales eſſe oportere comperit, quæ cum diſtantiis corpuſculorum à medio itineris cujuſque ſui puncto proportione conveniant. Jam verò corpuſcula Liquoris Elaſtici quem corpus quodlibet tremulum agitaverit, ea quoque vias rectas breviſſimas eunt redeuntque; certis utique viribus acceleratricibus, à tremoribus corporibus tremuli, incitata. Eæ autem quænam erunt? Nempe ſi tales ſint, quæ cum diſtantiis corpuſculorum, à medio itineris cujuſque puncto, proportione conveniant, eum illæ corpuſculorum ſingulorum motum efficient, qui ad legem corporis penduli, in Cycloide oſcillantis, attemperatus erit: quoniam motus corpuſculorum ſingulorum, ad eam legem attemperatus, tales vires acceleratrices flagitare oſtenſus ſit: et fieri nullâ ratione poteſt, ut à viribus ſimilibus diſſimiles motus in eâdem materiâ concitentur. Tales autem eſſe vires quibus incitantur corpuſcula Liquoris Elaſtici, à corpore tremulo agitati, Newtonus tacitè aſſumpſit. Et in hoc aſſumpto omnis hujus Propoſitionis poſita eſt demonſtratio: quæ nulla planè erit, ſi hoc aſſumptum negaveris. Imo ſiquis oſtenderit vires acceleratrices non eſſe tales, is vel ex iis ipſis, quæ à Newtono ſunt oſtenſa, contra Newtonum obtinebit motus corpuſculi cujuſque Liquoris Elaſtici motum corporis penduli in Cycloide neutiquam æmulari. Vellem Newtonus ipſe aſſumpti ſui rationes explicâſſet. Mihi ſanè non niſi probabili ratione colligendum videtur, ex eo quod in Nervo tenſo accidere novimus; cujus quidem puncta ſingula vibrantis viribus incitantur, quæ cum diſtantiis punctorum à locis mediis proportione conveniant. Quòd ſi corpus omne tremulum nihil aliud ſit, quàm contextus quidam fibrarum trepidantium, quarum unaquæque pro nervo tenſo habenda ſit, et ſi corporis totius tremor confectus ſit ex fibrarum omnium tremoribus; ſanè veriſimile erit, corpuſcula ſingula corporis tremuli ſimili modo, quo puncta ſingula Nervi tenſi vibrantis, incitari. Denique ſi corpus tremulum in corpuſculis Liquoris Elaſtici non alios motus efficere poſſit, niſi qui ſimiles ſint eorum, quos ipſius corpuſcula proprios habent, corpuſcula utique Liquoris Elaſtici, quem corpus tremulum agitet, motus punctorum Nervi tenſi æmulari veriſimillimum erit.

Cæterùm de Motu Nervi Tenſi conſulendus eſt Taylorus in *Methodo Increment. Part.* II. Unum moneo, pro eo quod apud Taylorum in demonſtratione Lemmatis IX. legimus, eſſe *tr* ad *t*B ut B*b* ad BS, omnino legendum, eſſe *tr* ad *t*B ut B*b* ad 2BS. Cujus emendationis ratio, ex iis quæ ad Lemma tertium hujus libri diſputavimus, ſatis patet.

PROP. XLVIII. THEOR. XXXVIII.

Pulsuum in Fluido Elastico propagatorum velocitates sunt in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione vis elasticæ directè & subduplicatâ ratione densitatis inversè; si modò Fluidi vis elastica ejusdem condensationi proportionalis esse supponatur.

Cas. 1. Si Media sint homogenea, & pulsuum distantiæ in his Mediis æquentur inter se, sed motus in uno Medio intensior sit: contractiones & dilatationes partium analogarum erunt ut iidem motus. Accurata quidem non est hæc proportio. Veruntamen nisi contractiones & dilatationes sint valdè intensæ, non errabit sensibiliter, ideoque pro physicè accuratâ haberi potest. Sunt autem vires elasticæ motrices ut contractiones & dilatationes; & velocitates partium æqualium, simul genitæ, sunt ut vires. Ideoque æquales & correspondentes pulsuum correspondentium partes itus & reditus suos, per spatia contractionibus & dilatationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ sunt ut spatia, simul peragent: & propterea pulsus, qui, tempore itûs & reditûs unius, latitudinem suam progrediendo conficiunt, & in loca pulsuum proximè præcedentium semper succedunt, ob æqualitatem distantiarum, æquali cum velocitate in Medio utroque progredientur.

Cas. 2. Sin pulsuum distantiæ, seu longitudines, sint majores in uno Medio quàm in altero; ponamus, quòd partes correspondentes spatia latitudinibus pulsuum proportionalia, singulis vicibus eundo & redeundo, describant: & æquales erunt earum contractiones & dilatationes. Ideoque si Media sint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ elasticæ motrices, quibus reciproco motu agitantur. Materia autem, his viribus movenda, est ut pulsuum latitudo: & in eâdem ratione est spatium, per quod singulis vicibus, eundo & redeundo, moveri debent. Estque tempus itûs & reditûs unius in ratione compositâ ex ratione subduplicatâ materiæ & ratione subduplicatâ spatii (e), atque ideo ut spatium. Pulsus autem, temporibus itûs & reditûs unius eundo, latitudines suas conficiunt, hoc est, spatia temporibus proportionalia percurrunt; & propterea sunt æquiveloces.

(e) Per Prop. XLVII. et Prop. XXIV. Cor. 5.

Cas.

Cas. 3. In Mediis igitur densitate & vi elasticâ paribus, pulsus omnes sunt æquiveloces. Quòd si Medii vel densitas vel vis elastica intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis elasticæ, & materia movenda in ratione densitatis augetur; tempus, quo motus iidem peragantur ac priùs, augebitur in subduplicatâ ratione densitatis, ac diminuetur in subduplicatâ ratione vis elasticæ (f). Et propterea velocitas pulsuum erit in ratione compositâ ex ratione subduplicatâ densitatis Medii inversè & ratione subduplicatâ vis elasticæ directè. Q. E. D.

Hæc Propositio ulteriùs patebit ex constructione sequentis.

PROP. XLIX. PROB. XI.

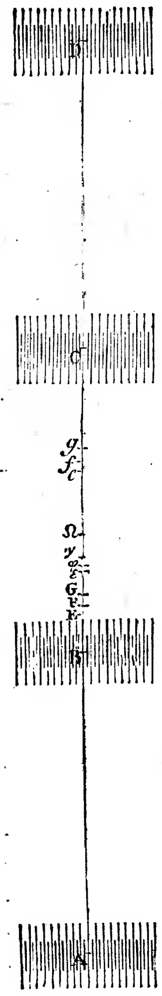
Datis Medii densitate & vi elasticâ, invenire velocitatem pulsuum.

Fingamus Medium ab incumbente pondere, pro more Aëris nostri, comprimi; sitque A altitudo Medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens, & cujus densitas eadem sit cum densitate Medii compressi, in quo pulsus propagantur. Constitui autem intelligatur Pendulum, cujus longitudo, inter punctum suspensionis & centrum oscillationis, sit A: & quo tempore Pendulum illud oscillationem integram, ex itu & reditu compositam, peragit, eodem Pulsus eundo conficiet spatium circumferentiæ circuli, radio A descripti, æquale.

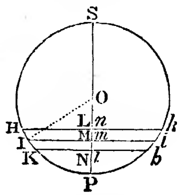
Nam stantibus quæ in Propositione XLVII. constructa sunt, si linea quævis physica EF, singulis vibrationibus describendo spatium PS, urgeatur in extremis itûs & reditûs cujusque locis, P & S, à vi elasticâ quæ ipsius ponderi æquetur; peraget hæc vibrationes singulas, quo tempore eadem in Cycloide, cujus perimeter tota longitudini PS æqualis est, oscillari posset: id adeo, quia vires æquales æqualia corpuscula per æqualia spatia simul impellent. Quare cùm oscillationum tempora sint in subduplicatâ ratione longitudinis Pendulorum, & longitudo Penduli æquetur dimidio arcui Cycloidis totius; foret tempus vibrationis unius ad tempus oscillationis Penduli, cujus longitudo est A, in subduplicatâ ratione longitudinis $\frac{1}{2}$PS, seu PO, ad longitudinem A. Sed vis elastica, quâ lineola physica, EG, in locis suis extremis, P, S, existens urgetur, erat (in demonstratione Propositionis XLVII.)

(f) Prop. XLVII. et Prop. XXIV.

ad



ad ejus vim totam elaſticam ut HL−KN ad V, hoc eſt (cùm punctum K jam incidat in P) ut HK ad V: & vis illa tota, hoc eſt pondus incumbens, quo lineola EG comprimitur, eſt ad pondus lineolæ, ut ponderis incumbentis altitudo A ad lineolæ longitudinem EG; ideoque ex æquo, vis,



quâ lineola EG in locis ſuis P & S urgetur, eſt ad lineolæ illius pondus ut HK×A ad V×EG, ſive ut PO×A ad VV, nam HK erat ad EG ut PO ad V. Quare cùm tempora, quibus æqualia corpora per æqualia ſpatia impelluntur, ſint reciprocè in ſubduplicatâ ratione virium, erit tempus vibrationis unius, urgente vi illâ elaſticâ, ad tempus vibrationis, urgente vi ponderis, in ſubduplicatâ ratione VV ad PO×A, atque ideo ad tempus oſcillationis Penduli, cujus longitudo eſt A, in ſubduplicatâ ratione VV ad PO×A, & ſubduplicatâ ratione PO ad A conjunctim; id eſt, in ratione integrâ V ad A. Sed tempore vibrationis unius, ex itu & reditu compoſitæ, pulſus progrediendo conficit latitudinem ſuam BC. Ergo tempus, quo pulſus percurrit ſpatium BC, eſt ad tempus oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ, ut V ad A, id eſt, ut BC ad circumferentiam circuli cujus radius eſt A. Tempus autem, quo pulſus percurret ſpatium BC, eſt ad tempus quo percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem, in eâdem ratione; ideoque tempore talis oſcillationis pulſus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. Q.E.D.

Corol. 1. Velocitas pulſuum ea eſt, quam acquirunt Gravia æqualiter accelerato motu cadendo, & caſu ſuo deſcribendo dimidium altitudinis A. Nam tempore caſûs hujus, cum velocitate cadendo acquiſitâ, pulſus percurret ſpatium, quod erit æquale toti altitudini A; ideoque tempore oſcillationis unius, ex itu & reditu compoſitæ, percurret ſpatium æquale circumferentiæ circuli radio A de-

A deſcripti: eſt enim tempus caſûs ad tempus oſcillationis ut radius circuli ad ejuſdem circumferentiam.

Corol. 2. Unde cùm altitudo illa A ſit ut Fluidi vis elaſtica directè & denſitas ejuſdem inverſè; velocitas pulſuum erit in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione denſitatis inverſè & ſubduplicatâ ratione vis elaſticæ directè.

PROP. L. PROB. XII.

Invenire pulſuum diſtantias.

Corporis, cujus tremore pulſus excitantur, inveniatur numerus vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur ſpatium, quod pulſus eodem tempore percurrere poſſit, & pars inventa erit pulſûs unius latitudo. Q. E. I.

Scholium.

Spectant Propoſitiones noviſſimæ ad motum Lucis & Sonorum. Lux enim cùm propagetur ſecundum lineas rectas, in actione ſolâ (per Prop. XLI & XLII.) conſiſtere nequit. Soni verò, propterea quòd à corporibus tremulis oriantur, nihil aliud ſunt quàm Aëris pulſus propagati, per Prop. XLIII. Comfirmatur id ex tremoribus, quos excitant in corporibus objectis, ſi modò vehementes ſint & graves, quales ſunt ſoni Tympanorum. Nam tremores celeriores & breviores difficiliùs excitantur. Sed & ſonos quoſvis, in chordas corporibus ſonoris uniſonas impactos, excitare tremores notiſſimum eſt. Confirmatum etiam ex velocitate ſonorum. Nam cum pondera ſpecifica Aquæ Pluvialis & Argenti Vivi ſint ad invicem ut 1 ad $13\frac{2}{3}$ circiter, & ubi Mercurius in *Barometro* altitudinem attingit digitorum *Anglicorum* 30, pondus ſpecificum Aëris & Aquæ Pluvialis ſint ad invicem ut 1 ad 870 circiter: erunt pondera ſpecifica Aëris & Argenti Vivi ut 1 ad 11890. Proinde cùm altitudo Argenti Vivi ſit 30 digitorum, altitudo aëris uniformis, cujus pondus aërum noſtrum ſubjectum comprimere poſſet, erit 356700 digitorum, ſeu pedum *Anglicorum* 29725. Eſtque hæc altitudo illa ipſa, quam, in conſtructione ſuperioris Problematis, nominavimus A. Circuli radio 29725 pedum deſcripti circumferentia eſt pedum 186768. Et cùm Pendulum

digitos

digitos $39\frac{1}{8}$ longum oscillationem, ex itu & reditu compositam, tempore minutorum duorum secundorum, uti notum est, absolvat; Pendulum pedes 29725, seu digitos 356700, longum oscillationem consimilem tempore minutorum secundorum $190\frac{3}{4}$ absolvere debebit. Eo igitur tempore Sonus progrediendo conficiet pedes 186768, ideoque tempore minuti unius secundi pedes 979.

Cæterùm in hoc computo nulla habetur ratio crassitudinis solidarum particularum aëris, per quam sonus utique propagatur in instanti. Cùm pondus aëris sit ad pondus aquæ ut 1 ad 870, & sales sint ferè duplo densiores quàm aqua; si particulæ aëris ponantur esse ejusdem circiter densitatis cum particulis vel aquæ vel salium, & raritas aëris oriatur ab intervallis particularum: diameter particulæ aëris erit ad intervallum inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, & ad intervallum inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde ad pedes 979, quos Sonus tempore minuti unius secundi juxta calculum superiorem conficiet, addere licet pedes $\frac{979}{9}$, seu 109, circiter, ob crassitudinem particularum aëris: & sic Sonus tempore minuti unius secundi conficiet pedes 1088 circiter.

His adde, quòd vapores in aëris latentes, cùm sint alterius elateris & alterius toni, vix aut ne vix quidem participant motum aëris veri, quo Soni propagantur. His autem quiescentibus, motus ille celeriùs propagabitur per solum aërem verum, idque in subduplicatâ ratione minoris materiæ. Ut si Atmosphæra constet ex decem partibus aëris veri & unâ parte vaporum, motus sonorum celerior erit in subduplicatâ ratione 11 ad 10, vel in integrâ circiter ratione 21 ad 20, quàm si propagaretur per undecim partes aëris veri: ideoque motus sonorum, suprà inventus, augendus erit in hâc ratione. Quo pacto Sonus, tempore minuti unius secundi, conficiet pedes 1142.

Hæc ita se habere debent tempore Verno & Autumnali, ubi Aër per calorem temperatum rarescit, & ejus vis elastica nonnihil intenditur. At Hyberno tempore, ubi Aër per frigus condensatur, & ejus vis elastica remittitur, motus sonorum tardior esse debet in subduplicatâ ratione densitatis; & vicissim Æstivo tempore debet esse velocior.

Constat

Constat autem per experimenta, quòd soni, tempore minuti unius secundi, eundo conficiunt pedes *Londinenses* plus minus 1142, *Parisienses* verò 1070.

Cognitâ sonorum velocitate, innotescunt etiam intervalla pulsuum. Invenit utique *D. Sauveur*, factis à se experimentis, quòd fistula aperta, cujus longitudo est pedum *Parisiensium* plus minus quinque, sonum edit ejusdem toni cum sono chordæ quæ tempore minuti unius secundi centies recurrit. Sunt igitur pulsus plus minus centum in spatio pedum *Parisiensium* 1070, quos sonus tempore minuti unius secundi percurrit; ideoque pulsus unus occupat spatium pedum *Parisiensium* quasi $10\frac{7}{10}$, id est, duplam circiter longitudinem fistulæ. Unde versimile est, quòd latitudines pulsuum, in omnium apertarum fistularum sonis, æquentur duplis longitudinibus fistularum.

Porro cur Soni cessante motu corporis sonori statim cessant, neque diutiùs audiuntur, ubi longissimè distamus à corporibus sonoris, quàm cùm proximè absumus, patet ex Corollario Propositionis XLVII. libri hujus. Sed & cur soni in tubis stentorophonicis valdè augentur, ex allatis principiis manifestum est. Motus enim omnis reciprocus singulis recursibus à causâ generante augeri solet. Motus autem in tubis, dilatationem sonorum impedientibus, tardiùs amittitur & fortiùs recurrit, & propterea à motu novo singulis recursibus impresso magis augetur. Et hæc sunt præcipua Phænomena Sonorum.

SECTIO IX.

De motu Circulari Fluidorum.

HYPOTHESIS.

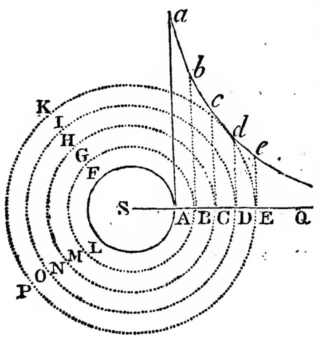
Resistentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium Fluidi, cæteris paribus, proportionalem esse velocitati, quâ partes Fluidi separantur ab invicem.

PROP.

PROP. LI. THEOR. XXXIX.

Si Cylindrus solidus infinitè longus in Fluido uniformi & infinito, circa axem positione datum, uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur Fluidum in orbem, perseveret autem Fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo; dico, quòd tempora periodica partium Fluidi sunt ut ipsarum distantiæ ab axe Cylindri.

Sit AFL Cylindrus uniformiter circa axem S in orbem actus, & circulis concentricis BGM, CHN, DIO, EKP, &c. distinguatur Fluidum in orbes cylindricos innumeros concentricos solidos ejusdem crassitudinis. Et quoniam homogeneum est Fluidum ([a]), impressiones contiguorum orbium, in se mutuò factæ, erunt (per hypothesin) ut eorum translationes ab invicem, & superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in orbem aliquem major est, vel minor, ex parte concavâ quàm ex parte convexâ; prævalebit impressio fortior, & motum orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu, vel in contrariam, dirigitur. Proinde ut orbis unusquisque in motu suo uniformiter perseveret, debent impressiones ex parte utrâque sibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde, cùm impressiones sunt ut contiguæ superficies & harum translationes ab invicem, erunt translationes inversè ut superficies, hoc est, inversè ut superficierum distantiæ ab axe. Sunt autem differentiæ motuum angularium, circa axem, ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directè & distantiæ inversè; hoc est, conjunctis rationibus, ut quadrata distantiarum inversè. Quare, si ad infinitæ rectæ SABCDEQ partes singulas erigantur perpendicula, A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, &c. ipsarum SA, SB, SC, SD, SE, &c. quadratis reciprocè proportionalia, & per terminos perpendiculari-



([a]) Vide Prop. LII. Not. [c] & [d].

um

um duci intelligatur linea curva hyperbolica; erunt summæ differentiarum, hoc est, motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*; id est, si, ad constituendum Medium uniformiter fluidum, orbium numerus augeatur & latitudo minuatur in infinitum, ut areæ hyperbolicæ his summis analogæ A*a*Q, B*b*Q, C*c*Q, D*d*Q, E*e*Q, &c. Et tempora, motibus angularibus reciprocè proportionalia, erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Est igitur tempus periodicum particulæ cujusvis D reciprocè ut area D*d*Q; hoc est (per notas Curvarum Quadraturas) directè ut distantia SD. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc motus angulares particularum Fluidi sunt reciprocè ut ipsarum distantiæ ab axe Cylindri, & velocitates absolutæ sunt æquales.

Corol. 2. Si Fluidum in vase cylindrico longitudinis infinitæ contineatur, & cylindrum alium interiorem contineat, revolvatur autem cylindrus uterque circa axem communem, sintque revolutionum tempora ut ipsorum semidiametri, & perseveret Fluidi pars unaquæque in motu suo: erunt partium singularum tempora periodica ut ipsarum distantiæ ab axe cylindrorum.

Corol. 3. Si Cylindro & Fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium Fluidi, non mutabuntur motus partium inter se. Nam translationes partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perseverabit motu, qui, attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quàm retardatur.

Corol. 4. Unde si toti Cylindrorum & Fluidi systemati auferatur motus omnis angularis Cylindri exterioris, habebitur motus Fluidi in cylindro quiescente.

Corol. 5. Igitur si Fluido & Cylindro exteriore quiescentibus, revolvatur cylindrus interior uniformiter; communicabitur motus circularis Fluido, & paulatim per totum Fluidum propagabitur; nec priùs desinet augeri, quàm Fluidi partes singulæ motum Corollario quarto definitum acquirant.

Corol. 6. Et quoniam Fluidum conatur motum suum adhuc latiùs propagare, hujus impetu circumagetur etiam cylindrus exterior nisi violentur detentus; & accelerabitur ejus motus, quoad

usque

De Motu Corporum

usque tempora periodica cylindri utriusque æquentur inter se. Quòd si cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum Fluidi retardare; &, nisi cylindrus interior, vi aliquâ extrinsecus impressâ, motum illum conservet, efficiet ut idem paulatim cesset.

Quæ omnia in Aquâ profundâ stagnante experiri licet.

PROP. LII. THEOR. XL.

Si Sphæra solida, in Fluido uniformi & infinito, circa axem positione datum, uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur Fluidum in orbem; perseveret autem Fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo: dico, quòd tempora periodica partium Fluidi erunt ut quadrata distantiarum à centro Sphæræ.

Cas. 1. Sit AFL Sphæra uniformiter circa axem S in orbem acta, & circulis concentricis BGM, CHN, DIO, EKP, &c. distinguatur Fluidum in orbes innumeros concentricos ejusdem crassitudinis (b). Finge autem orbes illos esse solidos (c); & quoniam homogeneum est Fluidum (d), impressiones contiguorum orbium, in se mutuò factæ, erunt (per hypothesin) ut eorum translationes ab invicem & superficies continuæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in orbem aliquem major est, vel minor, ex parte concavâ quàm ex parte convexâ; prævalebit impressio fortior, & velocitatem orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu, vel in contrariam, dirigitur. Proinde, ut orbis unusquisque in motu suo perseveret uniformiter, debebunt impressiones ex parte utrâque sibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde, cùm impressiones sint ut contiguæ superficies & harum translationes ab invicem; erunt translationes inversè ut superficies, hoc est, inversè ut quadrata distantiarum superficierum à centro. Sunt autem differentiæ motuum

(b) Centro scilicet S, in plano aliquo per sphæræ polos ducto, intelligantur circuli innumeri omnium magnitudinum, qui circa axem sphæræ conversi, sphæricas superficies innumeras circum centrum commune S efficiant, quibus tota moles liquida distinguatur in orbes innumeros ejusdem crassitudinis. Circuli BGM, CHN, DIO, EKP lineationis Newtonianæ sunt horum orbium Æquatores.

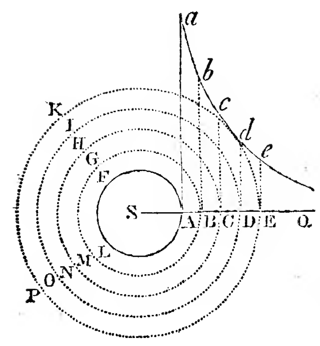
(c) Congelato utique liquore in orbibus singulis separatim; ita tamen ut densitas materiæ uniformis, quæ antè fuit, maneat. Dico liquorem in *orbibus singulis* separatim congelandum esse. Nempe ut corpora solida disjuncta tot efficiat, quot sint orbes, nec in unum corpus solidum concrescat.

(d) Quoniam homogeneum erat Fluidum, & densitas materiæ quæ Liquoris erat, ea in corporibus solidis, ex liquoris concretione factis, manet, idcirco densitas materiæ in unoquoque orbe uniformis, & in omnibus eadem erit. Quapropter *impressiones contiguorum orbium*, &c.

(e) Cum æquatoris plano parallelos.

(f) Nempe superiorem alterum, alterum inferiorem in eâdem sphæricâ superficie.

Liber Secundus.



motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directè & distantiæ inversè; hoc est, conjunctis rationibus, ut cubi distantiarum inversè. Quare si ad rectæ infinitæ SABCDEQ partes singulas erigantur perpendicula Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, &c. ipsarum SA, SB, SC, SD, SE, &c. &c. cubis reciprocè proportionalia, erunt summæ differentiarum, hoc est, motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum Aa, Bb, Cc, Dd, Ee: id est (si ad constituendum Medium uniformiter fluidum, numerus orbium augeatur & latitudo minuatur in infinitum) ut areæ hyperbolicæ his summis analogæ AaQ, BbQ, CcQ, DdQ, EeQ, &c. Et tempora periodica, motibus angularibus reciprocè proportionalia, erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Est igitur tempus periodicum orbis cujusvis DIO reciprocè ut area DdQ, hoc est, per notas Curvarum Quadraturas, directè ut quadratum distantiæ SD. Id quod volui primò demonstrare.

Cas. 2. A centro Sphæræ ducantur infinitæ rectæ quàm plurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos, æqualibus differentiis se mutuò superantes; & his rectis circa axem revolutis concipe orbes in annulos innumeros (e) secari; & annulus unusquisque habebit annulos quatuor sibi contiguos, unum interiorem, alterum exteriorem, & duos laterales (f). Attritu interioris & exterioris non potest annulus unusquisque, nisi in motu juxta legem casûs primi facto, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonstratione casûs primi. Et propterea annulorum series quælibet à globo in infinitum rectâ pergens, movebi-

tur

tur pro lege caſûs primi, niſi quatenus impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu hâc lege facto attritus annulorum ad latera nullus eſt (g); neque ideo motum, quò minùs hâc lege fiat, impediet. Si annuli, qui à centro æqualiter diſtant, vel citiùs revolverentur vel tardiùs juxta Polos quam juxta Eclipticam (h), tardiores accelerarentur, & velociores retardarentur ab attritu mutuò, & ſic vergerent ſemper tempora periodica ad æqualitatem, pro lege caſûs primi. Non impedit igitur hic attritus, quo minùs motus fiat ſecundum legem caſûs primi, & propterea lex illa obtinebit: hoc eſt, annulorum ſingulorum tempora periodica erunt ut quadrata diſtantiarum ipſorum à centro globi. Quod volui ſecundò demonſtrare.

Caſ. 3. Dividatur jam annulus unuſquiſque ſectionibus tranſverſis in particulas innumeras conſtituentes ſubſtantiam abſolutè & uniformiter fluidam; & quoniam hæ ſectiones non ſpectant ad legem motûs circularis, ſed ad conſtitutionem Fluidi ſolummodò conducunt, perſeverabit motus circularis ut priùs. His ſectionibus annuli omnes quàm minimi aſperitatem & vim attritûs mutui aut non mutabunt, aut mutabunt æqualiter. Et manente cauſarum proportione manebit effectuum proportio, hoc eſt, proportio motuum & periodicorum temporum. Q. E. D. Cæterùm cum motus circularis, & inde orta vis centrifuga, major ſit ad Eclipticam (h) quàm ad Polos; debebit cauſa aliqua adeſſe, quâ particulæ ſingulæ in circulis ſuis retineantur; ne materia, quæ ad Eclipticam eſt (h), recedat ſemper à centro, &, per exteriora Vorticis, migret ad Polos, indeque per axem ad Eclipticam (h) circulatione perpetuâ revertatur.

Corol. 1. Hinc motus angulares partium Fluidi circa axem globi, ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro globi, & velocitates abſolutæ reciprocè ut eadem quadrata applicata ad diſtantias ab axe.

Corol. 2. Si globus in Fluido quieſcente, ſimilari & infinito, circa axem poſitione datum, uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus Fluido in morem Vorticis, & motus iſte paulatim propagabitur in infinitum; neque priùs ceſſabit in ſingulis Fluidi partibus accelerari, quàm tempora periodica ſingularum

(g) Propter æquales motus angulares annulorum omnium ejuſdem ſolidi orbis ſphærici.

partium ſint ut quadrata diſtantiarum à centro globi.

Corol. 3. Quoniam Vorticis partes interiores, ob majorem ſuam velocitatem, atterunt & urgent exteriores, motumque ipſis eâ actione perpetuò communicant; & exteriores illi eandem motûs quantitatem in alios adhuc exteriores ſimul transferunt, eâque actione ſervant quantitatem motûs ſui planè invariatam; patet, quòd motus perpetuò transfertur à centro ad circumferentiam Vorticis, & per infinitatem circumferentiæ abſorbetur. Materia inter ſphæricas duas quaſvis ſuperficies Vortici concentricas nunquam accelerabitur, eò quòd motum omnem, à materiâ interiore, acceptum transfert ſemper in exteriorem.

Corol. 4. Proinde ad conſervationem Vorticis conſtanter in eodem movendi ſtatu, requiritur principium aliquod activum, à quo globus eandem ſemper quantitatem motûs accipiat, quam imprimit in materiam Vorticis. Sine tali principio neceſſe eſt, ut globus & Vorticis partes interiores, propagantes ſemper motum ſuum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardeſcant paulatim, & in orbem agi deſinant.

Corol. 5. Si globus alter huic Vortici, ad certam ab ipſius centro diſtantiam, innataret, & interea circa axem inclinatione datum vi aliquâ conſtanter revolveretur; hujus motu raperetur Fluidum in vorticem: & primò revolveretur hic Vortex novus & exiguus, unà cum globo, circa centrum alterius, & interea latiùs ſerperet ipſius motus, & paulatim propagaretur in infinitum, ad modum Vorticis primi. Et eâdem ratione, quâ hujus globus raperetur motu Vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus; ſic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, ſeque mutuò, ob motum illum circularem, fugerent, niſi per vim aliquam cohibiti. Poſtea, ſi vires conſtanter impreſſæ, quibus globi in motibus ſuis perſeverant, ceſſarent, & omnia legibus Mechanicis permitterentur, langueſceret paulatim motus globorum (ob rationem in Corol. 3 & 4. aſſignatam) & Vortices tandem conquieſcerent.

Corol. 6. Si globi plures, datis in locis, circum axes poſitione datos, certis cum velocitatibus conſtanter revolverentur, fierent Vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi ſinguli eâ-

(h) Intellige Æquatorem.

dem ratione, quâ unus aliquis motum ſuum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus ſuos in infinitum, adeo ut Fluidi infiniti pars unaquæque eo agitetur motu, qui ex omnium globorum actionibus reſultat. Unde Vortices non definientur certis limitibus, ſed in ſe mutuò paulatim excurrent; globique, per actiones Vorticum in ſe mutuò, perpetuo movebuntur de locis ſuis, uti in Corollario ſuperiore expoſitum eſt; neque certam quamvis inter ſe poſitionem ſervabunt, niſi per vim aliquam retenti. Ceſſantibus autem viribus illis, quæ, in globos conſtanter impreſſæ, conſervant hoſce motus, materia, ob rationem in Corollario tertio & quarto aſſignatam, paulatim requieſcet, & in vortices agi deſinet.

Corol. 7. Si Fluidum ſimilare claudatur in vaſe ſphærico, ac globi, in centro conſiſtentis, uniformi rotatione agatur in vorticem, globus autem & vas in eandem partem circa axem eundem revolvantur, ſintque eorum tempora periodica ut quadrata ſemidiametrorum: partes Fluidi non priùs perſeverabunt in motibus ſuis ſine acceleratione & retardatione, quàm ſint eorum tempora periodica ut quadrata diſtantiarum à centro Vorticis. Alia nulla Vorticis conſtitutio poteſt eſſe permanens.

Corol. 8. Si vas, Fluidum incluſum, & globus ſervent hunc motum, & motu præterea communi angulari, circa axem quemvis datum, revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium Fluidi in ſe invicem, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium inter ſe pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, quo fit, ut attritu ex uno latere non magis tardetur, quàm acceleretur attritu ex altero.

Corol. 9. Unde ſi vas quieſcat ac detur motus globi, dabitur motus Fluidi. Nam concipe planum tranſire per axem globi, & motu

(i) Hujus Corollarii veritatem ſic oſtendimus. A Vaſe, Globo, et Liquore interpoſito, pro lege Corollarii 7. circumactis, auferatur motus quivis angularis communis z. Motus angularis qui in Globo reliquus eſt, dicatur G; qui in orbe quovis Liquoris CHN, c; qui in orbe extimo EKT, ſeu vaſis orbe, E. Erit igitur $G+z$ ad $c+z$ ut SC^2 ad SA^2. Et $c+z$ ad $E+z$ ut SE^2 ad SC^2 (per Cor. 7). Unde etiam $G+z$ ad $E+z$ ut SE^2 ad SA^2. Hinc ſi ponatur $E=0$, ut vas ablatâ motûs ejus angularis parte z, ad quietem redigatur, erit $G+z$ ad z ut SE^2 ad SA^2; et $c+z:z = SE^2:SC^2$. Plani, motu ejus qui globi eſt contrario circumacti, dicatur motus angularis P. Tempus converſionis ejuſdem plani dicatur π; Globi, γ. Erit igitur $\pi:\gamma = G:P$; et $\pi+\gamma:\gamma = G+P:P$. Sed $\pi+\gamma:\gamma = SE^2:SA^2$. (Id enim Newtonus poſuit.) Quare $G+P:P = SE^2:SA^2$. At vero $SE^2:SA^2 = G+z:z$, modò talis ſit z, qui efficiat ut vas quieſcat. Id enim à nobis oſtenſum

motu contrario revolvi; & pone ſummam temporis revolutionis hujus & revolutionis globi eſſe ad tempus revolutionis globi, ut quadratum ſemidiametri vaſis ad quadratum ſemidiametri globi: & tempora periodica partium Fluidi, reſpectu plani hujus, erunt ut quadrata diſtantiarum ſuarum à centro globi (i).

Corol. 10. Proinde ſi vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diverſum aliquem, datâ cum velocitate quâcunque moveatur, dabitur motus Fluidi. Nam ſi ſyſtemati toti auferatur vaſis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter ſe qui priùs, per Corol. 8. Et motus iſti per Corol. 9. dabuntur.

Corol. 11. Si vas & Fluidum quieſcant, & globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per Fluidum totum in vas, & circumagetur vas, niſi violentur detentum; neque priùs deſinent Fluidum & vas accelerari, quàm ſint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi. Quòd ſi vas vi aliquâ detineatur, vel revolvatur motu quovis conſtanti & uniformi, deveniet Medium paulatim ad ſtatum motûs in Corollariis 8, 9 & 10, definiti, nec in alio unquam ſtatu quocunque perſeverabit. Deinde verò, ſi, viribus illis ceſſantibus quibus vas & globus certis motibus revolvebantur, permittatur ſyſtema totum legibus Mechanicis; vas & globus in ſe invicem agent mediante Fluido, neque motus ſuos in ſe mutuò per Fluidum propagare priùs ceſſabunt, quàm eorum tempora periodica æquentur inter ſe, & ſyſtema totum, ad inſtar corporis unius ſolidi, ſimul revolvatur.

Scholium.

In his omnibus ſuppono Fluidum ex materiâ, quoad denſitatem & fluiditatem, uniformi conſtare. Tale eſt, in quo globus idem eodem cum motu, in eodem temporis intervallo, motus ſimiles & æquales, ad æquales ſemper à ſe diſtantias, ubivis in Fluido conſtitutus,

tenſum eſt.) Unde $G+z:z = G+P:P$. Et dividendo $G:z = G:P$. Unde $z=P$. Quare cùm ſit $c+z:z = SE^2:SC^2$ (id enim à nobis oſtenſum.) erit $c+P:P = SE^2:SC^2$. Eſt autem P ad $P+c$ ut motus angularis Plani, contrariè circumacti, ad motum angularem, quo partes Liquoris in orbe CHN Plano illi admoventur. Unde P erit ad $P+c$ ut tempus converſionis orbis CHN, ratione ejus Plani, ad tempus quo Planum ipſum convertetur. Quare cùm ſit etiam $P:P+c = SC^2:SE^2$, tempus primum erit ad poſterius ut quadratum ex SC ad quadratum ex SE. Et ſimili modo de alio quovis orbe Liquoris oſtendetur, ejus tempus convertendi, ratione Plani contrariè circumacti, ad tempus, quo Planum ipſum convertitur, rationem habere quam quadratum ex orbis ejus ſemidiametro ad quadratum ex ſemidiametro vaſis. Q. E. D.

constitutus, propagare possit. Conatur quidem materia, per motum suum circularem, recedere ab axe Vorticis, & propterea premit materiam omnem ulteriorem. Ex hâc pressione fit attritus partium fortior, & separatio ab invicem difficilior; & per consequens diminuitur materiæ fluiditas. Rursus si partes Fluidi sunt alicubi crassiores, seu majores, fluiditas ibi minor erit, ob pauciores superficies in quibus partes separentur ab invicem. In hujusmodi casibus deficientem fluiditatem, vel lubricitate partium, vel lentore, aliâve aliquâ conditione restitui suppono. Hoc nisi fiat, materia, ubi minùs fluida est, magis cohærebit & segnior erit; ideoque motum tardiùs recipiet & longiùs propagabit, quàm pro ratione superiùs assignatâ. Si figura vasis non sit sphærica, movebuntur particulæ in lineis non circularibus, sed conformibus eidem vasis figuræ, & tempora periodica erunt ut quadrata mediocrium distantiarum à centro quamproximè. In partibus inter centrum & circumferentiam, ubi latiora sunt spatia, tardiores erunt motus; ubi angustiora, velociores; neque tamen particulæ velociores petent circumferentiam. Arcus enim describent minùs curvos, & conatus recedendi à centro non minùs diminuetur per decrementum hujus curvaturæ, quàm augebitur per incrementum velocitatis. Pergendo à spatiis angustioribus in latiora recedent paulo longiùs à centro, sed isto recessu tardescent; & accedendo postea de latioribus ad angustiora accelerabuntur, & sic per vices tardescent & accelerabuntur particulæ singulæ in perpetuum. Hæc ita se habebunt in vase rigido. Nam in Fluido infinito constitutio Vorticum innotescit, per Propositionis hujus Corollarium sextum.

Proprietates autem Vorticum hâc Propositione investigare conatus sum, ut pertentarem, siquâ ratione Phænomena Cœlestia per vortices explicari possint. Nam Phænomenon est, quòd Planetarum, circa Jovem revolventium, tempora periodica sunt in ratione sesquiplicatâ distantiarum à centro Jovis; & eadam regula obtinet in Planetis, qui circa Solem revolvuntur. Obtinent autem hæ regulæ in Planetis utrisque quàm accuratissimè, quatenus Observationes Astronomicæ hactenus prodidere. Ideoque si Planetæ illi à Vorticibus, circa Jovem & Solem revolventibus, deferantur, debebunt etiam hi vortices eâdem lege revolvi. Verùm tempora periodica

periodica partium Vorticis prodierunt in ratione duplicatâ distantiarum à centro motûs: neque potest ratio illa diminui & ad rationem sesquiplicatam reduci, nisi vel materia Vorticis eo fluidior sit, quo longiùs distat à centro; vel resistentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium Fluidi, ex auctâ velocitate, quâ partes Fluidi separantur ab invicem, augeatur in majori ratione, quàm ea est, in quâ velocitas augetur. Quorum tamen neutrum rationi consentaneum videtur. Partes crassiores & minùs fluidæ, nisi graves sint in centrum, circumferentiam petent; & verisimile est, quòd, etiamsi demonstrationum gratiâ hypothesin talem, initio Sectionis hujus, proposuerim, ut Resistentia velocitati proportionalis esset, tamen Resistentia in minori sit ratione, quàm ea velocitatis est. Quo concesso, tempora periodica partium Vorticis erunt in majori quàm duplicatâ ratione distantiarum ab ipsius centro. Quòd si Vortices (uti aliquorum est opino) celeriùs moveantur prope centrum, dein tardiùs usque ad certum limitem, tum denuò celeriùs juxta circumferentiam; certè nec ratio sesquiplicatâ, neque alia quævis certa ac determinata, obtinere potest. Viderint itaque Philosophi, quo pacto Phænomenon illud rationis sesquiplicatæ per Vortices explicari possint.

PROP. LIII. THEOR. LXI.

Corpora, quæ in Vortice delata in orbem redeunt, ejusdem sunt densitatis cum Vortice, & eâdem lege cum ipsius partibus, quoad velocitatem & cursûs determinationem moventur

Nam si Vorticis pars aliqua exigua, cujus particulæ, seu puncta physica, datum servant situm inter se, congelari supponatur: hæc, quoniam neque quoad densitatem suam, neque quoad vim insitam aut figuràm suam mutatur, movebitur eâdem lege ac prius: & contrà, si Vorticis pars congelata & solida ejusdem sit densitatis cum reliquo Vortice, & resolvatur in Fluidum; movebitur hæc eâdem lege ac priùs, nisi quatenus ipsius particulæ, jam fluidæ factæ, moveantur inter se. Negligatur igitur motus particularum inter se, tanquam ad totius motum progressivum nil spectans, & motus totius idem erit ac priùs. Motus autem idem erit cum motu aliarum Vorticis partium, à centro æqualiter distantium,

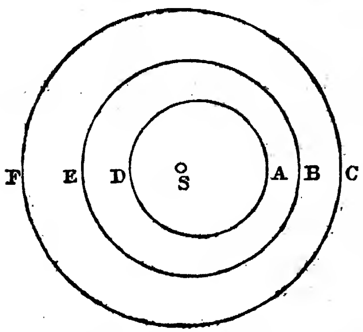
tium, propterea quòd Solidum, in Fluidum reſolutum, fit pars Vorticis cæteris partibus conſimilis. Ergo Solidum, ſi ſit ejuſdem denſitatis cum materiâ Vorticis, eodem motu cum ipſius partibus movebitur, in materiâ proximè ambiente relativè quieſcens. Sin denſius ſit, jam magis conabitur recedere à centro Vorticis quàm priùs; ideoque Vorticis vim illam, quâ prius in orbitâ ſuâ, tanquam in æquilibrio conſtitutum, retinebatur, jam ſuperans, recedet à centro, & revolvendo deſcribet Spiralem, non ampliùs in eundem orbem rediens. Et eodem argumento ſi rarius ſit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem orbem niſi ſit ejuſdem denſitatis cum Fluido. Eo autem in caſu oſtenſum eſt, quòd revolveretur eâdem lege cum partibus Fluidi à centro Vorticis æqualiter diſtantibus. Q. E. D.

Corol. 1. Ergo Solidum, quod in Vortice revolvitur, & in eundem orbem ſemper redit, relativè quieſcit in Fluido cui innatat.

Corol. 2. Et ſi Vortex ſit quoad denſitatem uniformis, corpus idem, ad quamlibet à centro Vorticis diſtantiam, revolvi poteſt.

Scholium.

Hinc liquet Planetas à Vorticibus corporeis non deferri. Nam Planetæ, ſecundum hypotheſin *Copernicæam*, circa Solem delati revolvuntur in Ellipſibus umbilicum habentibus in Sole, &, radiis ad Solem ductis, areas deſcribunt temporibus proportionales. At partes Vorticis tali motu revolvi nequeunt. Deſignent AD, BE, CF, orbes tres circa Solem S deſcriptos; quorum extimus, CF, circulus ſit Soli concentricus, & interiorum duorum Aphelia ſint A, B, & Perihelia D, E. Ergo corpus, quod revolvitur in orbe CF, radio ad Solem ducto, areas temporibus proportionales deſcribendo, movebitur uniformi cum motu. Corpus autem, quod revolvitur in orbe BE, tardiùs movebitur in Aphelio B, & velociùs in Perihelio E, ſecundum leges Aſtronomicas; cùm tamen, ſecundum leges Mechanicas, materia Vorticis, in ſpatio anguſtiore inter A & C, velociùs moveri debeat, quàm in ſpatio latiore inter D & F; id eſt, in Aphelio velociùs quàm in Perihelio. Quæ duo repugnant inter ſe. Sic in principio ſigni Virginis, ubi Aphelium Martis jam verſatur, diſtantia inter orbes Martis & Veneris eſt ad diſtantiam eorundem orbium in principio ſigni Piſcium ut ternarius ad binarium circiter; & propterea materia Vorticis, inter orbes illos, in principio Piſcium debet eſſe velocior, quàm in principio Virginis in ratione ternarii ad binarium. Nam quo anguſtius eſt ſpatium, per quod eadem materiæ quantitas, eodem revolutionis uniùs tempore, tranſit, eo majori cum velocitate tranſire debet. Igitur ſi Terra, in hâc materiâ cœleſti relativè quieſcens, ab eâ deferretur, & unâ circa Solem revolveretur, foret hujus velocitas in principio Piſcium ad ejuſdem velocitatem in principio Virginis in ratione ſeſquialterâ. Unde Solis motus diurnus apparens in principio Virginis major eſſet quàm minutorum primorum ſeptuaginta, & in principio Piſcium minor quàm minutorum quadraginta & octo: cùm tamen (experientiâ teſte) apparens iſte Solis motus major ſit in principio Piſcium quàm in principio Virginis, & propterea Terra velocior in principio Virginis quàm in principio Piſcium. Itaque hypotheſis Vorticum cum Phænomenis Aſtronomicis omnino pugnat, & non tam ad explicandos, quàm ad perturbandos motus cœleſtes conducit. Quomodo verò motus iſti in ſpatiis liberis, ſine Vorticibus, peraguntur, intelligi poteſt ex Libro Primo, & in Mundi Syſtemate jam pleniùs docebitur.



FINIS TOMI SECUNDI.

CORRIGENDA IN CONTEXTU.

Pag. 98, lin. 32, pro *locum*, lege *loci*.
Pag. 273, lin. 6, pro *velocitatum*, lege *velocitatis*.

CORRIGENDA ET ADDENDA IN NOTIS.

P. 51, *Notæ* [l], *hæc addantur*. Cor. H. Velocitas corporis in Circulo circumacti, ea erit, quam corpus, urgente vi quâdam uniformi, quæ ejus sit æqualis quæ in circuli circuitu viget, spatium dimidii radii cadendo adeptum esset. Sumatur enim AE (fig. Not. [l]) radii AD semissis, arcusque AF æqualis radio. Erit igitur AC : AF = AF : AE. Arcus igitur AF motu corporis per circulum æquabili, et spatium AE casu recto, hoc est motu æquabiliter accelerato, eodem tempore conficientur. At verò eodem tempore quo casu recto conficitur spatium AE, conficiatur, velocitate illâ quam corpus in E adeptum erit, duplum spatium AE, sive radius AD. Arcus igitur AF et radius AD æqualibus temporibus conficiantur, velocitate uterque æquabili; ille quidem eâ quæ est corporis in Circulo circumacti, hic verò eâ quam corpus, rectâ cadendo, in loco E adeptum esset. Sunt autem arcus AF, radiusque AD inter se æquales. Quare et velocitates quibus spatia illa æqualia temporibus æqualibus conficerentur, eæ inter se æquales erunt. Velocitas igitur corporis in Circulo velocitati corporis rectâ cadentis in loco E æqualis. Q. E. D.

Cor. H. 2. Tempus quo corpus, urgente vi quâdam uniformi, quæ æqualis sit ejus quæ in Circuli circuitu viget, casu recto dimidium radium conficiat, ad tempus conversionis integræ in Circulo rationem habet, quam radius ad circuli circuitum. Patet ex demonstratione superioris.

P. 83, *Notæ* [dd], *hæc addantur*. Cor. H. 2. Si corpus aliquod à loco R in locum T rectâ cadat, urgente utique vi quâdam uniformi, quæ ejus sit æqualis, quâ corpus per Ellipsin PAF incedens urgetur versus umbilicum G in loco P (fig. Not. [dd]); tum si ea sit longitudo spatii RT, ut corporis rectâ cadentis eadem sit, in loco T, quæ alterius, per Ellipsin lati, in loco P velocitas; rectangulum sub RT et axe transverso Ellipseos rectangulo sub rectis PG, PS, à puncto Ellipseos P ad umbilicos ductis, æquale erit. Capiatur enim RV dimidiæ PG æqualis. Velocitas corporis rectâ cadentis, in loco V, ea erit quâcum Corpus, urgente vi centrali qualis est in loco Ellipseos P, in circulo circum centrum G in distantiâ GP circumageretur. (Lib. I. Sect. II. Not. [l], Cor. H.) Sed recta TR ad rectam TV rationem habet duplicatam ejus quam velocitas in loco T ad velocitatem in loco V: duplicatam igitur ejus quam velocitas in loco P, corporis per Ellipsin lati, ad velocitatem corporis circum centrum G in distantiâ GP circumacti. Harum autem velocitatum duplicata ratio ea est quam SP habet ad CA. Erit igitur TR ad TV ut SP ad CA. Quare TR : 2TV vel PG = SP : 2CA. Quare TR × 2CA = PS × PG. Q. E. D. Pulcherrimum hoc Theorema Boscovicii est. Demonstratio à nobis.

Pag. 145, lin. not. 10, pro *evadit*, lege *evadet*.
Pag. 181, lin. penult. pro *interceptæ*, lege *intercepta*.
Pag. 210, not. [f], lin. 2, dele *necnon SK, ST*.
Pag. 244, not. [d], lin. 6, pro *curvi linearis*, lege *curvilinearis*.
Pag. 275, lin. not. 5, pro *representari*, lege *repræsentari*.
Pag. 281, lin. not. 1, pro **formulis & Ideâ generationis quantitatum**, lege *formulis* * *& Ideâ generationis quantitatum* *.
Pag. 287, lin. not. 2. In membro æquationis ultimo in numeratore lege $\frac{3}{2} So^3$.
Pag. 320, lin. not. 37, pro *consenda*, lege *censenda*.
Pag. 369, lin. not. ult. pro *efficiet*, lege *efficiat*.
Pag. 386, lin. not. 12, pro *istius modi*, lege *istiusmodi*.
Pag. 419, lin. not. 9, pro *tate*, lege *unitate*.